Обратная матрица

Квадратная матрица A называется невырожденной $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \det A \neq 0$

Матрица $\underset{(n\times n)}{B}$ называется обратной к невырожденной матрице $\underset{(n\times n)}{A} \overset{def}{\Longleftrightarrow} AB = BA = E$.

Обозначается: $B = A^{-1}$.

I. Метод вычисления обратной матрицы с помощью присоединённой матрицы.

$\exists$ Теорема: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*}}$, где

1) A – невырожденная матрица;

2) $A^{*} \equiv$ матрица, составленная из алгебраических дополнений A^{ij} и затем транспонированная:

$$A^{*} = \left(A^{ji} \right)$$

Алгебраическим дополнением A^{ij} к элементу a_{ij} называется $\begin{cases} \text{минор } M^{ij}, \ldots, \\ \text{со знаком } (-1)^{i+j}. \end{cases}$

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1} к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. $\det A = \begin{vmatrix} {}^{+)}1 & 2 & -1 \\ {}^{-)}3 & {}^{+)}0 & {}^{-)}2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}_{8} + 0 - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}_{-10} =$

$= -4$

2. Заготовка для матрицы A^*:

$A^{11} = +$ $\quad A^{21} = -$ $\quad A^{31} = +$

$A^{12} = -$ $\quad A^{22} = +$ $\quad A^{32} = -$

$A^{13} = +$ $\quad A^{23} = -$ $\quad A^{33} = +$

Красным цветом нарисованы знаки для M^{ij}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Вычисляем все МЙ:

$A^{11} = +4$ $\qquad$ $A^{21} = -8$ $\qquad$ $A^{31} = +4$

$A^{12} = -7$ $\qquad$ $A^{22} = +9$ $\qquad$ $A^{32} = -5$

$A^{13} = +(-6)$ $\qquad$ $A^{23} = +10$ $\qquad$ $A^{33} = +(-6)$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

II. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

Был метода Гаусса для СЛУ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{хочу}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & & \\ 0 & \dots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & -10 & 9 \end{pmatrix} \to \dots$$

☆ Т.к. после изменения порядка строк или столбцов получается другая матрица, то этих действий при вычислении обратной матрицы делать НЕЛЬЗЯ !!!

Теперь возьмём $(A|E)$ и делаем то же самое, что в методе Гаусса, но с учётом ☆:

$$\begin{array}{c} 4 \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1\cdot 3 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1\cdot\ 4 & -2 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5\cdot 6 & -5 & | & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3\cdot 10 & -9 & | & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{6}\,1 & -5/6 & 3/6 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1\cdot 5/6 & 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{array}{c} (1) \\ \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow$$

$$(1)+(3) \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5/2 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \cdot 1 \\ + \\ \cdot(-2) \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$0+\frac{5}{\cancel{6}\,2}\cdot\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{\cancel{6}\,2}=\frac{7}{4} \qquad -\frac{1}{6}\,^{2)}-\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{-\cancel{27}\,9}{\cancel{12}\,4}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

Векторы

Линейная независимость векторов

Опр. 1. Система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ называется линейно зависимой $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\ \lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \neq 0$ такие, что

$$\underbrace{\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n}_{\text{линейная комбинация векторов}} = \vec{0}$$

(можно записать: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$)

Опр. 1'. Система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ называется линейно зависимой $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ хотя бы один вектор в этой системе, линейно выражающийся через остальные:

$$\exists\ \vec{x}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i \vec{x}_i .$$

Ув. Определение 1 и Определение 1' эквивалентны.

Д-во: I $\quad 1 \overset{?}{\Rightarrow} 1'$.

Пусть $\{x_1, \dots, x_n\}$ линейно зависима.

Тогда по опр. 1 $\exists \lambda_i \neq 0 : \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_i x_i + \lambda_n x_n = 0$

$$\Longrightarrow \lambda_i x_i = -(\lambda_1 x_1 + \underbrace{\dots}_{\text{нет } i\text{-го слагаемого}} + \lambda_n x_n)$$

Т.к. $\lambda_i \neq 0$, то
$$x_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} x_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_i}\right) x_n =$$
$$= \lambda_1' \cdot x_1 + \underbrace{\dots}_{\text{нет } i\text{-го слагаемого}} + \lambda_n' \cdot x_n,$$

где $\lambda_i' \in \mathbb{R}$, т.е.

$\exists$ вектор x_i, линейно выражающийся через остальные.

II $\quad 1' \overset{?}{\Rightarrow} 1.$

Пусть $\{x_1, \dots, x_n\}$ линейно зависима по определению $1'$, т.е. хотя бы один из векторов системы линейно выражается через остальные.

Пусть это вектор x_j:

$$x_j = \lambda_1 \cdot x_1 + \underbrace{\dots}_{\text{нет } j\text{-го слагаемого}} + \lambda_n x_n \quad \text{и не все } \lambda_i = 0,$$

тогда, перенеся x_j в правую часть, получим

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + (-1) \cdot x_j + \dots + \lambda_n x_n}_{\text{ровно } n \text{ слагаемых}} = 0,$$

т.е. $\exists$ нулевая линейная комбинация векторов системы, в которой не все $\lambda_i = 0$.

Опр. 1. Система векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ называется *линейно независимой* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ линейная комбинация этих векторов обращается в ноль только если все $\lambda_i = 0$.

Задача. Выяснить, заданная система векторов является линейно зависимой или нет:

$$\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{j} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

(т.е. удобнее сразу задавать вектора координатами)

(I) "В ЛОБ" (по определению):

Рассмотрим нулевую линейную комбинацию этих векторов: $\sum \lambda_i e_i = 0$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Получим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными, в кот. свободные члены все $= 0$ (т.е. однородную СЛУ).

Решаем её <u>методом Гаусса</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \Uparrow \\ 2\lambda_2 = 0 \\ \Uparrow \\ \lambda_3 = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Линейная комбинация данных векторов обращается в ноль $\Leftrightarrow$ все $\lambda_i = 0$ $\Rightarrow$ Эта система векторов линейно независима.

II С помощью вспомогательного утверждения:

Решим систему (*) по правилу Крамера:

1. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{по третьей строке}}{=} \underbrace{-1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{-(-1-1)} = 2$

2. Т.к. все Δ_i для (*) $= 0$ (поскольку в них есть нулевой столбец свободных членов), то $\forall i = 1, 2, 3$

$$\lambda_i = \frac{0}{2} = 0,$$

т.е. нулевая комбинация векторов системы обращается в 0 $\Leftrightarrow$ все $\lambda_i = 0$

$\Rightarrow$ дана линейно независимая система векторов.

Если бы $\det A = 0$, то по правилу Крамера система (*) была бы несовместна, или же имела бы беск. множество решений.
Т.к. (*) у нас — однородная слу, то у неё всегда $\exists$ нулевое решение ($AX=0$), только в случае $\det A = 0$ оно не будет единственным. $X=0$

Вывод: Чтобы ответить на вопрос о линейной зависимости системы векторов, достаточно вычислить $\det A$.

Опр. 3. Базисом линейного (векторного) пространства называется максимальная л. н. с. в. (т.е. число векторов в такой системе совпадает с числом координат).

Утв. В каждом пространстве $\exists$ беск. много базисов.

Назовём каноническим базисом тот, в котором координаты образуют единичную матрицу:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 1. Пусть $\exists$ другой базис, вектора которого заданы своими координатами в каноническом базисе:

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Написать матрицу перехода от $\{e_i\}$ к $\{e'_i\}$:

$$T_{\{e_i\} \to \{e'_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{tikzcd} & \{e'_i\} \arrow[d, "T"] \\ \{e_i\} \arrow[ur, "T_1"] \arrow[r, "T_2"'] & \{e''_i\} \end{tikzcd}$$

Верно $T_2 = T_1 \cdot T$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{T = T_1^{-1} \cdot T_2}$$

Изменение координат вектора при переходе в другой базис

$$\boxed{X' = T^{-1} \cdot X}$$

Пусть $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Найти координаты X в базисе $\{e_i'\}$.

1. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot (\underbrace{4-3}_{1}) + 0 + 1 \cdot (\underbrace{3-4}_{-1})$

$= -2$

2. $T^{11} = 3 \qquad T^{21} = -2 \qquad T^{31} = 1$

$T^{12} = -4 \qquad T^{22} = 2 \qquad T^{32} = -0$

$T^{13} = 3 \qquad T^{23} = -2 \qquad T^{33} = -1$

$$\Rightarrow T^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} +3 & -2 & +1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $$X' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ т.е.}$$

$$= -1 \cdot e_1' + 0 \cdot e_2' + 2 \cdot e_3'$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

1. 3.106, 3.109, 3.110, 3.114, 3.115, 3.116, 3.119.
2. 4.15, 4.30, 4.31, 4.37.