

Матрицы и определители

Матрицей называется любая таблица, состоящая из m строк и n столбцов. Размер такой матрицы — $m \times n$, т.к. число элементов в ней равняется $m \times n$.

Числовой матрицей называется таблица, состоящая из чисел.

Матрицы можно складывать и вычитать только тогда, когда они одинакового размера.

Пусть заданы матрицы $A_{m \times n}$ и $B_{m \times n}$.

Суммой этих матриц называется матрица $C_{m \times n}$,
в которой каждый элемент получается в
результате сложения соответствующих элементов
матриц A и B : $C_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} A_{ij} + B_{ij}$

$$\forall i = 1, \dots, m,$$

$$j = 1, \dots, n.$$

Пример:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 9 & 8 \\ 8 & 12 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

В основе определения умножения двух матриц лежит скалярное произведение векторов.

В школе было: пусть вектор $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$ и вектор $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$.

Тогда $(\vec{X}; \vec{Y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.
 $\Rightarrow$ есть число, т.е. скаляр.

В линейной алгебре рассматриваются n -мерные пространства векторов-строк и векторов-столбцов:

пусть вектор X - вектор-строка $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и вектор Y - вектор-столбец $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Тогда ^{их} скалярным произведением назовём число, кот. получается по школьному правилу

$$(X; Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Важно: число координат у X и Y должно быть одинаковым.

Отсюда следует требование для умножения матриц: число столбцов в первой матрице = числу строк во второй.

$$A_{m \times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}$$

$$B_{k \times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_{m \times n} \stackrel{\text{def}}{=} A_{m \times k} \times B_{k \times n}, \text{ где } C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} \\ = \sum_{l=1}^k a_{il}b_{lj}$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}_{(2 \times 2)} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}_{(2 \times 2)} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5 & 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2 \\ 3 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 7 & 5 \cdot 4 - 4 \cdot 5 = 0 \end{pmatrix}_{(2 \times 2)} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

$$(4 \ 0 \ -2 \ 3 \ 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (5) + 1 \cdot 2 =$$

$$= 31$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (4 \ 0 \ -2 \ 3 \ 1) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 9 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5 \\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

(5×1)
 (1×5)
 (5×5)

Вычислить $A \cdot A^t$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

$$1) A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2) A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 4 & 43 \end{pmatrix}$$

Дома:

$$A^t \cdot A = ?$$

Вычисление определителей примеры

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 - (-5) \cdot 4 = 18$$

т.к. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +3 & -4 & +5 \\ -8 & +7 & -2 \\ +2 & -1 & +8 \end{vmatrix} =$$

знак = $(-1)^{i+j}$

Раскладываем по первой строке:

$$= +3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}}_{\text{минор } 1,2} - 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}_{\text{минор } 1,3} + (-5) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{\text{минор } 1,1}$$

$$= \underbrace{3 \cdot (56 - 2)}_{+162} - \underbrace{4 \cdot (64 + 4)}_{-272} - \underbrace{5 \cdot (-8 - 14)}_{+110} = 0$$

$$\det A = \begin{vmatrix} +2 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Мне больше всех нравится
четвертый столбец, т.к. в нём
два нуля $\Rightarrow$

Разложим этот определитель по
четвёртому столбцу:

$$\begin{aligned} \star) &= \underbrace{-0 \cdot \begin{vmatrix} | & | \end{vmatrix}}_{=0} + (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}_{\Delta_1} - \underbrace{0 \cdot \begin{vmatrix} | & | \end{vmatrix}}_{=0} + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{\Delta_2} \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} & 1 \\ 3 & \overset{+}{-1} & 2 \\ 3 & \overset{-}{1} & 6 \end{vmatrix} = \begin{matrix} -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \text{по второму} \\ \text{столбцу} \end{matrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{(18-6)}_{12} - \underbrace{(12-3)}_9 - \underbrace{(4-3)}_1 = \boxed{2}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \overset{+}{2} & -1 & 1 \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{1} & \overset{-}{2} \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{по} \\ \text{второй} \\ \text{строке} \end{matrix} - 0 + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}_{4-3=1} - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}_{-2+3=-2}$$

$$= \boxed{-1}$$

$$\Rightarrow \det A \stackrel{(*)}{=} 0 - 2 - 0 - 1 = -3$$

Правило Крамера

Пусть $A_{n \times n} X = B$.

Тогда: ① если $\det A \neq 0$, то $\exists!$ решение системы, которое можно найти по формулам:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}, \text{ где } \Delta_i - \text{определитель матрицы, в которой вместо } i\text{-го столбца стоит столбец свободных членов.}$$

② если $\det A = 0$, то $\exists$ либо бесконечное множество решений, либо ни одного.

Пример. Решить систему
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = -3 \end{cases}$$

1.
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{по третьей} \\ \text{= столбцу} \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$= +1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}_{11} - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}_{13} = -2 \neq 0$$

$\Downarrow$
 $\exists$ решение.

2.
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & +1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{по третьей} \\ \text{= строке} \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$= -3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & +1 \end{vmatrix}}_{+3} - 5 \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & +1 \end{vmatrix}}_{-1} = -4$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-4}{-2} = 2$$

3.
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{2}{-2} = -1$$

4.
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}}_{-27} - 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}_{-12} + 5 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}_{11} = -2$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{-2}{-2} = 1$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

- 1. a) 3.79, 3.80, 3.82, 3.85, 3.103;
b) 3.150 – 3.154.**
- 2. 3.50, 3.51, 3.52, 3.53, 3.56, 3.57.**
- 3. 3.190, 3.191, 3.192, 3.193.**