Собственные числа и собственные векторы линейного оператора

Преобразование $\varphi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называется линейным $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in \mathcal{L}$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются:

1) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ $(\star)$

2) $\varphi(\lambda x) = \lambda \cdot \varphi(x)$ $(\star\star)$

Задача: Установить заданные преобразование φ линейно или нет:

① $\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \\ x_1 - 3x_3 + x_2 \end{pmatrix}$

1) Пусть $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Тогда $\underbrace{\vec{x} + \vec{y}}_{\vec{z} \overset{об}{=}} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

$$\varphi(\vec{x}+\vec{y}) = \varphi(\vec{z}) = \begin{pmatrix} 2z_1 + z_2 \\ -z_2 + z_3 \\ z_1 - 3z_3 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2y_1 + x_2 + y_2 \\ -(x_2+y_2) + x_3 + y_3 \\ x_1 + y_1 - 3(x_3+y_3) + x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 2y_1 + y_2 \\ -x_2 + x_3 - y_2 + y_3 \\ x_1 - 3x_3 + x_2 + y_1 - 3y_3 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \\ x_1 - 3x_3 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ -y_2 + y_3 \\ y_1 - 3y_3 + y_2 \end{pmatrix}$$

$= \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$, т.е. (★) выполняется.

2) Пусть $\vec{z} = \lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

Тогда $\varphi(\lambda\vec{x}) = \varphi(\vec{z}) = \begin{pmatrix} 2z_1 + z_2 \\ -z_2 + z_3 \\ z_1 - 3z_3 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda x_1 + \lambda x_2 \\ -\lambda x_2 + \lambda x_3 \\ \lambda x_1 - 3\lambda x_3 + \lambda x_2 \end{pmatrix}$

$= \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \\ x_1 - 3x_3 + x_2 \end{pmatrix} = \lambda\varphi(\vec{x})$, т.е. (★★) выполняется

$\Longrightarrow \varphi(\vec{x})$ линейна.

2. $\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 1 \\ -x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$

1. $\varphi(\vec{z}) = \varphi(\vec{x}+\vec{y}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2y_1 + x_2 + y_2 + 1 \\ -(x_2+y_2) + x_3 + y_3 \\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 - 3(x_3+y_3) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 1 \\ -x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ -y_2 + y_3 \\ y_1 + y_2 - 3y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \varphi(\vec{x}) + \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ -y_2 + y_3 \\ y_1 + y_2 - 3y_3 \end{pmatrix} \neq \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$$

$\Rightarrow \varphi(\vec{x})$ не линейное.

<u>Утверждение</u>. В линейном арифметическом пространстве линейное преобразование **всегда** можно задать матрицей в ***выбранном*** базисе.

<u>Задача А.</u> Выписать матрицу линейного оператора в каноническом базисе:

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

I <u>В лоб:</u>

Для того, чтобы выписать матрицу в базисе, нужно отследить действие оператора на базисных векторах.

Для канонического базиса:

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(\vec{x}) = AX$$

Задача 8.

Пусть $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ это —

Проверка: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}_{1} + 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{3} = 4 \neq 0 \Rightarrow$ базис

$$\varphi(e_1') = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \varphi(e_2') = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \varphi(e_3') = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ в этом базисе $A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & -10 & -4 \end{pmatrix}$

Теорема: Между A и A' $\exists$ связь с помощью матрицы T перехода от $\{e_i\}$ к $\{e_i'\}$:

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

При этом $\det(A - \lambda E)$ не зависит от выбора базиса ($\exists$ доказательство) и поэтому называется характеристическим многочленом.

Определение. Если $\exists$ вектор (или векторы) $\in \mathcal{L}$ и число (числа) $\lambda \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\underline{X} \neq 0, \text{ но } \underline{A}\underline{X} = \lambda \cdot \underline{X}, \text{ то}$$

этот вектор называется собственным, а λ — собственным числом линейного преобразования φ, заданного своей матрицей A.

Вопрос: Когда $\exists$ собственные векторы и собственные числа л.п. φ?

$$AX = \lambda X \iff AX - \lambda X = 0 \iff (A - \lambda E)\underline{X} = 0$$

это есть однородная СЛУ.

У неё всегда $\exists$ нулевое решение $X = 0$, но оно нам НЕ нужно.

Применив правило Крамера, получим условие $\boxed{\det(A - \lambda E) = 0}$

Примеры. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного своей матрицей A.

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

1) $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= \underbrace{(-1-\lambda)}_{-(\lambda+1)} \underbrace{\underbrace{\begin{vmatrix} (5-\lambda) & -1 \\ 3 & (1-\lambda) \end{vmatrix}}_{\lambda^2 - 6\lambda + \underbrace{5+3}_{8}}}_{(\lambda-2)(\lambda-4)} - 3 \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{\substack{3\lambda - 3 - 3 \\ 3(\lambda-2)}} +$$

$$+ (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 5-\lambda \\ -3 & 3 \end{vmatrix}}_{-9+15-3\lambda} = -3(\lambda-2)$$

$$= (\lambda-2)\left(-(\lambda+1)(\lambda-4) \underbrace{-9+3}_{-6}\right)$$

$$= (\lambda-2)\left(-(\lambda^2 - 3\lambda - 4) - 6\right) =$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) =$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$\Rightarrow \exists$ два различных с. ч. $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$

2) при $\lambda_1 = 1$ имеем

$(A - \lambda E)X = 0$: $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Гаусса}]{\text{метод}}$

$-\frac{1}{3}\cdot$(3я строка) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = x_3 \\ x_1 = x_2 \end{matrix}$

$\rightsquigarrow$

$\Rightarrow$ пусть $x_3 = a$, тогда $x_1 = x_2 = a$

$\Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} a \quad \forall a \neq 0$

2) при $\lambda_2 = 2$ имеем

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ пусть $x_3 = a_1$, $x_2 = b_1$, тогда

$$-3x_1 = -3x_2 + x_3 = -3b_1 + a_1$$

$$\Rightarrow x_1 = b_1 - \frac{a_1}{3} = b - a, \text{ где } a = \frac{a_1}{3} \Leftrightarrow a_1 = 3a$$

$$\Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} b - a \\ b \\ 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} a$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ и

$a^2 + b^2 \neq 0$

<u>Ответ:</u> при $\lambda_1 = 1$ $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} a$ $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$;

при $\lambda_2 = 2$ $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} a$

$\forall a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0.$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

1. $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (2-\lambda) \cdot \Big(-(1-\lambda) \cdot (1+\lambda) - 2 \cdot 0 \Big) =$

$= (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(2 - \lambda)$

$\Longrightarrow \exists$ три различных собств. числа:

$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 2$

2. $\boxed{\lambda_1 = -1} \Rightarrow (A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, но x_3 – любое, т.е. $x_3 = a$ $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Ответ 1.

$\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} a}$ $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$

3. $\boxed{\lambda_2 = 1} \Rightarrow (A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_2 = 0$ $\quad x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow$ пусть $x_3 = a$, тогда $x_1 = -a$

Ответ 2.

$\boxed{X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} a}$ $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$

4. $\lambda_3 = 2 \Rightarrow (A-\lambda E) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ Пусть $x_2 = -a_1$, тогда $x_3 = 2a_1$.

$2x_1 = -2x_2 - 3x_3 = 2a_1 - 6a_1 = -4a_1$. Пусть $a_1 = -a$, тогда

$\Rightarrow x_1 = -2a_1 = 2a$

ответ 3.

$\Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} a$ $\forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

1. 4.90 – 4.95.

2. 4.134 – 4.142.