ДРЕВНИЙ ВАВИЛОН

Первоначально культура Древней Месопотамии возникла на берегу Персидского залива. Именно здесь, в дельте Тигра и Евфрата в IV тысячелетии до н.э. жили **шумеры**, построившие города **Ур**, **Урук** (под именем Эрех он упоминается в Библии), **Лагаш** и **Ларса**. Севернее жили семиты-аккадяне, главным городом которых был **Аккад**.

До середины III тысячелетия до н.э. каждый город с его окрестностями был отдельным государством и, естественно, что времена мира и времена войн чередовались.

Уже в середине IV тысячелетия до н.э. в Шумере была **письменность**. Ее памятники по возрасту старше всех других, дошедших до наших дней. Основным материалом для письма служили каменные, а затем глиняные плитки, на которых острым предметом выцарапывались надписи.

Шумеры – древний народ, некогда населявший территорию долины рек Тигра и Евфрата на юге современного государства Ирак (Южная Месопотамия или Южное Двуречье). На юге граница их обитания доходила до берегов Персидского залива, на севере – до широты современного Багдада.

На протяжении целого тысячелетия шумеры были главными действующими лицами на древнем Ближнем Востоке. **Шумерская астрономия и математика были точнейшими на всем Ближнем Востоке**. Мы до сих пор делим год на четыре сезона, двенадцать месяцев и двенадцать знаков зодиака, измеряем углы, минуты и секунды так, как это впервые стали делать шумеры. Идя на прием к врачу, мы все получаем рецепты лекарств или совет психотерапевта, совершенно не задумываясь о том, что и траволечение, и психотерапия впервые развились и достигли высокого уровня именно у шумеров. Получая повестку в суд и рассчитывая на справедливость судей, мы также ничего не знаем об основателях судопроизводства – шумерах, первые законодательные акты которых способствовали развитию правовых отношений во всех частях Древнего мира. Наконец, задумываясь о превратностях судьбы, сетуя на то, что при рождении нас обделили, мы повторяем те же самые слова, которые впервые занесли на глину философствующие шумерские писцы, – но вряд ли даже догадывается об этом.

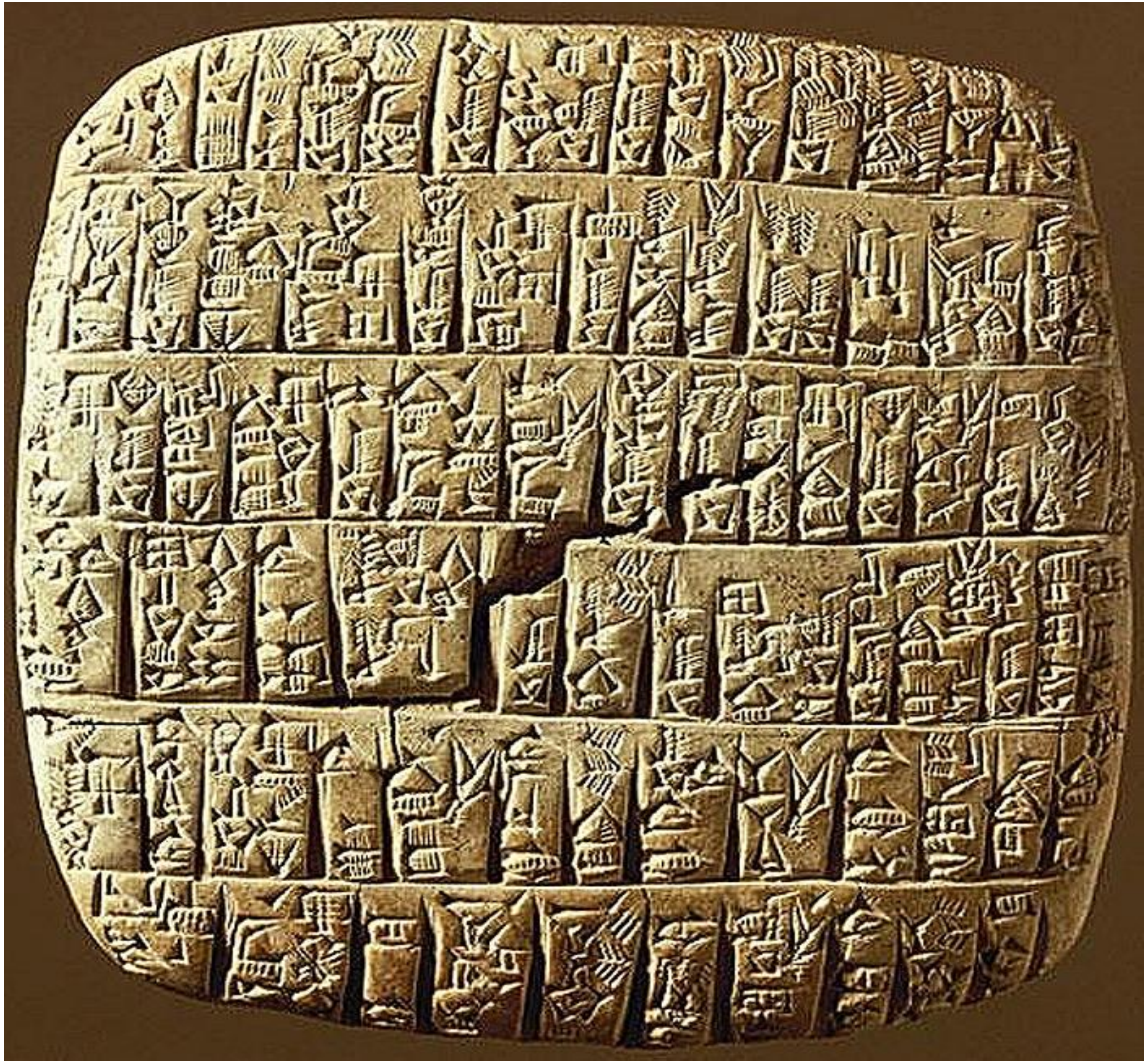
Шумеры – "черноголовые". Этот народ, появившийся на юге Месопотамии в середине III тысячелетия до нашей эры неизвестно откуда, сейчас называют "прародителем современной цивилизации" , а ведь **до середины 19-го века никто о нем даже не подозревал**…

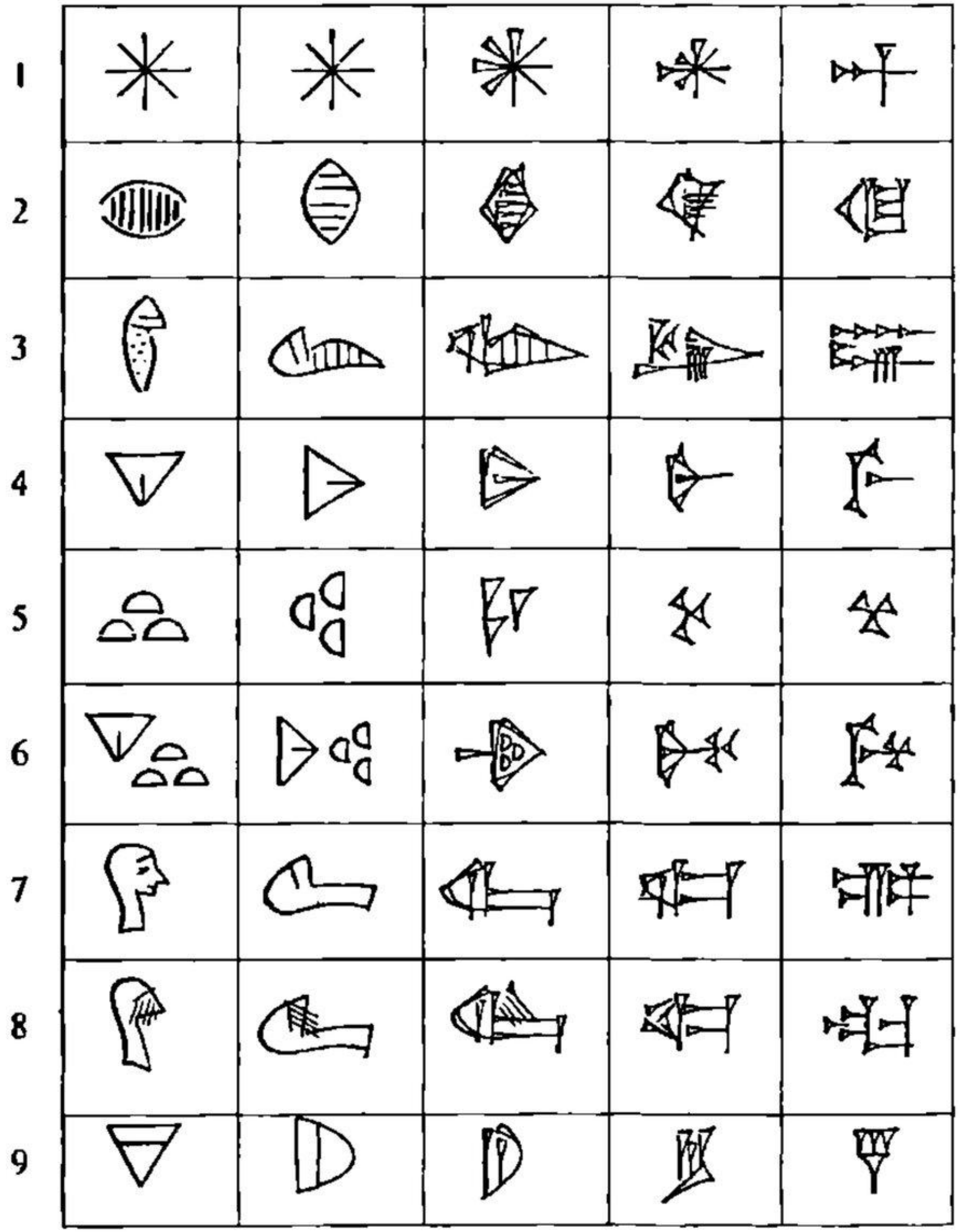
Клинописные глиняные таблички в огромных количествах стали поступать в Европу в результате археологических изысканий в середине XIX века.

Так, в 1849–50 гг. в развалинах древней ассирийской столицы Нина и Семирамиды – города Ниневии археолог Лейярд нашел дворцовую библиотеку, а в 1853 г. Хорзмунд Рассам открыл библиотеку Ашшурбанипала, ассирийского царя, правившего в VII в. до н.э. 20 000 табличек из этих раскопок хранятся сейчас в Британском музее в Лондоне. Всего же глиняных табличек в мире насчитывается около 500 000.

Математические таблички расшифровал и опубликовал впервые в 1935–37 гг. О. Нейгебауер – ученик Д. Гильберта.

V тыс. до н.э.





*Знаки **первой колонки** принадлежат древнейшему периоду развития шумерского письма.*

Вскоре после изобретения пиктографического письма шумерские писари сочли удобным разворачивать табличку таким образом, чтобы изображения оказывались в лежачем положении. По мере развития письма эта практика стала обычной, и знаки регулярно поворачивались на 90 градусов.

***Вторая колонка** таблицы дает пиктографические знаки в их повернутом положении.*

***Следующая** колонка представляет "**архаическое**" начертание, бытовавшее примерно в 2500 г. до н. э. **Колонка 4** дает формы знаков примерно **1800 г. до н. э.** - так было написано большинство литературных документов.*

*Упрощенными формами, представленными **в последней колонке**, пользовались царские писцы Ассирии в **1-м тысячелетии до н. э**.*

1 — изображение звезды. Соответствует преимущественно шумерскому слову *ан*, *«небо»*. Тот же знак использовался для обозначения слова *дингир*, *«бог»*.

2 — представляет слово *ки*, *«земля»*. Очевидно, имелось в виду изображение земли, хотя трактовка знака до сих пор под сомнением.

3 — вероятно, стилизованное изображение верхней части человеческого тела. Представляет слово *лу*, *«человек»*.

4 — изображение женского полового органа и слова *саль* с соответствующим значением. Тот же знак использовался для передачи слова *мунус*, *«женщина»*.

5 — изображение горы. Соответствует слову *кур*, первое значение которого — *«гора»*.

6 — иллюстрация обходного маневра, разработанного на ранних этапах изобретателями шумерской системы письма для случаев, когда можно было наглядно изобразить слова, для которых обычное пиктографическое изображение представляло определенную сложность. Знак для слова *геме*, *«рабыня»*, в действительности является комбинацией двух знаков — знака для *мунус*, *«женщина»* и знака для *кур*, *«гора»* (4 и 5 в нашей таблице). Таким образом, этот сложный знак буквально выражает идею *«женщина гор»*. А так как своих рабынь шумеры приводили в основном из ближайших горных районов, то этот сложный знак адекватно выражал шумерское слово *геме*, *«рабыня»*.

7 — изображение головы. Соответствует шумерскому слову *саг*, *«голова»*.

8 — это также изображение головы. Вертикальные штрихи указывают на определенную часть головы, а именно рот. Таким образом, этот знак представляет шумерское слово *ка*, *«рот»*. Тот же знак означает слово *дуг*, *«говорить»*.

9 — вероятно, изображение котелка, служившего в первую очередь емкостью для пищи. Соответствует слову *нинда*, *«пища»*.

10 — сложный знак, сочетающий знаки рта и пищи (8 и 9 в нашей таблице). Означает *ку*, *«есть, кушать»*.

Как и в Египте, в Древнем Вавилоне **профессия писца была почетной**:

“Тот, кто в совершенстве владеет искусством писать на табличках, будет сверкать, подобно солнцу.”

Нередко сыновья правителей избирали эту профессию, ведь писцы относились к правящему классу.

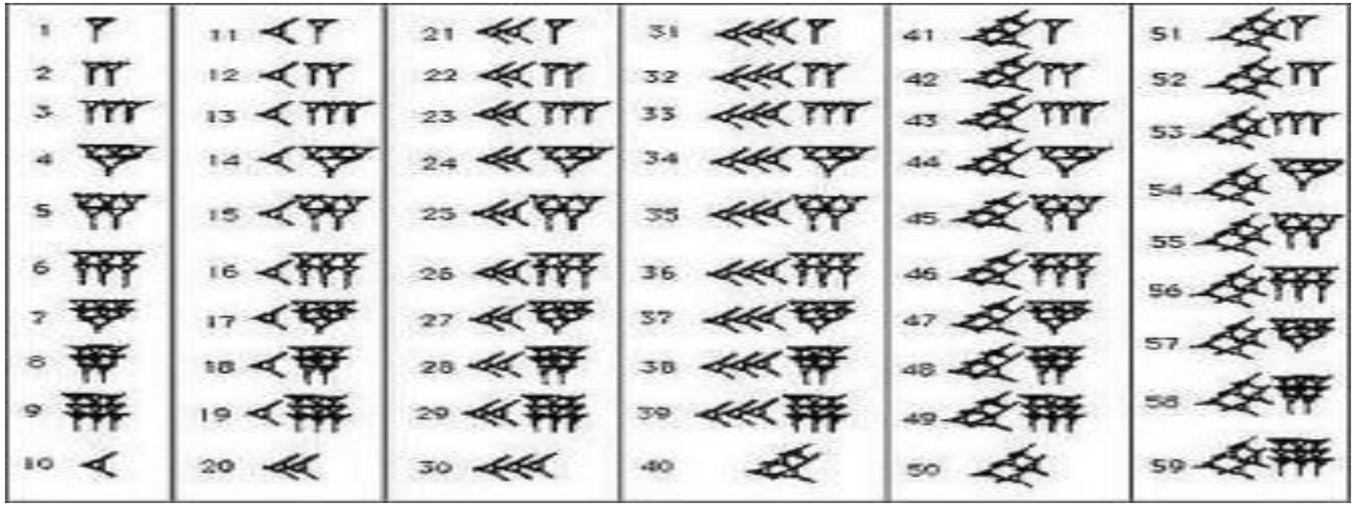
Школа или академия, в которой обучались писцы, называлась **“Дом табличек”.**

“Писец должен уметь писать понятно, хорошо знать счет , уметь межевать земли, примирять спорящих”, – так писал один из учеников своему другу.

Математические **таблички**

1. Тексты-таблицы: таблицы умножения;
   таблицы квадратов;
   таблицы обратных чисел;
   таблицы кубов;
   таблицы квадратных корней;
   таблицы сумм кубов и квадратов…
2. Тексты-задачники.

Система счисления – позиционная, шестидесятиричная, которая сочеталась с более ранней десятичной.



Вавилонская клинопись

Такая система счисления позволяла вавилонянам записывать не только целые числа, но и дроби!

Но шестидесятиричные конечные дроби поле не образуют $\Rightarrow$ **много приближений** – еще одна **особенность вавилонской математики**.

Арифметика древних вавилонян

1. Задачи на арифметические и геометрические прогрессии:

   – знали сумму первых членов арифметической прогрессии,

   – знания более развиты, чем у египтян.

2. Много задач на проценты.

3. Формула приближенного вычисления квадратного корня из числа $\sqrt{N} = \sqrt{(a^2+r)} \approx a+r/(2a) = x_1$.

   Использование приближений, которые позже можно встретить у Герона Александрийского (I в. н.э.):

   $$x_2 \approx 1/2\ (x_1 + N/x_1)$$

Алгебра

1. Квадратные уравнения и системы, к ним сводящиеся:

Большое количество однотипных задач, которые можно назвать каноническими и записать в виде:

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ xy = b \end{cases}, \qquad \begin{cases} x \pm y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}, \qquad ax^2 \pm bx = c.$$

Как правило, *x* – длина, *y* – ширина (всегда длина больше ширины), *xy* – площадь, иногда встречается глубина. Но несмотря на геометрические названия принципа однородности древних греков нет.

Зато существуют и более абстрактные названия неизвестных величин: «*множимое*» и «*обратное к нему*».

«**Квадрат и сторона 0; 45**»

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

$$x^2 + px = q$$

1. Возьми 1. *p*
2. Пополам 0;30. *p/2*
3. 0;30 х 0;30 = 0;15. $\frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \left(\frac{p}{2}\right)^2$
4. 0;15 + 0;45 = 1. $(p/2)^2 + q$
5. Что на что надо умножить, чтобы получить 1: 1. $\sqrt{(p/2)^2 + q}$
6. 1 – 0;30 = 0;30 $\sqrt{(p/2)^2 + q} - \frac{p}{2} = x$

   – искомая сторона.

«**Множимое и обратное 2;30**»

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

1. На 0;30 умножь: 1;15
2. 1;15 на 1;15 умножь: 1;33,45
3. 1 вычти отсюда
4. Что на что надо умножить, чтобы 0;33,45 получить: 0;45
5. 0;45 к 1:15 прибавь: 2 – множимое
6. 0;45 от 1;15 вычти: 0;30 – обратное

$$(a/2)^2$$

$$(a/2)^2 - b$$

$$\sqrt{(a/2)^2 - b}$$

$$\frac{a}{2} + \sqrt{(a/2)^2 - b} = x$$

$$\frac{a}{2} - \sqrt{(a/2)^2 - b} = y$$

Мы видим последовательность решения квадратного уравнения, эквивалентного заданной системе. Никаких пояснений нет, но дается большое число однотипных задач.

Как получен алгоритм решения? Существуют различные гипотезы на этот счет. Одна из них:

Пусть множимое и обратное ему различны, тогда в качестве вспомогательной величины можно взять величину, на которую множимое и обратное отличаются

от половины их суммы:
$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + t \\ y = \frac{a}{2} - t \end{cases}$$

Тогда второе уравнение заданной системы дает простейшее квадратное уравнение

$$t^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b,$$

которое решается извлечением квадратного корня.

Анализ гипотезы позволяет сделать вывод, что вавилоняне:

– знали подстановки;

– умели раскрывать скобки;

– знали формулу квадрата двучлена

(*существуют примеры неканонических задач, подтверждающих эти утверждения*)

Все только в числах $\Rightarrow$ речь идет о **ЧИСЛОВОЙ** алгебре.

Как возникли квадратные уравнения?

$\Rightarrow$ Обращение задач.

Встречаются несколько задач об объемах, которые **мы** могли бы свести к решению частного случая **кубического уравнения**, но утверждать, что вавилоняне именно это имели в виду, нельзя. Решалась конкретная стереометрическая задача без какого-либо теоретического объяснения.

2. Неопределенные уравнения

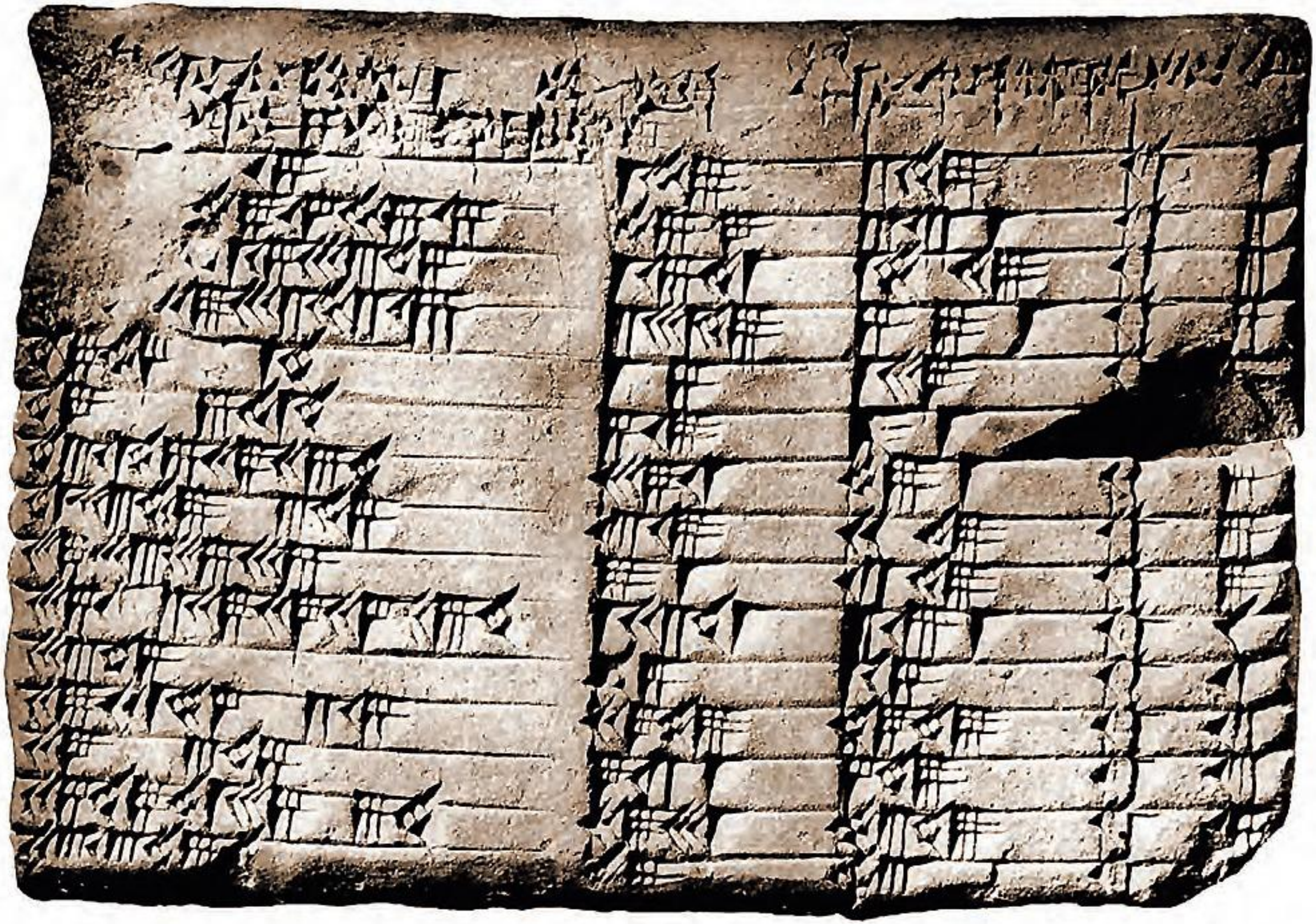
I. Самым древним и самым знаменитым примером неопределенного уравнения является уравнение, выражающее зависимость между сторонами прямоугольного треугольника:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Это утверждение всем известно как “теорема Пифагора”, хотя никаких доказательств, что именно Пифагор или кто-то из его учеников первым доказал его, нет.

Поскольку существует бесконечное множество прямоугольных треугольников, то существует и бесконечное число решений этого уравнения. Задача состоит в том, чтобы найти **все** целые (или рациональные) решения, которые позже были названы **пифагоровы**ми **тройк**ами.

Плимптон 322



строка 11 ↠

В оригинале в таблице пять столбцов. В крайнем правом указан номер строки, во втором слева – меньший из катетов, в третьем – гипотенуза (оригинальное название столбца – *диагональ*), **в первом** (самое загадочное! зачем???) – **квадрат отношения гипотенузы ко второму катету** (косеканс??? в квадрате).

В 2017 австралийские исследователи Мансфилд и Уайлдбергер (в *Historia Mathematica*) выдвинули ***гипотезу о*** существовании в древнем Вавилоне своеобразной **тригонометрии**.

Египетский треугольник на предыдущем слайде и на следующем находится в строке 11 в виде (45; 75; 60).

На следующем слайде – изображения чисел с помощью арабских цифр в шестидесятеричной системе счисления, дополненные столбцом, содержащим величину второго катета.

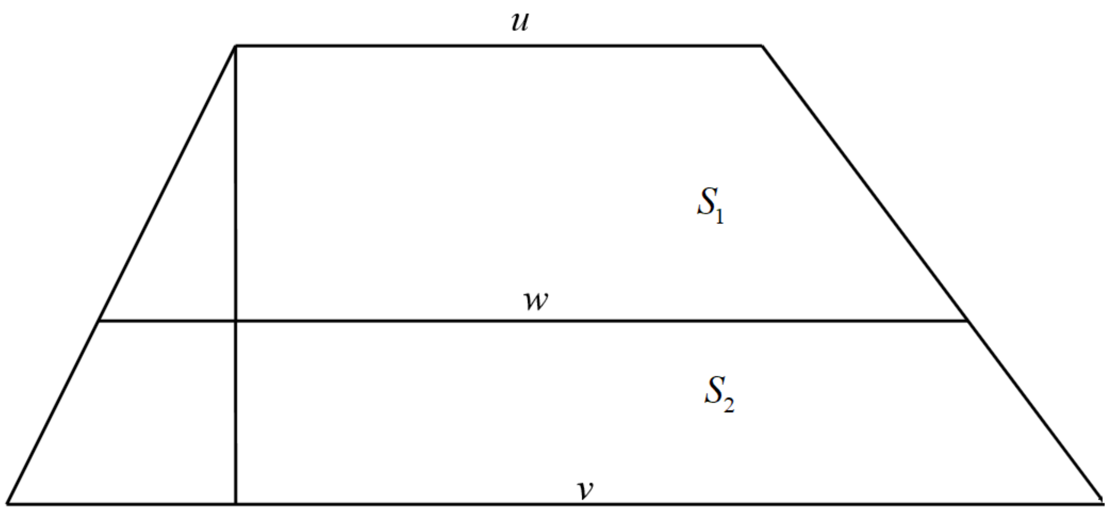
I.	II. *b*	III. *d*	IV.	*l*
(1) 59 00 15	1 59	2 49	1	2 00
(1) 56 56 58 14 50 06 15	56 07	3 12 1 [1 20 25]	2	57 36
(1) 55 07 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3	1 20 00
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4	3 45 00
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	5	1 12
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	6	6 00
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7	45 00
(1) 41 33 59 03 45	13 19	20 49	8	16 00
(1) 38 33 36 36	9 01 [8 01]	12 49	9	10
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10	1 48 00
(1) 33 45	45	1 15	11	1 00
(1) 29 21 54 02 15	27 59	48 49	12	40 00
(1) 27 00 03 45	7 12 1 [2 41]	4 49	13	4 00
(1) 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14	45 00
(1) 23 13 46 40	56	53 [1 46]	15	1 30

Номер строки	*l*	*b*	*d*
1	120	119	169
2	3456	3367	4825
3	4800	4601	6649
4	13500	12709	18541
5	72	65	97
6	360	319	481
7	2700	2291	3541
8	960	799	1249
9	600	481	769
10	6480	4961	8161
11	60	45	75
12	2400	1679	2929
13	240	161	289
14	2700	1771	3229
15	90	56	106

Это – современное изображение 15 пифагорейских троек, которые находятся в таблице. Считается, что вавилоняне знали 38 таких троек.

II. Задача, решения которой называются «**вавилонскими тройками**», также имеет геометрическую природу: рассечь данную трапецию на две равновеликие части прямой, параллельной основаниям.

Обозначив параллельные отрезки через *u*, *v* и *w*, получим
$\boldsymbol{u^2 + v^2 = 2w^2}$.



Существует табличка, в которой рядом изображены пифагорейские и вавилонские тройки (след. слайд), следовательно, можно утверждать, что вавилоняне знали связь между ними.

3	4	5	7	1	5
5	12	13	17	7	13
7	24	25	31	17	25
…					

$\Rightarrow$ знали связь $\begin{cases} u = x + y \\ v = y - x \\ w = z \end{cases}$

Более того, они умели, опираясь на одно решение вавилонского уравнения с помощью формулы (?!) композиции форм (?!!) находить два других!!!

Формула композиции форм

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) \quad = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2$$
$$= (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2.$$

Геометрия

древних вавилонян развита меньше, чем алгебра.

1. Умели находить площади прямоугольника, треугольника, трапеции, произвольного четырехугольника (как и в Египте) + площади некоторых правильных многоугольников, сегмент круга. Для площади круга (приближение числа π) и длины окружности было простое выражение, где π = 3.
2. Для объема усеченной пирамиды использовалась как точная формула (есть и у Герона I в.н.э.), так и приближенная. Встречается изучение усеченного конуса.
3. В *нескольких* задачах π = 25/8 (т.е. 3,125).
4. Теорема Пифагора содержится в таблицах эпохи Хаммурапи (XVIII до н.э.)

Астрономические вычисления древних вавилонян

Вавилоняне первыми проводили систематические наблюдения звездного неба. Были найдены тысячи глиняных табличек, содержавших сотни астрономических терминов. В некоторых из этих табличек содержались математические формулы и астрономические таблицы, при помощи которых шумеры могли **предсказывать солнечные затмения, различные фазы Луны и траектории движения планет**. Изучение древней астрономии обнаружило замечательную точность этих таблиц (известных под названием *эфемерид*). Никто не знает, каким образом они были рассчитаны, но мы можем задаться вопросом — зачем это было нужно?

Шумеры измеряли восход и закат видимых планет и звезд относительно земного горизонта, пользуясь той же **гелиоцентрической системой**, которая применяется сейчас. Мы переняли от них разделение небесной сферы на три сегмента — северный, центральный и южный.

В сущности, **все современные понятия** **сферической астрономии**, включая полную сферическую окружность в 360 градусов, зенит, горизонт, оси небесной сферы, полюса, эклиптику, равноденствие и пр., внезапно возникли в Шумере.

Познания шумеров относительно движения Солнца и Земли были объединены в первом в мире **солнечно-лунном календаре**, созданном в городе Ниппуре, начинавшемся в 3760 году до Р.Х.

Шумеры считали 12 лунных месяцев, составлявших приблизительно 354 дня, а затем прибавляли еще 11 дополнительных дней, чтобы получить полный солнечный год. Эта процедура, называемая *интеркаляцией*, проделывалась ежегодно, пока (через 19 лет) солнечный и лунный календарь не совмещались. Удивительно то, что такая развитая астрономическая наука совсем не была необходима этому обществу.

Эти астрономические знания перешли впоследствии к грекам, а от них к европейским математикам, и использовались вплоть до XV–XVI вв., когда появились десятичные дроби, которые стали вытеснять шестидесятеричные.

Заключение.

Математика в древнем Вавилоне находилась на более **высоком уровне**, чем в древнем Египте. В ней существовали новые направления. Однако, так же как и египетской, математике вавилонян был присущ **догматический характер** изложения.

Была создана **позиционная система счисления**, и в результате **техника вычислений** вавилонян оказалась даже выше, чем у греков.

Была разработана **числовая алгебра линейных и квадратных уравнений** и рассмотрены первые неопределенные уравнения.

Тесная **связь задач геометрии с алгеброй и теорией чисел**.

Теорема Пифагора.

Домашнее задание: дать сравнительный анализ математики Древнего Египта и Древнего Вавилона и прислать в виде pdf-файла на почту galina.smirnova@math.msu.ru до 14 марта 2026 г.