

МАТЕМАТИКА В ЭПОХУ ЭЛЛИНИЗМА

330е г. до н.э. – 30 гг. до н.э.



Новая эпоха античного мира

началась с завоеваний Александра Македонского, который, продолжая дело своего отца — знаменитого полководца Филиппа, перенес войну за пределы Греции и за 332-323 гг. до н. э. покорил Египет, Вавилон, Персию, Согдиану и Бактрию, и даже часть Индии до реки Инда.

После смерти Александра его огромная империя распалась, полководцы Александра разделили между собой его завоевания: под властью Птолемеев оказался Египет, Месопотамия и Сирия — под властью Селевкидов, Македония — под властью Антигона и его преемников. Даже в долине Инда были греческие князья.

Так в истории человечества началась **эпоха эллинизма**, продлившаяся до 30 гг. до н. э., когда Египет — последняя греческая колония — покорилась римлянам.



Характерной чертой этой эпохи было подражание эллинским образцам во всем — в искусстве, в науке, в культуре.

Государственным языком был греческий. Ученые разных стран легко общались и воспринимали традиции, сохранившиеся в науке этих, ранее обособленных, стран, но обычные люди не понимали этого языка, на котором велись научные разговоры или создавались литературные произведения.

Если в древней Греции научные проблемы пользовались большой популярностью, то в Александрии дело обстояло иначе — основная часть населения — египтяне — не понимала греческого языка. Эта изоляция губительно сказалась на художественной литературе. Ничего сравнимого с трагедиями Эсхила, Софокла и Еврипида или с комедиями Аристофана создано не было.

Развивались филология, критические и исторические исследования. И особенный расцвет в III—II вв. до н. э. получили точные науки.

Птолемей I Сотер основал знаменитый **Музейон** — храм Муз, покровительниц науки и искусства, ставший высшим культурным и научным учреждением, центром научной мысли эпохи эллинизма.

Отличия Музейона от древнегреческих школ:

- поддержка государством + жалование (и, как следствие, появление профессоров — профессиональных преподавателей). Академия Платона, Ликей Аристотеля — независимы от правителей;
- лишен самостоятельности: главный жрец назначается Птолемеем;
- огромная библиотека \Rightarrow основа обучения — книга;
- изоляция от основной массы населения (язык науки — греческий).

В III—II вв. до н. э. особенный **расцвет** получили **точные науки**:

- **астрономия**: в результате синтеза достижений греческих и вавилонских ученых (первые греческие астрономические теории и модели солнечной системы и вавилонские таблицы астрономических наблюдений) возникают новые модели Вселенной. Так, **Аполлоний** для объяснения видимого движения планет построил **теорию эпициклов и эксцентрических окружностей**, на основе которых позже **Гиппарх и Клавдий Птолемей** создали **геоцентрическую систему мира**.
- **статика и гидростатика**: **Архимед** применил математические методы и построил с их помощью начала этих наук.
- **геометрическая оптика** развивалась в работах **Евклида, Архимеда и Аполлония**.
- Евклид занимался **теорией музыки**.
- **география**: ученый энциклопедист **Эратосфен** из Кирены (математик, географ, историк, филолог и поэт — пентатлос=пятиборец, III в. до н. э.) сделал новое измерение длины градуса меридиана, что позволило установить более точные размеры Земли.

Рафаэль САНТИ. **АФИНСКАЯ ШКОЛА.** 1509–1511.

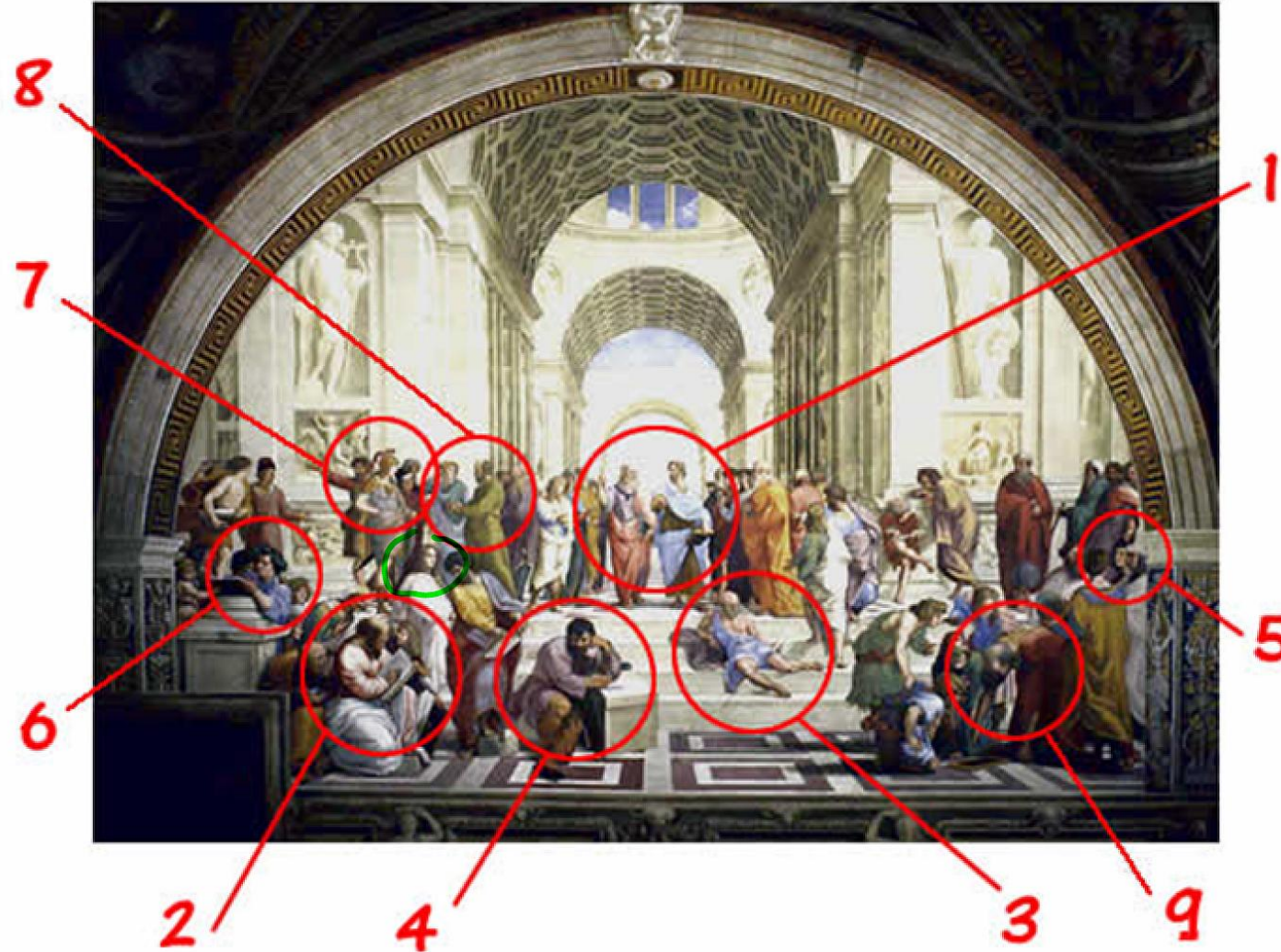
Название «Афинская школа» придумал Джованни Пьетро Беллори в 1672.





The School of Athens
by Raphael

Станца делла Сеньятура. Фреска в кабинете Папы римского



1 – Леонардо да Винчи в образе Платона и Аристотель; 2 – Пифагор; 3 – Диоген Синопский;
4 – Микеланджело в образе Гераклита; 5 – автопортрет; 6 – Эпикур; 7 – Александр Македонский;
8 – Сократ; 9 – Евклид или Архимед со студентами; 10 – Гипатия.

ЕВКЛИД

IV в. до н.э.

Математическое творчество Евклида

1. **“Начала”**
2. **“Ложные заключения”** — посвящено логическим основам математики. (До нас не дошло).
3. **“Данные”** — каково должно быть минимальное число заданных величин, чтобы задача стала определенной. (Дошло в отрывках)
4. **“Конические сечения”** (не дошло).
5. **“Феномена”** — элементарная сферическая астрономия.
6. **“Оптика”** — учение о перспективе.
7. **“Сечение канона”** — теория музыки.

НАЧАЛА

Прокл (V в.н.э.): составляя “Начала”, Евклид “включил в них многое из Евдокса, усовершенствовал многое из Теэтета и дал неопровержимые доказательства того, что его предшественники показали нестрого”.

«Начала» нельзя называть полной энциклопедией античной математики. В них **не вошли** три знаменитые задачи древности, теоремы о “квадрируемых луночках” Гиппократы Хиосского. Нет упоминания о конических сечениях. Не рассматриваются вопросы приближенных вычислений.

Цель Евклида была иной – **дать описание тех главных элементов**, или **начал**, на основе которых могут быть развиты все разделы математики.

Строго логическое изложение материала:

Евклид придерживается аристотелевских принципов построения науки, согласно которым, наука должна начинаться с определений тех объектов, существование которых доказывать не нужно.

Все остальное следует доказывать, опираясь на выбранную систему определений, аксиом и постулатов. Доказательством служит построение. Поэтому, излагая геометрические предложения, Евклид сначала формулирует их в общих выражениях, а затем конкретно указывает на чертеже то, что дано, и то, что требуется доказать или построить.

После приведенного доказательства следует заключение, повторяющее начальную формулировку и заканчивающееся словами: “что и требовалось доказать” или “что и требовалось сделать”.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ (с интуитивным характером)

- Точка — то, что не имеет частей (дословно: *точка есть то, часть чего ничто*).
- Линия — длина без ширины.
- Концы же линии — точки.
- Прямая линия есть та, которая **равно** расположена по отношению к точкам на ней.
- Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
- Границы поверхности суть линии.
- Плоская поверхность есть та, которая **равно** лежит относительно прямых на ней...

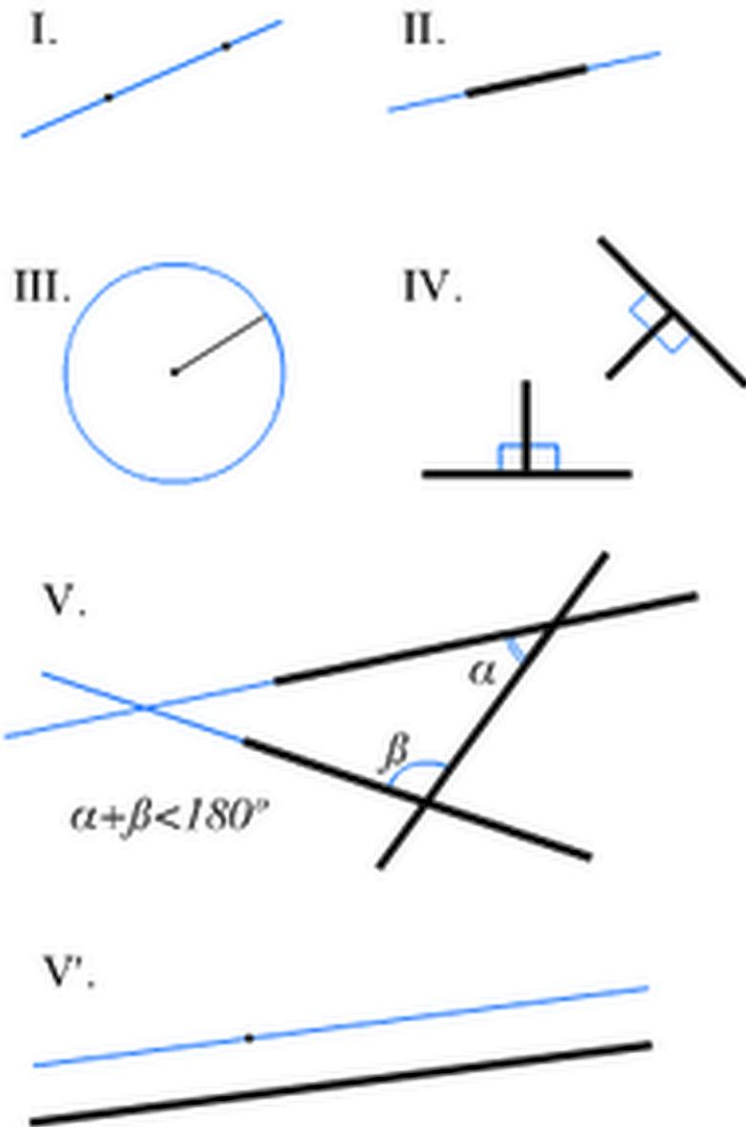
Можно критиковать.

АКСИОМЫ

Аристотель: *Аксиомы — это такие очевидные вещи, которые “необходимо иметь каждому, кто будет что-то изучать”.*

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. Если к равным прибавить равные, то и целые будут равны.
3. Если от равных отнять равные, то и остатки будут равны.
4. Совмещающиеся друг с другом равны между собой.
5. Целое больше части.

ПОСТУЛАТЫ



1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжить по прямой. (Из первых двух постулатов следует существование прямой).
3. Из всякого центра всяким раствором может быть описан круг (следовательно, окружность существует).
4. Все прямые углы равны между собой (следовательно, существует единственное продолжение прямой).
5. Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых (что обеспечивает существование точки пересечения двух прямых, удовлетворяющих указанному условию).

СОДЕРЖАНИЕ «НАЧАЛ»

I книга: планиметрия прямолинейных фигур — основные свойства треугольников, параллелограммов, трапеций; теорема Пифагора и обратное ей предложение.

Теоремы формулируются в терминах равенств: например, треугольник равнобедренный половине прямоугольника, имеющего с ним равные основания и высоту.

II книга: основы геометрической алгебры. Здесь устанавливаются основные тождества и доказывается дистрибутивность умножения относительно сложения.

Обе первые книги восходят к **ПИФАГОР**ейцам.

III книга посвящена свойствам круга, его касательных и хорд — вопросам, которые были исследованы **Гиппократом Хиосским** или ранее.

В IV книге строятся правильные n -угольники при $n=3,4,5$, и полученные из них удвоением сторон — $6, 8, 10, 12, \dots$

Исключительно изящное построение правильного 15-угольника принадлежит самому **Евклиду**. Построения правильного 7-угольника у Евклида нет — еще не знали, можно ли построить его циркулем и линейкой.

*В первых четырех книгах все теоремы доказываются без использования пропорциональности, т.е. без теории отношений, которая появляется лишь в 5 книге. Считается, что эти книги — обработка «Начал» **ГИППОКРАТА** Хиосского.*

Книга V содержит **общую теорию отношений** величин **ЕВДОКСА**, которую многие современные ученые считают первой теорией действительного числа, очень строгой и логически завершенной, во многом напоминающей теорию сечений Дедекинда.

В VI книге Евклид строит *учение о подобии* и применяет его к задачам о «приложении площадей», равносильным геометрическому решению *квадратных уравнений*.

Книги VII–IX посвящены **АРИФМЕТИКЕ**, т.е. теории целых и рациональных чисел, которая также была известна древним пифагорейцам не позднее V в. до н.э.

Помимо теорем, относящихся к сложению и умножению целых чисел и умножению их отношений, в них рассматриваются и вопросы теории чисел: вводится алгоритм Евклида, излагаются основы теории делимости целых чисел, доказывается знаменитая **теорема Евклида** о том, что простых чисел бесконечно много.

Помимо результатов **Теэтета Афинского** излагаются также и исследования непрерывной пропорции **Архита из Тарента**, условия существования средних пропорциональных. Встречаются логические ошибки.

В книге X на основании учения о целых и рациональных числах Евклид, следуя **ТЕЭТЕТУ**, приводит **классификацию квадратичных иррациональностей**, которые возникают при решении цепочек квадратных уравнений.

В этой книге намечено построение *пифагорова* поля Ω , т.е. минимального поля, в котором разрешимо любое уравнение вида $x^2 = a^2 + b^2$.

Также здесь доказывается, что соизмеримые величины относятся друг к другу как число к числу, т.е. множество рациональных чисел вложено во множество действительных чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Эта книга наиболее длинна и трудна для понимания. Особенно ощущается недостаток удобной символики, из-за отсутствия которой изложение становится очень громоздким и тяжеловесным.

1585 г. Симон Стевин:

*"Трудности десятой книги... привели многих в ужас, и дело дошло до того, что ее называют **"крестной казнью математиков"**, материя сия не поддается угрызению и в ней не обнаруживают ни малейшей пользы"*.

1950 Б.Л. Ван дер Варден "Пробуждающаяся наука":

"До X, 28 все еще сносно, но затем с X, 29 начинаются доказательства существования: «Найти два потенциально соизмеримых выразимых отрезка так, чтобы разность построенных на них квадратов равнялась квадрату на отрезке, соизмеримом с большим из них» и т. п., и тут уже действительно не легко понять, к чему все это нужно.

***Автор удивительно умеет скрывать ход своих мыслей;** начиная с построения, он не вводит даже понятия о биномиали, которое могло бы как-то прояснить цель его построений, и только уже в самом конце он дает разделение биномиалей на шесть видов"*.

Книга XI посвящена **стереометрии**. Она содержит основные предложения о прямых и плоскостях в трехмерном пространстве, задачи на построение (например, опустить из данной точки на данную плоскость перпендикуляр), а также теоремы о равновеликости параллелепипедов и призм.

Много результатов **Архита** из Тарента.

В книге XII с помощью **метода исчерпывания Евдокса** доказываются известные уже теоремы:

- 1) отношение площадей кругов равно отношению квадратов их диаметров;
- 2) объем пирамиды равен трети объема соответствующей призмы;
- 3) объем конуса равен трети объема соответствующего цилиндра;
- 4) отношение объемов шаров равно отношению кубов их диаметров (**новый результат Евклида**).

В книге XIII излагается учение о **пяти правильных многогранниках** (платоновых телах — тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр): **как** их можно построить, **как** можно найти длину их ребер, зная радиус описанной сферы, и **почему** других правильных тел не существует. Эти результаты исследователи относят к творчеству **Теэтета**.

Отличие от Платона — **математические объекты** изначально не обязательно существуют. **Евклид** их строит, чем и **доказывает существование**.

Позднее к “Началам” присоединили еще две книги:

Книга XIV *Гипсикл* (II в. до н.э.)

сравнение объемов и поверхностей додекаэдра и икосаэдра, вписанных в одну и ту же сферу.

Книга XV школа *Исидора* Милетского (IV в. н.э.)

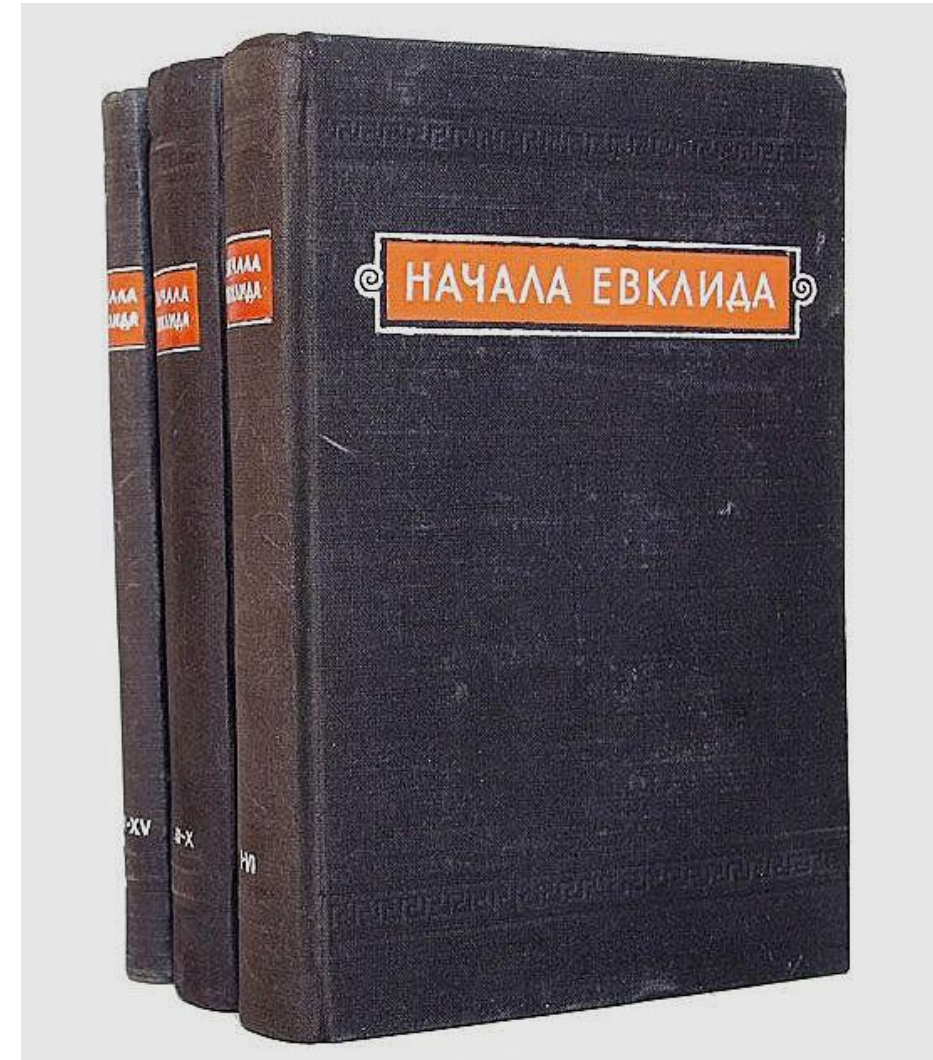
некоторые предложения о правильных многогранниках.

Оригинальная рукопись “Начал” долгое время сохранялась в Александрийской библиотеке, однако до наших дней все же не дошла.

В настоящее время тексты дошедших до нас копий не совпадают полностью. Арабские копии датируются VIII–IX вв. Древнейшая из латинских копий относится к XI в.

После изобретения книгопечатания в XV в. “Начала” по числу изданий уступают лишь Библии.

На русском языке первое издание “Начал” вышло в 1739 г., последнее – в 1948-50 гг.



А. Эйнштейн:

“Это удивительнейшее произведение мысли дало человеческому разуму ту уверенность в себе, которая была необходима для его последующей деятельности. Тот не рожден для теоретических исследований, кто в молодости не восхищался этим творением”.

Аксиоматизация геометрии в XIX веке

1882 – М. Паш

1889 – Дж. Пеано

1899 – Д. Гильберт «Основания геометрии»

Вводятся объекты трёх видов – «точки», «прямые» и «плоскости», связанные отношениями типа «принадлежит», «между» и «конгруэнтен». Введённые аксиомы (их 5 групп: 1) аксиомы, определяющие понятие «принадлежит», 2) определяющие понятие «между», 3) аксиомы, необходимые для введения отношения конгруэнтности, 4) аксиома параллельности, 5) группа аксиом непрерывности) служат косвенными определениями первоначальных объектов и отношений.

Содержательная аксиоматизация: аксиомы суть выражения абсолютных свойств мира (С. Клини)