КУБИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ У АРХИМЕДА

(III век до н.э.)

Мы уже отмечали, что задачи, сводящиеся к линейным и квадратным уравнениям, излагаются в «Началах» Евклида в терминах приложения площадей:

К данной прямой ***d*** *приложить прямоугольник, равновеликий заданному* ***ab****:* $dx = ab$.

К данной прямой ***a*** *приложить площадь* ***S*** *так, чтобы избыток (недостаток) был квадратом:* $x(a + x) = S$ ($x(a - x) = S$).

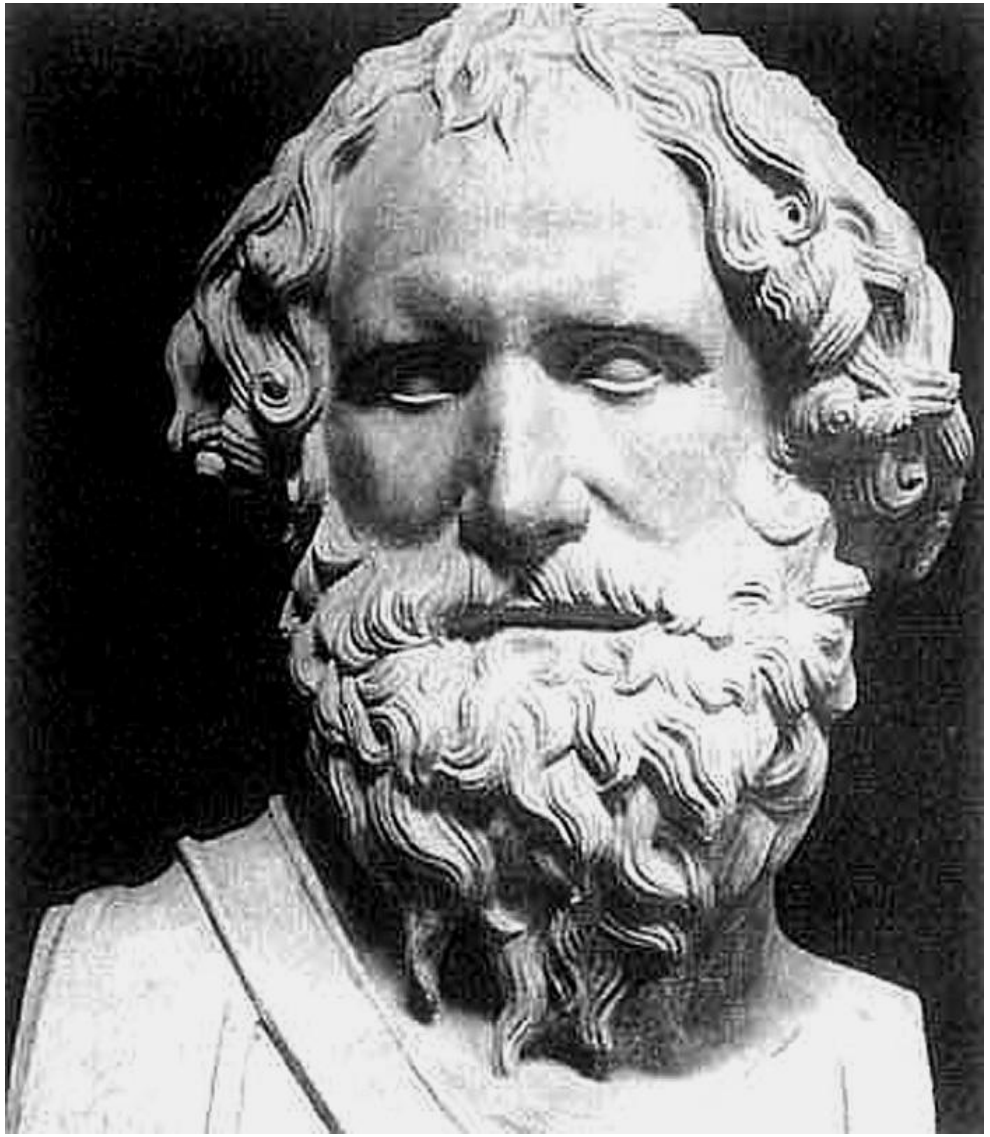
Задачи, эквивалентные решению кубических уравнений, в «Началах» Евклида не встречаются. Однако их можно найти в творчестве Архимеда.

АРХИМЕД
287 до н.э. – 212 до н.э.

Архимеда будут помнить, когда Эсхила забудут, потому что языки умирают, но не математические идеи. Возможно, бессмертие — глупое слово, но, по всей видимости, ***математик*** *имеет наилучший шанс на бессмертие, что бы оно ни означало.*

Готфрид Харолд Харди

АРХИМЕД 287 до н.э. – 212 до н.э.



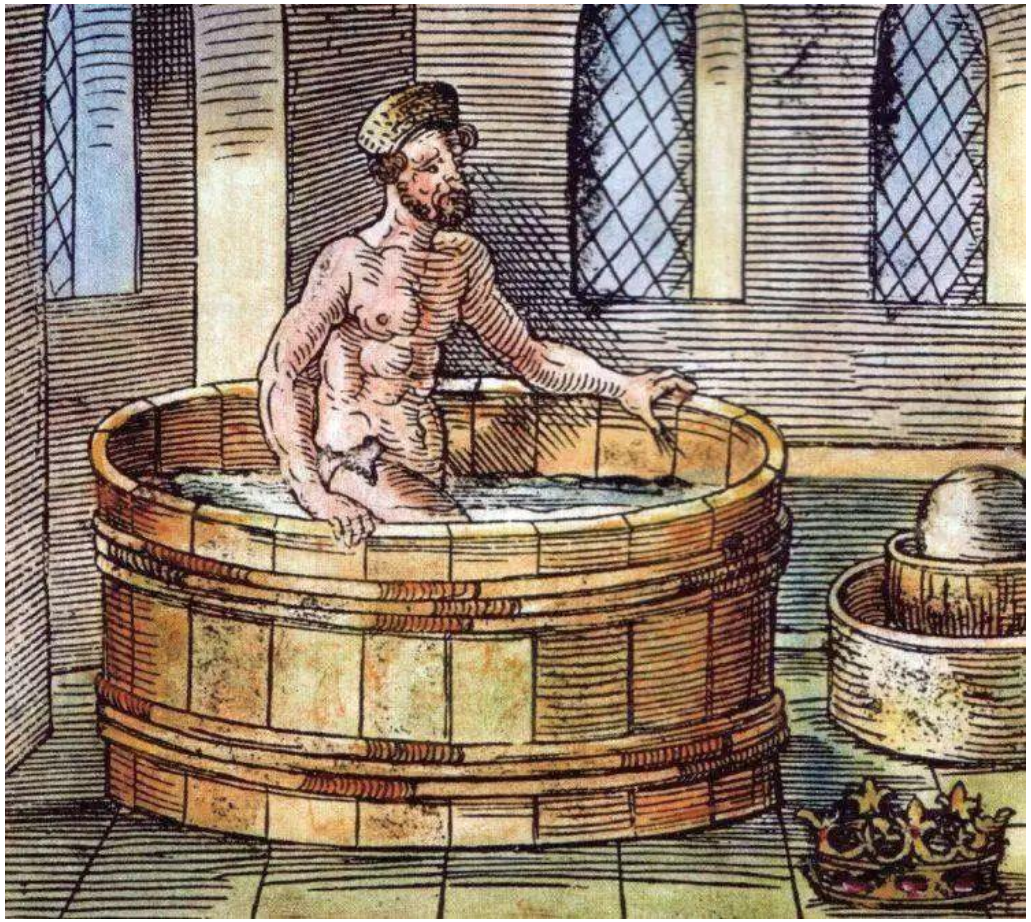
Родился в Сиракузах (Сицилия). Отец – астроном Фидий.

Учился в Александрии.

В древности Архимеду приписывали до 40 открытий в области практической механики, но не все они описаны его биографами и комментаторами, так что некоторые известны лишь по названию, например: **архимедов рычаг, архимедов винт, полиспаст** и др.

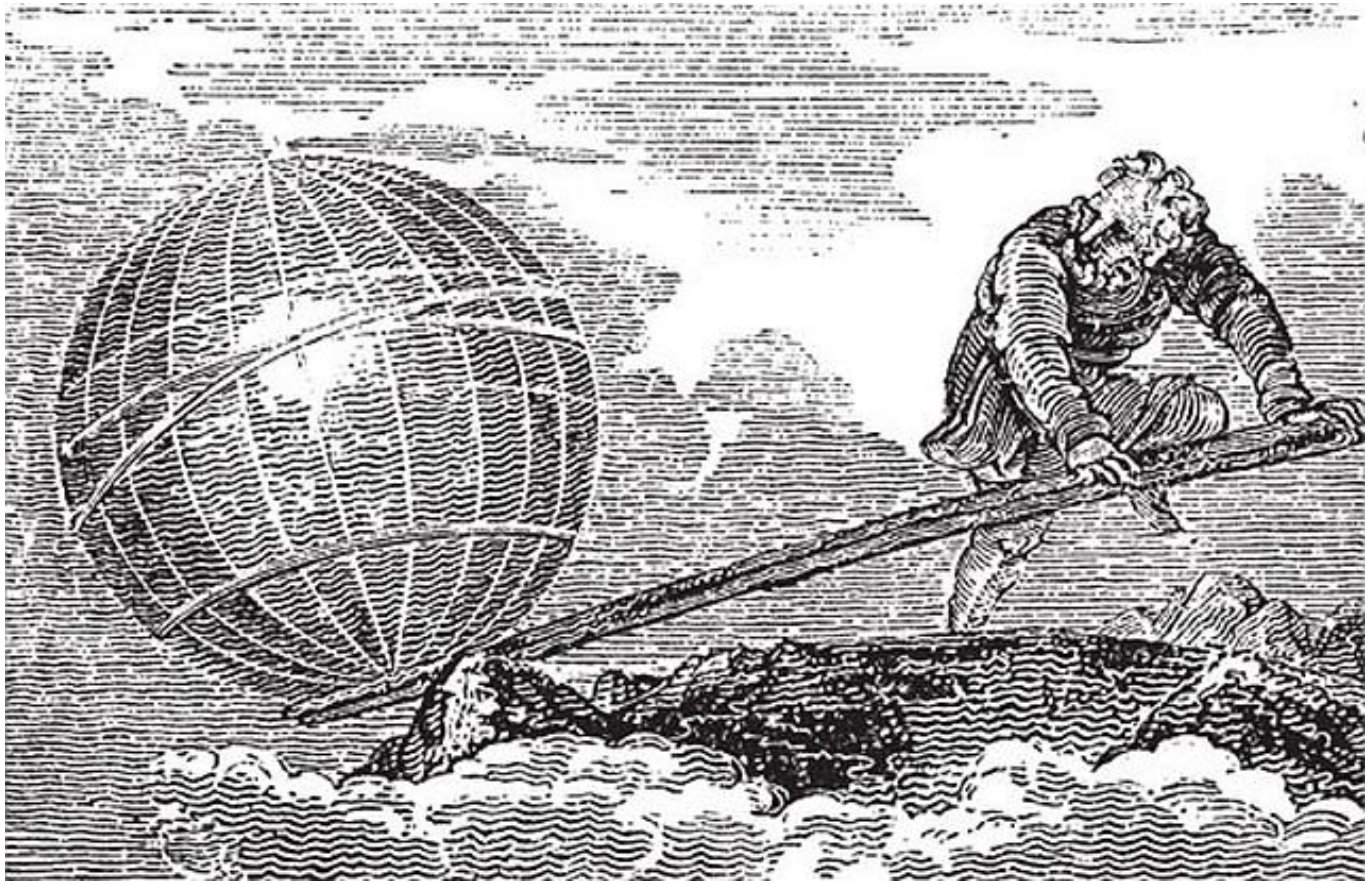
Архимед знал про силу водяных паров и пытался применить ее к орудиям своего века.

Эврика!



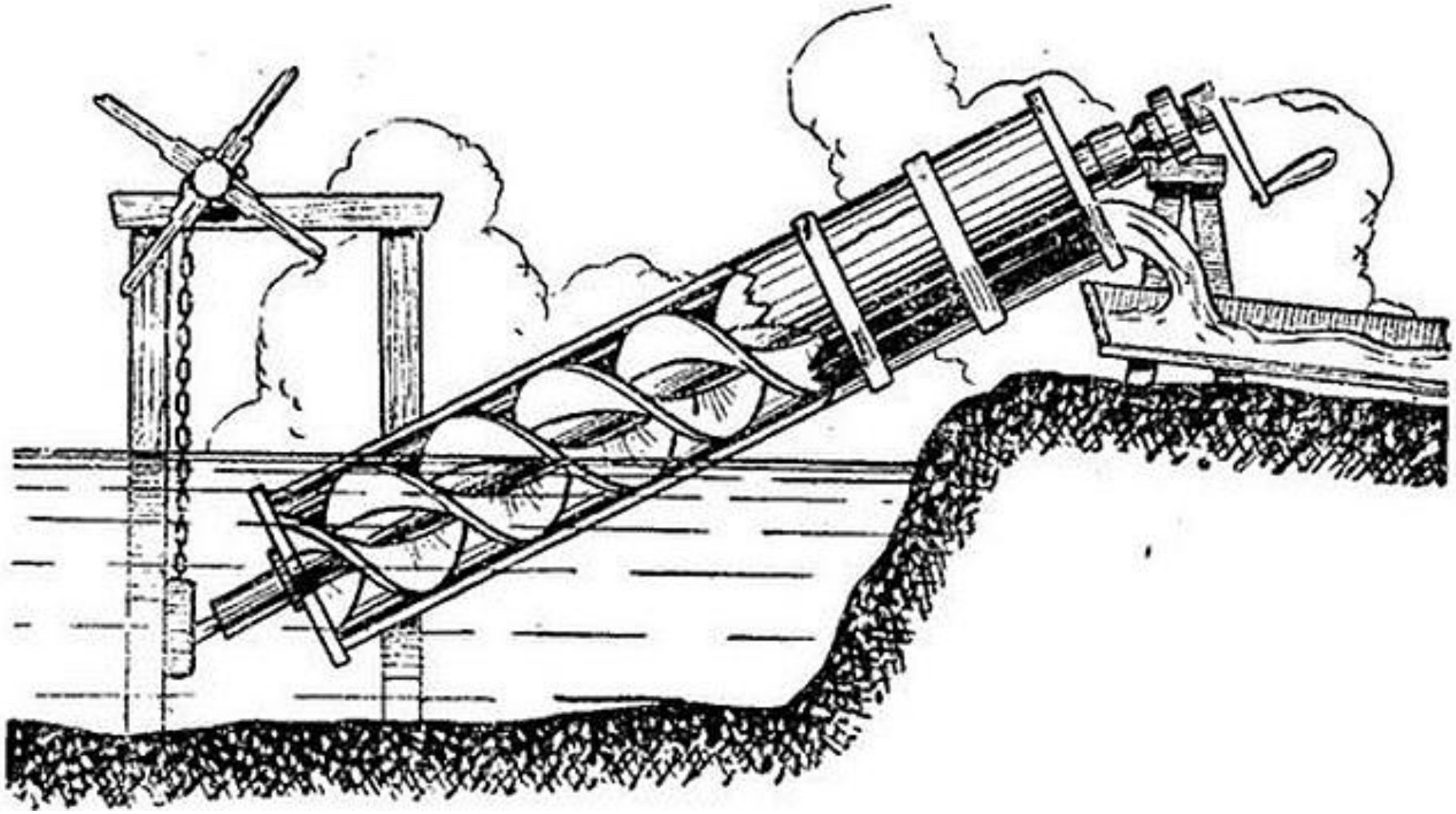
Основной закон гидростатики: корона царя Гиерона была сделана из сплава золота и серебра и имела неправильную форму.

«Дайте мне точку опоры, и я сдвину Землю»



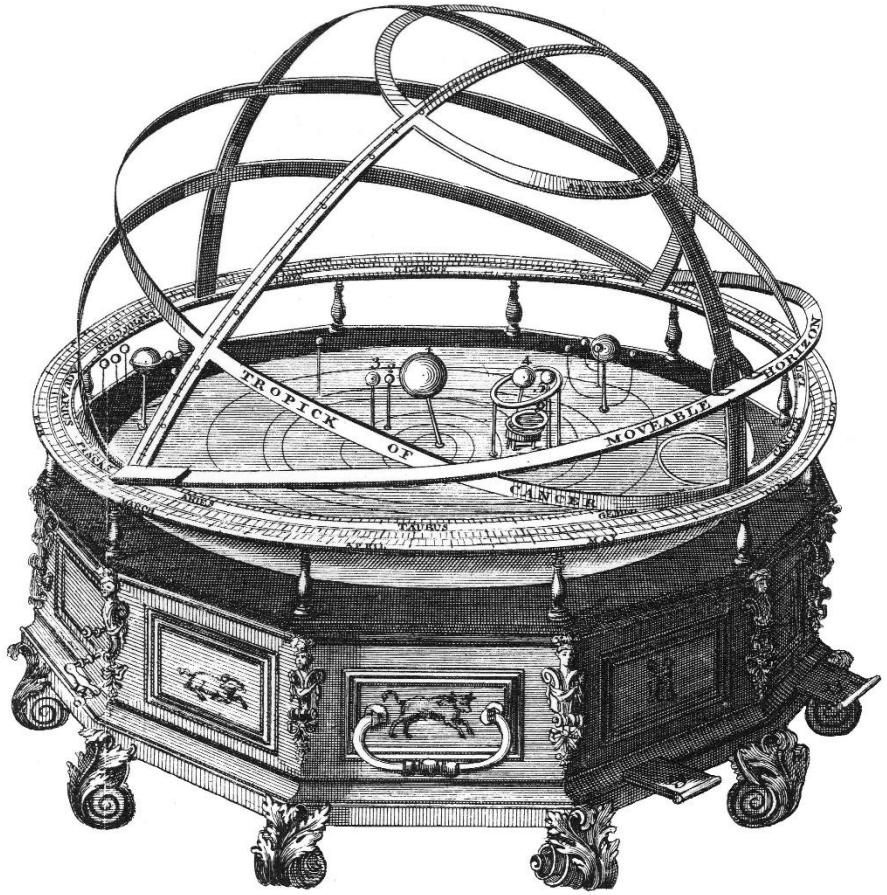
Принцип рычага: корабль «Сиракосия» – подарок царю Птолемею – никак не удавалось спустить на воду. Помогла система блоков – полиспаст.

Бесконечный винт для вычерпывания воды в Египте



Винт Архимеда на ВДНХ

«**Небесная сфера**» (планетарий)



На ней можно было наблюдать движение пяти планет, восход Солнца и Луны, их фазы и затмения, исчезновения за линией горизонта.

Осада Сиракуз римлянами в 212 г. до н.э.

Посвятив себя защите Сиракуз, Архимед стал душой самого упорного и вместе с тем самого искусного сопротивления, о котором говорит история.

По свидетельству **Плутарха** (I в. н.э.), римские солдаты были так напуганы, что "*едва заметив на стене веревку или кусок дерева, они поднимали отчаянный крик и пускались наутек в полной уверенности, что Архимед наводит на них какую-то машину*".

Полибий (II до н.э.) писал: "*Такова чудесная сила одного человека, одного дарования, умело направленного на какое-либо дело… римляне могли бы быстро овладеть городом, если бы кто-либо изъял из среды сиракузян одного старца*".

Плутарх о смерти Архимеда:

"В тот час Архимед внимательно рассматривал какой-то чертеж и, душою и взором погруженный в созерцание, не заметил ни вторжения римлян, ни захвата города, когда вдруг перед ним вырос какой-то воин и объявил ему, что его зовет Марцелл.

Архимед отказался следовать за ним до тех пор, пока не доведет до конца задачу и не отыщет доказательства. Воин рассердился и, выхватив меч, убил его".

В **математике** главное внимание – три типа проблем:

1. ***Определение площадей криволинейных фигур и объемов тел:***

– развил **общий метод**, который лег в основу интегрального исчисления;

– с его помощью **вывел** практически все, что было известно до него + **нашел** поверхность $S_{\text{ш}} = \pi D^2$ и объем **шар**а $V_{\text{ш}} = \frac{\pi D^3}{6}$.

2. ***Построение касательной*** к данной кривой.

Греки умели строить касательную к окружности, эллипсу, гиперболе и параболе. Архимед нашел **общий метод**.

3. ***Определение экстремумов:***

Например, как среди цилиндров, вписанных в шар, найти тот, у которого объем наибольший.

Архимед первым увидел связь с п.2 и показал, как с его помощью решать эти задачи.

Лейбниц: *«Внимательно читая сочинения Архимеда, перестаешь удивляться всем новейшим открытиям геометров»*

Идеи Архимеда почти на 2 тыс. лет опередили свое время. Только в XVII в. они получили свое дальнейшее развитие.

Все сочинения Архимеда – письма к математикам того времени. Иногда Архимед нарочно допускал в них ошибки: *«чтобы тех, которые утверждают, что они все открыли, и не приводят никаких доказательств открытого, можно было уличить или заставить согласиться с тем, что они открыли невозможное».*

Инфинитезимальные методы
в сочинениях Архимеда:

1. О квадратуре параболы.

2. О шаре и цилиндре.

(*Объем шара* $V = \frac{\pi D^3}{6}$, *поверхность шара* $S = \pi D^2$– результат Архимеда, которым он гордился больше всего и даже завещал высечь на могиле шар, вписанный в цилиндр)

3. О коноидах и сфероидах.

4. О спиралях.

5. Измерение круга.

6. Послание Эратосфену о механическом методе. (*Обнаружено в 1906*)

Другие направления математических исследований:

- **В работе 2 «О шаре и цилиндре»** также есть:

– ***геометрический способ решения кубических*** уравнений $x^2(a \pm x)=Sc$ с помощью параболы и гиперболы;

– **полностью исследовал эти уравнения**: когда существуют различные положительные корни, когда они совпадают.

- В работе 5 «Измерение круга» вычислил с большой точностью ***число π:***

$$3 +10/71 < C/D < 3+10/70$$

(использовал вписанные и описанные правильные многоугольники n= 6; 12; 24; 48; 96)

7. ***«О полуправильных телах»***.

8. Отрывки о математической теории популярной игры *стомахии*.

9. ***«Псаммит»*** – построение системы обозначений и названий больших чисел.

10. ***«Правило рычага»***: $d_1r_1 = d_2r_2$

11. ***«О плавающих телах»*** – нашел все устойчивые положения равновесия параболоида вращения.

12. Задача о быках: уравнение Пелля $y^2 - 4729494x^2 = 1$.

В ***арабском переводе*** Сабита ибн Корры (IX в. н.э.):

1. ***«Леммы»*** – в частности, трисекция угла.

2. ***«О семиугольнике»***.

3. ***«О касающихся кругах»***.

4. ***«О параллельных линиях»***.

«О шаре и цилиндре»

Разбить шар заданного объема на два сегмента в заданном отношении:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{m}{n}, m > n.$$

Свел к нахождению высоты *x* бóльшего сегмента, удовлетворяющей условию:

$$\frac{4R^2}{x^2} = \frac{3R-x}{m/(m+n)}.$$

И сразу обобщает: разбить отрезок на две части так, чтобы выполнялось

$$\frac{S}{x^2} = \frac{a-x}{c} \qquad (1)$$

Отмечает, что задача разрешима не всегда (т.к. интересует только положительное решение) и, значит, нужно найти ограничения на параметры: «*задача требует диоризма*».

Исследование Архимеда было утеряно.

Спустя 100 лет Диокл и Дионисидор решили частные случаи этой задачи, но очень сложно и громоздко.

В VI в. н.э. Евтокий нашел рукописи, в которых было исследование общего случая, и теперь именно его **мы приписываем Архимеду**.

От пропорции (1) Архимед переходит к кубическому уравнению, которое формулирует через объемы:

$$x^2(a-x) = c \cdot S = c \cdot bp \qquad (1')$$

Отсюда следует, что положительный корень существует, если правая часть не превышает максимума левой части, а значит, для диоризма нужно найти **экстремум** функции $f(x) = x^2(a-x)$.

Интересно отметить, что здесь вид функции напоминает вид квадратного уравнения, которое исследовали еще пифагорейцы:

$x(a-x) = S$ имеет корни $\Leftrightarrow$ $S \leq a^2/4$.

Сохранился рисунок, на котором изображены различные положения параболы $y = \frac{x^2}{p}$ и гипербола $y = \frac{bc}{a-x}$: $\frac{x^2}{p} = \frac{bc}{a-x}$ (1'')

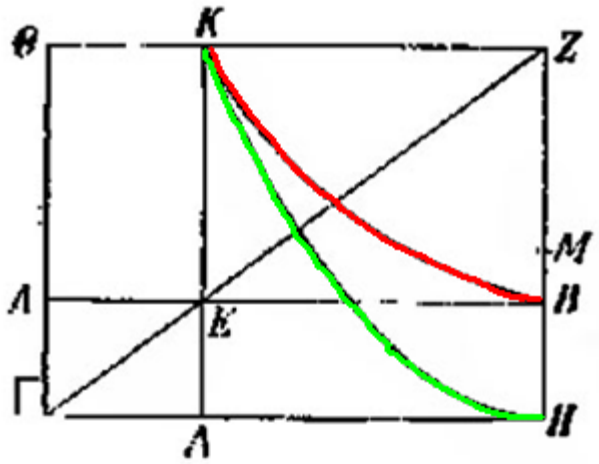
Таким образом, Архимед решает кубическое уравнение с помощью конических сечений и утверждает при этом, что **искомый максимум достигается при** $\boldsymbol{x = \frac{2}{3}a}$, затем доказывая это утверждение с помощью инфинитезимальных методов.

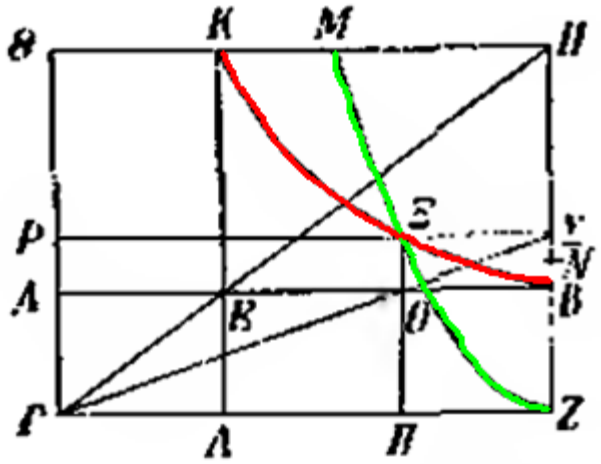
В современных обозначениях **метод Архимеда поиска экстремума** для произведения:

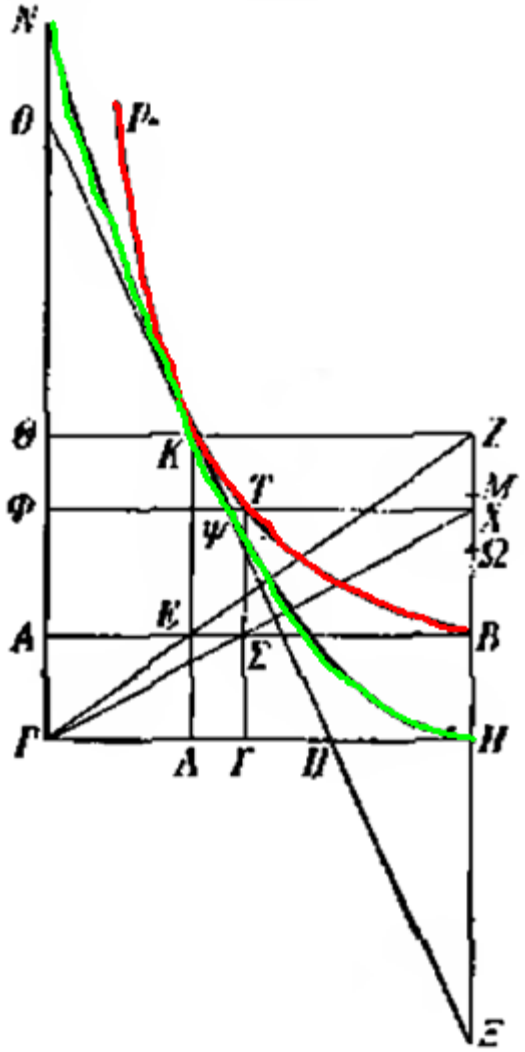
Пусть дано произведение двух функций $x^2(a - x) = c \cdot bp$

и существует экстремальная точка. Тогда в ней, утверждает Архимед, кривые, которые получаются разведением в разные стороны множителей, будут иметь общую касательную.

Чертежи Архимеда, на которых представлены разные случаи расположения получающихся в этой задаче параболы и гиперболы:







Поскольку Архимед отслеживает равенство **отрезков**, то мы могли бы записать соответствующие уравнения кривых в виде: $y = \frac{x^2}{p}$ и $y = \frac{bc}{a-x}$ (ось OX в данном случае направлена влево).

Затем Архимед устанавливает, что при $x = \frac{2}{3}a$ максимальное значение функции $x^2(a - x) = \frac{4}{27}a^3$ и, поскольку у кривых в этом случае есть единственная точка пересечения, то и решение будет единственным.

При $Sc < \frac{4}{27}a^3$ существуют два решения.

При $Sc > \frac{4}{27}a^3$ решений нет.

Затем Архимед показывает, что его первоначальное уравнение решения не имеет.

Такого полного и глубокого анализа не встречается вплоть до 19 века, хотя решение кубического уравнения с помощью конических сечений встречается позже у арабских математиков (например, у Омара Хайяма (1048–1131)).

Кубические уравнения возникают и в работе Архимеда «*О коноидах и сфероидах*»:

в конце письма к Досифею, содержащем эту работу, Архимед сообщает, что с помощью доказанных в нем теорем можно решить ряд задач таких, как:

«*от данного сфероида или коноида отсечь сегмент плоскостью, параллельной данной так, чтобы отсеченный сегмент был равен данному конусу, цилиндру или шару*».

Эти задачи сводятся к кубическим уравнениям, причем для тупоугольного коноида это уравнение выглядит как

$$\boldsymbol{x^2(a \pm x) = Sc}.$$

Из письма Архимеда можно заключить, что он проанализировал и решил это уравнение. Таким образом, мы можем утверждать, что

Архимед рассмотрел кубические уравнения типа $\boldsymbol{x^2(a \pm x) = b}$ и дал методы их решения с помощью конических сечений.

Проблема решения кубических уравнений в радикалах в античности **не ставилась**, а, следовательно, **не могла** сильно **повлиять на развитие алгебры**. **Ситуация изменилась после** появления первых буквенных обозначений и символики в «Арифметике» **Диофанта**.

В творчестве Архимеда встречается также и задача, сводящаяся к решению **неопределенного уравнения** – уравнения Пелля:

Задача о быках.

Эта задача была обнаружена в греческой рукописи, состоящей из стихотворения в 44 строки, хранившейся в библиотеке герцога Августа в Вольфенбюттеле в Германии. Текст задачи был опубликован в Брауншвейге в 1773 г.

Авторство Архимеда сомнений не вызывает, так как и по стилю, и по характеру трактат соответствует математическим эпиграммам той эпохи. Задача Архимеда о быках упоминается в одном из античных схолиев к диалогу Платона «Хармид, или О благоразумии». Она адресована Эратосфену Киренскому и другим математикам Александрии.

В задаче требуется узнать число быков и коров в четырёх стадах, принадлежащих богу Солнца Гелиосу.

Условие задачи Архимеда состоит из двух частей. Первая часть приводит к решению в натуральных числах системы из семи линейных уравнений с восемью неизвестными. К этой части Архимед даёт такой комментарий:

Сколько у Солнца быков, чужестранец, коль точно ты скажешь,
Нам раздельно назвав тучных быков число,
Так же раздельно коров, сколько каждого цвета их было,
Не назовёт хоть никто в числах невеждой тебя,
***Всё ж к мудрецам причислен не будешь**.*

Тем самым Архимед показывает, что первая часть представляет не очень сложную задачу. Гораздо больший интерес представляет вторая часть задачи о быках.

Сколько у Солнца быков, найди для меня, чужестранец.
(Ты их, подумав, считай, мудрости если не чужд.)

Как на полях Тринакрийской Сицилии острова тучных
Их в четырех стадах много когда-то паслось.

Цветом стада различались: блистало одно млечно-белым,
Темной морской волны стада другого был цвет,
Рыжим третие было, последнее пестрым. И в каждом
Стаде была самцов множеством тяжкая мощь,

Все же храня соразмерность такую: представь, чужестранец,
Белых число быков в точности было равно
Темных быков половине и трети и полностью рыжим;

Темных число быков четверти было равно
Пестрых с прибавлением пятой и также полностью рыжим;

Пестрой же шерсти быков так созерцай число:
Части шестой и седьмой от стада быков серебристых
Также и рыжим всем ты их число поравняй.

В тех же стадах коров было столько: число белошерстных
В точности было равно темного стада всего
Части четвертой и третьей, коль сложишь ты обе их вместе;

Темных число же коров части четвертой опять
Пестрого стада равнялось, коль пятую долю добавишь
И туда же быков в общее стадо причешь.

Те же, чья пестрая шерсть, равночисленны множеством были
Рыжего стада частям пятой и с нею шестой.

Рыжих коров же считалось количество равным полтрети
Белого сада всего с частию взятой седьмой.

Сколько у Солнца быков, чужестранец, коль точно ты
скажешь,
Нам раздельно назвав тучных быков число,
Также раздельно коров, сколько каждого цвета их было,
Не назовет хоть никто в числах невеждой тебя,
Все ж к мудрецам причислен не будешь.
Учти же, пожалуй,
Свойства такие еще Солнца быков числа.

Если быков среброшерстных ты с темными вместе смешаешь
Так, чтобы тесно они стали бы в ширь и в длину
Мерою равной, тогда на обширных полях Сицилийских
Плотным квадратом они площадь большую займут.

Если же рыжих и пестрых в одно ты смешаешь стадо,
Лесенкой станут они, счет с единицы начав,
Так что фигуру они треугольную нам образуют;

Цвета иного быков нам нет нужды добавлять.

Если ты найдешь, чужестранец, умом пораскинув,
И сможешь точно назвать каждого стада число,
То уходи, возгордившись победой, и будет считаться,
Что в этой мудрости ты все до конца превзошел.

Первая попытка решить эту задачу была опубликована в **1880** г. немецкими математиками Амтором и Крумбигелем. Решив соответствующую неопределенную систему уравнений, они нашли, что

число белых быков	10 366 482 *n*,	белых коров	7 206 360 *n*,
черных быков	7 460 514 *n*,	черных коров	4 893 246 *n*,
рыжих быков	4 149 387 *n*,	рыжих коров	5 439 213 *n*,
пестрых быков	7 358 060 *n*,	пестрых коров	3 515 820 *n*,

где n – любое положительное число.

Дополнительные условия из второй части требуют, чтобы общее число белых и черных быков было квадратным, а число желтых и пестрых быков было треугольным.

Напомним, что треугольными называются числа, полученные суммированием последовательных натуральных чисел, начиная с единицы; k-ое треугольное число равно $k(k + 1)/2$.

Наименьшее решение неопределённой системы первой части получается при n=1, поэтому приходим к требованию *найти такое квадратное число, которое, будучи взято M = 51 285 802 909 803 раз, окажется равным некоторому треугольному числу*

(или на языке уравнений: $\boldsymbol{Mx^2 = k(k + 1)/2}$).

О сложности решения второй части задачи Архимед говорит так:

Если ты это найдёшь, чужестранец, умом пораскинув,
И сможешь точно назвать каждого стада число,
То уходи, возгордившись победой, и будет считаться,
Что ***в этой мудрости ты всё до конца превзошёл***.

«*Найти такое квадратное число, которое, будучи взято M раз, окажется равным некоторому треугольному числу*» в современных обозначениях можно привести к уравнению вида

$$\boldsymbol{y^2 = Nx^2 + 1}. \qquad (2)$$

Действительно, обозначим сторону искомого квадратного числа за x, сторону искомого треугольного числа за k. По условию

$$Mx^2 = k(k + 1)/2.$$

Нетрудно видеть, что восемь треугольных чисел с добавлением единицы

$$8Mx^2 + 1 = 4k(k + 1) + 1 = (2k + 1)^2 = y^2$$

дают квадратное число со стороной $y = 2k + 1$.

Таким образом, необходимо найти хотя бы одно целочисленное решение уравнения

$$y^2 = Nx^2 + 1$$

при $N = 8M = 410\,286\,423\,278\,424$.

Крумбигель и Амтор обнаружили, что наименьшие целые числа, удовлетворяющие этому уравнению, приводят к общему количеству крупного рогатого скота, выраженному целым числом из 206 545 цифр, которое начинается с цифр 776.

В докомпьютерную эру задача Архимеда рассматривалась в качестве примера такой задачи, которая хотя и имеет решение, но физически не может быть решена.

Первое полное компьютерное решение задачи Архимеда было получено в 1965, для чего потребовалось 7 часов 49 минут работы вычислительной машины IBM 7040. Компьютер Cray 1 проделал ту же работу в 1981 за 10 минут. Существенно более быстрые вычислительные алгоритмы для решения задачи Архимеда были разработаны Айланом Варди (1998, США) и Антти Нюгреном (2001, Финляндия). Формулы последнего используют только целочисленную арифметику и требуют всего нескольких секунд работы персонального компьютера Pentium II.

Первые и последние пятьдесят цифр наименьшего решения:

7760271406486818269530232833213886664232324059233

. . .

05994630144292500354883118973723406626719455081800

https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Cattle/Solution2.html

Надо думать, что Архимед, предлагая задачу о быках Эратосфену и другим александрийским математикам, отдавал себе отчёт в её непосильности, ведь он сам тоже не был способен выписать её ответ!

Естественно предположить, что он поставил эту задачу не ради того, чтобы продемонстрировать своё превосходство, а **для обсуждения общего метода решения уравнений** вида (2), которым он сам владел и изложения которого он ожидал от александрийских математиков, пусть и на более простых примерах, требующих разумного объёма выкладок.

К сожалению, мы не знаем ни того, как решал это уравнение сам Архимед, ни того, получил ли он какой-нибудь ответ от Эратосфена.

В дошедших до нас античных математических текстах общие подходы к решению уравнения (2) нигде не обсуждаются.

Диофант Александрийский (III в. н.э.) в своей “Арифметике” рассматривает частные случаи уравнения (1) для *N* = 26 (Книга V, задача 9) и *N* = 30 (Книга V, задача 11) и находит наименьшее решение **с помощью специального приёма**:

Пусть $\boldsymbol{N = n^2 + m}$, где *n* — наибольшее число, квадрат которого не превосходит *N*. Тогда можно использовать подстановку $\boldsymbol{y = nx + 1}$:

(1): $$(nx + 1)^2 = (n^2 + m)x^2 + 1$$

или $$n^2x^2 + \boldsymbol{2nx} + 1 = n^2x^2 + \boldsymbol{mx} + 1,$$

что даёт ответ $\boldsymbol{x = 2n/m}$.

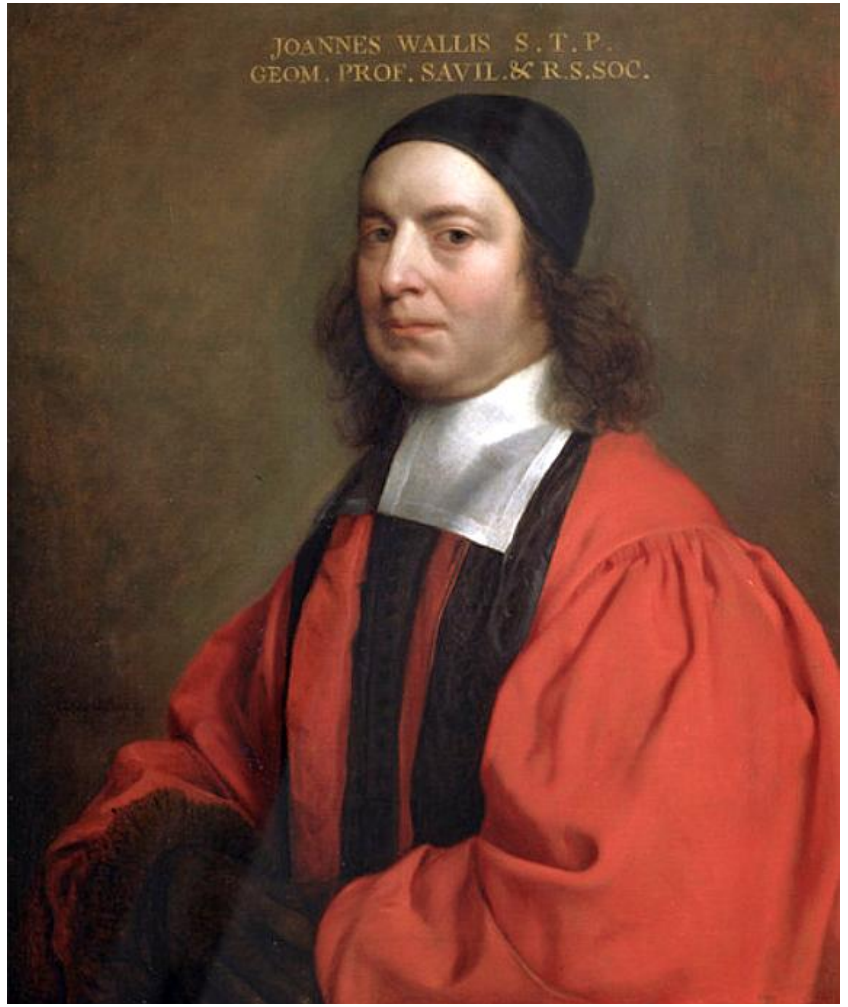
Этот частный приём не слишком много говорит нам о том, как древнегреческие математики могли решать уравнение (1) при произвольном *N*.

История уравнения (1) в Новое время начинается с вызова, который **Пьер Ферма** (1601–1665) бросил в 1657 современным ему математикам:

«*Пусть дано любое неквадратное число, требуется найти бесконечное число квадратов, которые при умножении на данное число и увеличении на единицу составят квадрат...*

Найти, например, квадрат, который при умножении на 149, или 109, или 433 и при увеличении на единицу составит квадрат».

Этот вызов приняли английские математики **Уильям Броункер** (1620–1684) и **Джон Валлис** (1616–1703), представившие свои решения.



Как решали уравнение (1) Ферма и Броункер, мы в точности не знаем. Методы, применявшиеся Валлисом, рассмотрены учеником И.Г. Башмаковой А.А. Антроповым.

С уравнением (1) связан известный исторический курьёз — Леонард Эйлер по ошибке назвал его ***уравнением Пелля,*** хотя английский математик Джон Пелль (1611–1685) никогда этим уравнением не занимался, правильнее было бы назвать его ***уравнением Ферма.*** Однако в математической литературе закрепилось неправильное название.

Общую историю уравнения Пелля рассматривали Леонард Диксон (1874–1954) и Андре Вейль (1906–1998).

Так называемый циклический метод, с помощью которого за тысячу лет до Ферма и его современников **уравнение Пелля решали математики древней Индии**, рассмотрен в статье Б. Л. ван дер Вардена «Уравнение Пелля в математике греков и индийцев» (*УМН*. 1976. Т.31. Вып. 5(191). С. 57–70).

Bartel Leendert Van der Waerden

(1903–1996)