Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

Расширенная матрица этой СЛУ:

обозначим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

I. Мне больше всех нравится первая строка:

2 2 -1 1 4 (1)

Хочу, чтобы во второй строке в первом столбце был ноль. Получим его с помощью первой и второй строк: умножим первую строку на(-2) и сложим со второй. Получим:

0 -1 1 0 -2 (2')

мне больше нравится так:

0 1 -1 0 2

Имею право так записать, поскольку это — результат умножения строки (2) на (-1).

Хочу, чтобы в третьей строке в первом столбце был ноль. Для этого умножим первую строку на (-4) и сложим с третьей:

$0 \quad -3 \quad 1 \quad 0 \quad -4 \qquad \Big| \cdot (-1)$

$0 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \quad 4$

Хочу, чтобы в четвёртой строке в первом столбце был ноль. Умножаю первую строку на (-3), четвёртую — на 2 и складываю:

$$0 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0$$

Получилось:

Обозначим:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & +2 \\ 0 & +3 & -1 & 0 & +4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (1) \\ (2') \\ (3') \\ (4') \end{array} \end{array}$$

~~Если~~ Ничего НЕ вижу и повторяю по аналогии:

II. Из нижних трёх строк МНЕ больше всех нравится (2'):

0 1 -1 0 2

Теперь все остальные строки будут оперировать с ней.

Хочу, чтобы в третьей строке во втором столбце был ноль. Для этого умножаю (2') на (−3) и складываю с (3'):

$$\begin{array}{ccccc|l} 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & :2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \end{array}$$

читаем:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -1$$

$$\Longrightarrow x_3 = -1 \quad (*)$$

III. Теперь вижу (читаю) в (4'):

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 0$$

$$x_3 = x_4$$

$$\Longrightarrow \text{из } x_4 = -1$$

С этого момента начался "Обратный ход" метода Гаусса.

IV. Читаю (2'):

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \overset{+1}{\underset{\substack{\| \\ -1}}{- 1 \cdot x_3}} + \overset{0}{\underset{\substack{\| \\ -1}}{0 \cdot x_4}} = 2$$

$$\Longrightarrow x_2 = 2 + (-1) = 1$$

V. Читаю (1):

$$2\cdot x_1 + \underbrace{\underbrace{2\cdot \underset{1}{x_2}}_{2}\ \underbrace{-\,1\cdot \underset{-1}{x_3}}_{1} + \underbrace{1\cdot \underset{-1}{x_4}}_{-1}}_{2} = 4$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}(4-2) = 1$$

Ответ: $$\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Системы линейных уравнений. Общий вид системы из m линейных уравнений с n неизвестными следующий:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1j}x_j + & \dots & +a_{1n}x_n & = & b_1, \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{i1}x_1 + & \dots & +a_{ij}x_j + & \dots & +a_{in}x_n & = & b_i, \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mj}x_j + & \dots & +a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Эту же систему можно записать в компактной матричной форме

$$AX = B,$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$, называемая матрицей системы, $X = (x_j)$ — столбец неизвестных размера $n \times 1$, $B = (b_i)$ — столбец свободных членов размера $m \times 1$.

Если $m = n$, т.е. число неизвестных совпадает с числом уравнений, то матрица системы A будет квадратной. Если к тому же она невырождена и, следовательно, обладает обратной матрицей A^{-1}, то единственное решение системы находится по правилу $X = A^{-1}B$ (в матричной форме), что равносильно правилу Крамера (см. пример 14 ниже).

В общем случае $m \neq n$, т.е. число неизвестных не совпадает с числом уравнений.

Метод Гаусса. Универсальным и достаточно эффективным методом решения системы линейных уравнений является метод элементарных преобразований, часто называемый методом Гаусса.

Пусть имеется система из m линейных уравнений с n неизвестными, записываемая в матричной форме $AX = B$. Рассмотрим расширенную матрицу $(A \mid B)$ размера $m \times (n+1)$.

Элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы (умножение строки матрицы на ненулевое число, перестановка местами любых двух строк матрицы, прибавление к одной строке матрицы другой строки, умноженной на некоторое число) приводим её к виду $(C \mid D)$, где C — ступенчатая матрица, а D — новый столбец свободных членов. Отметим, что при элементарных преобразованиях строк множество решений системы не меняется, поэтому новая система $CX = D$ будет равносильна исходной.

Далее проанализируем уравнения новой системы $CX = D$. Если встретится противоречивое уравнение вида $0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = d_i$, где на самом деле $d_i \neq 0$, то исходная система не имеет решений (несовместна). Если же таких уравнений нет, то система будет совместной.

Пусть теперь система совместна, а ступенчатая матрица C имеет r ненулевых строк (это означает, что ранг матриц A и C равен r). Пусть также c_{1,j_1}, …, c_{r,j_r} — первые ненулевые элементы строк матрицы C. Соответствующие неизвестные x_{j_1}, …, x_{j_r} называются *главными* (или *связанными*) в отличие от остальных $n-r$ неизвестных, которые называются *свободными* и могут принимать любые действительные значения независимо друг от друга.

Например, если

$$(C \mid D) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

то главными неизвестными будут x_1, x_2 и x_5, а неизвестные x_3, x_4 и x_6 будут свободными.

Далее надо, двигаясь по ступенчатой системе «снизу вверх», последовательно выразить главные неизвестные x_{j_r}, …, x_{j_1} через $n-r$ свободных неизвестных. Пусть, например, получилась ступенчатая матрица

$$(C \mid D) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

отвечающая системе

$$\begin{cases} x_1 & -4x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & 7, \\ & x_2 & -3x_3 & +5x_4 & = & 2, \\ & & x_3 & -2x_4 & = & 1. \end{cases}$$

Главными неизвестными будут x_1, x_2, x_3, а свободной неизвестной будет x_4.

Из третьего уравнения выражаем x_3 через x_4, перенося $2x_4$ в правую часть:

$$x_3 = 2x_4 + 1.$$

Из второго уравнения находим x_2, используя только что полученное выражение для x_3, аналогичным образом:

$$x_2 = 3x_3 - 5x_4 + 2 = 3(2x_4 + 1) - 5x_4 + 2 = x_4 + 5.$$

Наконец, из первого уравнения находим x_1:

$$x_1 = 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 7 = 4(x_4 + 5) - 2(2x_4 + 1) - 2x_4 + 7 = \\ = -2x_4 + 25.$$

Свободная неизвестная x_4 может принимать любое значение $t \in \boldsymbol{R}$. Общее решение системы будет выглядет так:

$$\begin{cases} x_1 & = & -2t + 25, \\ x_2 & = & t + 5, \\ x_3 & = & 2t + 1, \\ x_4 & = & t; \qquad t \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Подставляя различные значения параметра t, мы будем получать различные частные решения системы.

Таким образом, мы всегда сможем записать ответ. Главные неизвестные будут выражены через свободные, а свободные неизвестные могут принимать любые действительные значения независимо друг от друга.

Замечание. Система линейных уравнений с действительными коэффициентами либо несовместна, либо имеет единственное решение (если свободных неизвестных нет), либо имеет бесконечное число решений (если имеется хотя бы одна свободная неизвестная).

Пример 2.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \end{pmatrix} & \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \end{matrix} \end{array}$$

I. Мне кажется, что первой строкой нужно назначить последнюю:

1 −1 −4 9 22 (1)

1) (1)·(−1) + (c)·1 :

0 3 4 −13 −25 (2)

2) (1)·(−2) + (b):

0 −1 9 −13 −47 | ·(−1)

(3) (1)·(−3) + (a):

0 1 7 −26 −63

Получили:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 3 & 4 & -13 & -25 \\ 0 & +1 & -9 & +13 & +47 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} (\alpha) \\ (\beta) \\ (\gamma) \\ (\delta) \end{array}$$

II. Назначим второй строкой строку

$$0 \quad +1 \quad -9 \quad 13 \quad 47 \qquad (2')$$

1) $(\gamma)\cdot(-1)+(\delta)$:

$$0 \quad 0 \quad 16 \quad -39 \quad -110 \qquad (3')$$

2) $(2') \cdot (-3) + (3)$:

$0 \quad 0 \quad 31 \quad -52 \quad -166$

Получили:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & -9 & 13 & 47 \\ 0 & 0 & 16 & -39 & -110 \\ 0 & 0 & 31 & -52 & -166 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3') \\ (4') \end{array}$$

$\boxed{III}$. Чтобы в последней строке в третьем столбце получить ноль, сделаем:

$(3')\cdot(-31) + (4')\cdot 16 \Rightarrow$ имеем

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 377 \quad 754$, т.к.

$+39\cdot 31 - 52\cdot 16 = 377$

$+110\cdot 31 - 166\cdot 16 = 754$

"Прямой ход" метода Гаусса заканчивается матрицей:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & -9 & 13 & 47 \\ 0 & 0 & 16 & -39 & -110 \\ 0 & 0 & 0 & 377 & 754 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (1) \\ (2') \\ (3') \\ (4'') \end{array} \end{array}$$

IV. "Обратный ход" метода Гаусса:

Читаем (4''): $377 \cdot x_4 = 754$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x_4 = 2}$$

Читаем (3'): $16 \cdot x_3 \underbrace{- 39 \cdot x_4}_{-78} = -110$

$$\Rightarrow \boxed{x_3 = \frac{1}{16}(\underbrace{78 - 110}_{-32}) = -2}$$

Читаем (2'): $1 \cdot x_2 - 9 \cdot x_3 + 13 \cdot x_4 = 47$

$-2 \quad +18 \quad 2 \quad 26$

44

$\Rightarrow \boxed{x_2 = 47 - 44 = 3}$

Читаем (1): $1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 + 9 \cdot x_4 = 22$

$3 \quad -2 \quad 2$

$-3 \quad +8 \quad +18$

23

$\Rightarrow \boxed{x_1 = 22 - 23 = -1}$

Ответ: $\bar{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Пример 3.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

Здесь нет ничего краше первой строки, поэтому запишем матрицу задачи в виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

1) $(1)\cdot(-7)+(2)\cdot 3 \Longrightarrow$

$(2')$: $\quad 0 \quad 23 \quad -11 \quad -19 \quad 1$

2) $(1)\cdot(-5)+(3)\cdot 3 \Longrightarrow$

$(3')$: $\quad 0 \quad +46 \quad -22 \quad -38 \quad -1 \quad \big| :2$

$\quad 0 \quad 23 \quad -11 \quad -19 \quad -1/2$

$\Longrightarrow$ Получили матрицу:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & -1/2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \varnothing \leftarrow \underline{\underline{\text{Ответ}}}.$$

Если "ничего не вижу", то на следующем шаге $(2')-(3')$:

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\tfrac{1}{2}$$

Читаем: $0 = 3/2$ – неверное утверждение

$\Rightarrow$ **Ответ:** $\varnothing$

Пример 4.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 9\ 7\ {-3} \\ \\ -2\cdot \\ -2 \\ -2 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & +2 & +5 & +8 & +11 \\ 0 & +12 & +9 & +30 & +21 \\ 0 & 16 & 19 & 46 & 43 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ (2)-(1) \\ (-3)\cdot(1)+2\cdot(3) \\ (-7)\cdot(1)+2\cdot(4) \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 21 & 18 & 45 \\ 0 & 0 & 35 & 30 & 75 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ :3 \to 0\ \ 0\ \ 7\ \ 6\ \ 15 \\ :5 \to 0\ \ 0\ \ 7\ \ 6\ \ 15 \end{array}$$

$\Rightarrow$ имеем
$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 15 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1') \\ (2') \\ (3') \\ \\ \\ \end{array}$$

$\Rightarrow \operatorname{rank} A = 3$;

т.к. число неизвестных в задаче $= 4$, то для того, чтобы выписать ответ потребуется один параметр.

"Обратный ход" метода Гаусса:

1) Читаем снизу: (3') $7x_3 + 6x_4 = 15$

Пусть $x_4 = a_1$, тогда

$$x_3 = \frac{1}{7}(15 - 6a_1) = \frac{15}{7} - \frac{6}{7}a_1$$

Переобозначим: пусть $a = \frac{1}{7}a_1 \Leftrightarrow a_1 = 7a$

тогда $\begin{cases} x_4 = 7a \\ x_3 = \frac{15}{7} - 6a \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{R}.$

2) Читаем (2'): $x_2 - x_3 + x_4 = -2$

У нас $x_3 = \frac{15}{7} - 6a$, $x_4 = 7a \Longrightarrow$

$$x_2 = -2 + x_3 - x_4 = -2 + \frac{15}{7} - 6a - 7a =$$

$$= \frac{1}{7} - 13a$$

3) читаем (1'): $2x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5$

$$\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\left(5-2x_2-3x_3-4x_4\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\underbrace{5-\frac{2}{7}+26a-\frac{45}{7}}_{-\frac{12}{7}}+18a-28a\right)=$$

$$=-\frac{6}{7}+8a$$

Ответ: $$X=\begin{pmatrix}-\frac{6}{7}+8a\\ \frac{1}{7}-13a\\ \frac{15}{7}-6a\\ 7a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{6}{7}\\ \frac{1}{7}\\ \frac{15}{7}\\ 0\end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix}8\\-13\\-6\\7\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-6\\1\\15\\0\end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix}8\\-13\\-6\\7\end{pmatrix}\quad\forall a\in\mathbb{R}$$

Пример 5.

$$\begin{array}{c}-2\quad -3\\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & +1 & +2 & +4 & +3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{3} \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \longrightarrow x_4 = 0 \\ \\ \end{array}$$

Читаем:

(2): $x_3 + 4x_5 = 3$

Пусть $x_5 = a$, тогда $x_3 = 3 - 4a$

$\forall a \in \mathbb{R}$

$(1): \; 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_5 = 2$

$2x_1 - x_2 + 3 - 4a + a = 2$

$2x_1 - x_2 = 3a - 1$

Пусть $x_1 = b$, тогда

$x_2 = 2b - 3a + 1 \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} b \\ 2b - 3a + 1 \\ -4a + 3 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$

Домашнее задание:

1. Разобрать, полностью выписав самостоятельно все выкладки, решения примеров из презентации.
2. Научиться решать любой из следующих номеров – 3.**198**, 3.**199**,3.**201**, 3.**202**, 3.**203**, 3.**206**, 3.**207**, 3.**209**,3.**210**, 3.**212**, 3.**213**, 3.**214**,3.**215**.