# *Математика первых веков Новой эры*

## НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ В ДРЕВНЕГРЕЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКЕ

В теоретических сочинениях V–III вв. до н.э. встречаются два вида неопределенных уравнений: пифагорово уравнение и уравнение Пелля $x^2 - Ny^2 = 1$, где $N$ – целое неквадратное число. В обоих случаях речь идет об отыскании целых положительных решений.

Формулы пифагорейских троек предлагали ранние пифагорейцы, Платон, самое общее решение содержится в «Началах» Евклида.

Уравнение Пелля для $N=2$ рассматривается в «Началах», где доказывается, что из одного решения уравнения $y^2 = 2x^2 \pm 1$ можно получить новое решение по формулам

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \qquad y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}.$$

Архимед в письме к александрийским ученым поставил свою знаменитую «**задачу о быках**», которая сводится к уравнению Пелля при $N$ = 410 286 423 278 424. Наименьшее решение этого уравнения записывается в десятичной позиционной системе с помощью 206 545 цифр, т.е. выписать его практически невозможно. Архимеда интересовал, не ответ, а общий алгоритм нахождения наименьшего решения этого уравнения.

Творчество Евклида, Архимеда и Аполлония было вершиной античной математики. После Аполлония начался **спад**. Все исследования, которые проводились в последующие два столетия, не выходили из описанного круга проблем. Среди них не встречается ни новых идей, ни новых теорий.

Во второй половине 1 века до н.э. исследования по математике практически прекращаются, наступает **перерыв в передаче научной традиции**.

## Причины затухания развития математики в I в. до н.э.

I. **Внутренние**: Диспропорция между высоким уровнем теории и низким уровнем математического аппарата (арифметико-алгебраический аппарат не развит, нужны новые функции, новые соотношения, геометрическая алгебра и ее принцип однородности сковывают развитие науки)

II. **Внешние**: 1. Разрушительные войны с середины II в. до н.э.:
   1) Пунические войны (Рим и Карфаген)
   2) войны Рима с Малой Азией
   3) падение Египта

   Великие прежде страны потеряли независимость, везде – провинции Рима.

   2. Гражданские войны в Римской империи.

Экономическая и культурная жизнь в эллинистических странах замерла. Измученные страданиями и горем люди потянулись к мистике Востока, к религии, которая обещала другую, лучшую жизнь. Абстрактное мышление, логические рассуждения отодвинулись на второй план.

В диалоге Цицерона “О государстве” один из участников предлагает обсудить вопрос о том, **почему на небе были видны два Солнца**. Но эта тема отвергается, так как “если мы по этому вопросу и приобретаем величайшие познания, все же **благодаря этим знаниям не сможем стать ни лучше, ни счастливее**”.

**II–I вв. до н.э.** стали временем стремительного возвышения Рима. В 30-м г. до н.э. пало последнее из эллинистических государств – Египет, и была основана Римская империя. В результате этого положение бывших государств коренным образом меняется: прекращаются разорительные войны и прямой разбой, что приводит к более устойчивому экономическому положению. **Греческая наука оживает**.

**В первые века нашей эры Александрия остается научным и культурным центром древнего мира.**

Рим никогда не мог сравниться с ней в этом отношении. Он так и не приобщился к глубинам эллинской мысли. Практическому складу римского ума стремление к теоретическому познанию, столь характерное для греческой научной мысли, было чуждо. Из среды римлян не вышло ни одного сколько-нибудь значительного математика или физика, хотя Рим дал миру великолепных поэтов, замечательных историков, блестящих ораторов.

Наиболее глубоким умом, которого породила римская культура, был Цицерон: «*Римляне в отличие от греков не ценили геометрии; они ограничивали ее, как и арифметику, узкопрактическими знаниями. Математика вообще не была у них в почете. Даже денежными расчетами и межеванием земель, как и астрономическими наблюдениями, должны были заниматься не римляне, а греки, сирийцы и другие покоренные народы*». **Цицерон** «Тускуланские беседы».

*Александр* ***БЛОК***. **Катилина**.

… Он посвятил, наконец, большую часть своей жизни своей серенькой философии, которой он предавался в виде отдыха от государственных забот. Это была эклектическая философия, никому не обидная, принаровленная к потребностям Рима: немножко теории познания — для того, чтобы подчеркнуть скептическое отношение к метафизике; предпочтение морали всем физическим проблемам; центр тяжести — в скромном изяществе изложения; **Цицерон собрал жалкие остатки меда с благоуханных цветов великого греческого мышления; с цветов, беспощадно раздавленных грубым колесом римской телеги**…

***Вергилий***

*Тоньше другие ковать будут жизнью дышащую бронзу,*
*Верю тому, – создадут из мрамора лики живые,*
*Красноречивее будут в судах, движение неба*
*Тростью начертят своей и вычислят звезд восхожденья,*
*Ты же, римлянин, знай, как надо народами править.*

Конец I и II в.н.э. обычно называют **ГРЕЧЕСКИМ ВОЗРОЖДЕНИЕМ**, имея в виду, что это было время жизни и творчества таких великих писателей, как Плутарх и Лукиан.

Такой же расцвет происходил и в естественных науках:

– в I в. в Александрии работал прекрасный математик и талантливый инженер-изобретатель **Герон**, первым открывший движущую силу пара,

– в конце века – математик и астроном **Менелай**, создатель системы геометрии и тригонометрии на сфере (первой неевклидовой геометрии),

– во II в. знаменитый астроном и математик **Клавдий Птолемей**, создавший геоцентрическую модель Солнечной системы, просуществовавшую до XV–XVI вв.

В творчестве этих ученых наметился поворот к вычислительной математике, **к расширению понятия числа, к отказу от геометрической алгебры**. За основу снова берется число, что приводит к **арифметизации математики**, происходит **выделение и самостоятельное построение алгебры**.

## НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ У ГЕРОНА АЛЕКСАНДРИЙСКОГО.

**Герон Александрийский** – инженер, изобретатель, математик и астроном. Преподавал в Мусейоне.

Изобрел ряд пневматических устройств и автоматов (автоматические двери, театр марионеток, автомат для продаж и др.), паровую турбину, некоторые измерительные инструменты (водяные часы, древний одометр для измерения протяженности дорог и др.)

Занимался геометрией, механикой, гидростатикой, оптикой. Писал комментарии к «Началам» Евклида. Составил «***Метрику***» – сборник различных (точных и приближенных) формул для измерения фигур и других вычислений. Доказательства есть не всегда, но всегда являются строгими. Есть цикл задач, эквивалентных неопределенным уравнениям. Появляются первые обозначения для неизвестной величины.

В «Диоптре» описал лунное затмение 62 г. ⇒ жил в I в. н.э.? Также здесь изложены правила земельной съемки в прямоугольных координатах.

Об изобретениях Герона: [https://www.youtube.com/watch?v=Em6mCdU0ykg](https://www.youtube.com/watch?v=Em6mCdU0ykg)

В «Метрике» Герона есть 12 задач, эквивалентных решению систем неопределенных уравнений.

**1**. Найдите два прямоугольника таких, чтобы периметр второго был равен трем периметрам первого, а площадь первого была равна трем площадям второго:

$$\begin{cases} a(x+y) = u + v \\ xy = a\,uv \end{cases}$$ , где *a* = *3*.

Для решения этой задачи Герон предлагает следующее:

| | |
|---|---|
| $3^3 = 27$ | $a^3$ |
| $27 \cdot 2 = 54$ | $2a^3$ |
| $54 - 1 = 53$ и это будет | $2a^3 - 1 = y$ |
| одна сторона прямоугольника. Другая же сторона этого прямоугольника равна 54. | $2a^3 = x$ |
| $53 + 54 = 107$ | $P_1 = x + y$ |
| $107 \cdot 3 = 321$ | $P_1 \cdot a = P_2$ |
| $321 - 3 = 318$ и это сторона второго прямоугольника, другая сторона которого равна 3. | $P_2 - a = u$<br>$a = v$ |

**Каким образом могут быть получены формулы для вычисления *x* и *y* ?**

**Почему *v* = *a*?**

**2**. Найдите два прямоугольника таких, чтобы периметр первого был равен периметру второго, а площадь первого равнялась четырем площадям второго:

$$\begin{cases} x + y = u + v \\ xy = buv \end{cases} \quad b=4$$

Для решения этой задачи Герон предлагает другой алгоритм:

| | |
|---|---|
| $4^3 = 64$; | $b^3$ |
| $4^3 - 1 = 63$ и это – полупериметр обоих прямоугольников; | $b^3 - 1 = P$ |
| $4 - 1 = 3$ и это – сторона второго прямоугольника; | $b - 1 = u$ |
| $63 - 3 = 60$ – другая его сторона; | $P - u = v$ |
| $4 \cdot 4 = 16$; | |
| $16 - 1 = 15$ – сторона первого прямоугольника; | $b^2 - 1 = x$ |
| $63 - 15 = 48$ – его вторая сторона. | $P - x = y$ |

Этот тип задачи можно привести к общему виду с задачей 1:

$$\begin{cases} a(x + y) = u + v \\ xy = b\,uv \end{cases}$$, где $a = 1$, $b = 4$.

Но Герон предлагает совершенно другое решение. **Почему**???

Также непонятно, **почему** в качестве общего полупериметра прямоугольников Герон принимает величину $P = b^3 - 1$.

**Попробуйте ответить на эти вопросы.**

**3.** В прямоугольном треугольнике периметр равен 50 футам. Найти стороны:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y + z = 50 \end{cases}$$

Герон предлагает использовать «пифагоров метод». Сначала рассматривает треугольник 3,4,5, периметр которого 12 футов. Т.к. искомый треугольник имеет периметр 50, то стороны искомого треугольника находятся из подобия. О том, что вместо треугольника 3,4,5 можно взять любой другой прямоугольный треугольник и получить другое решение, Герон не упоминает.

**4.** Площадь прямоугольного треугольника равна 5. Найти его стороны:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ \frac{1}{2}xy = 5 \end{cases}.$$

Пифагоровы тройки:

$$\begin{cases} x = m^2 - n^2 \\ y = 2mn \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}, \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}, \qquad m > n$$

Следовательно, минимальное решение получится при $m = 2, n = 1$ и площадь этого минимального треугольника $S_{min}$ будет равна 12, т.е. предложенная задача 4 не имеет целочисленного решения!

Эта задача представляет особый интерес, поскольку позже в более сложном виде она встречается у Диофанта, у математиков арабского Востока, у Леонардо Пизанского и у Луки Пачоли.

Для решения этой задачи Герон использует утверждение о том, что **площадь прямоугольного треугольника в целых числах кратна 6** (**докажите!!!**). Это важное свойство было доказано Леонардо Пизанским в его «Книге квадратов» в 1225 г..

Поскольку в задаче площадь треугольника равна 5, то стороны искомого не могут быть целыми, и Герон сначала ищет подобный ему треугольник с целочисленными сторонами и площадью $5k^2$ , где $k$ – коэффициент подобия. Площадь этого треугольника должна делиться на 6, а наименьший квадрат, обладающий этим свойством – 36. Поэтому уравнение, определяющее условие на параметры будет иметь вид

$$mn(m^2 - n^2) = 5 \cdot 36 .$$

Правая часть может быть разложена в произведение $4 \cdot 5 \cdot 9$ и, взяв *m=5*, *n=4*, Герон получает вспомогательный треугольник 9, 40, 41, с помощью которого находит решение.

Отметим, что задача нахождения прямоугольного треугольника с рациональными сторонами и заданной площадью может быть сведена к системе уравнений:

$$\begin{cases} z^2 + a = u^2 \\ z^2 - a = v^2 \end{cases}$$

и эту задачу рассматривали математики средневекового Востока, а впоследствии и Леонардо Пизанский.

Решения уравнения $2z^2 = u^2 + v^2$, к которому эту систему легко привести, – знаменитые вавилонские тройки, поэтому весьма вероятно, что Герон опирался на древневавилонскую традицию.

В последующих четырех задачах Герон также занимается поисками прямоугольного треугольника, на который наложены некоторые условия, всегда начиная с треугольника 3,4,5 и нигде не отмечая, что вместо него можно взять любую другую пифагорову тройку.

Задачи 10–13 представляют другой, не менее интересный цикл, для которого существуют различные реконструкции. В современной символике условие задач может быть записано системой:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ \dfrac{1}{2}xy + (x + y + z) = \Delta \end{cases}$$

Решение этой задачи в положительных рациональных числах существует не всегда, но у Герона никакого исследования и никаких указаний на этот счет нет.

В «Арифметике» Диофанта вся книга 6 посвящена задачам на прямоугольные треугольники, однако задач, совпадающих с задачами Герона нет. Интересно, что в своей книге Диофант тоже часто применяет «пифагоров метод» – использование вспомогательного треугольника 3,4,5, но в отличие от Герона не довольствуется только одним решением, а отмечает, что их может быть бесконечно много.