

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Названа так И.Г. Цейтенном.

Изложена во II-й книге «Начал» Евклида – самой маленькой из всех книг «Начал», но одной из самых важных. Также ее предложения встречаются в VI и XIII книгах.

Все величины – отрезки. Их можно складывать, вычитать, умножать. При умножении повышается размерность произведения, поэтому был введен принцип однородности.

Вместо деления отрезка на отрезок рассматривалось отношение двух отрезков. Делить же площадь на отрезок было возможно.

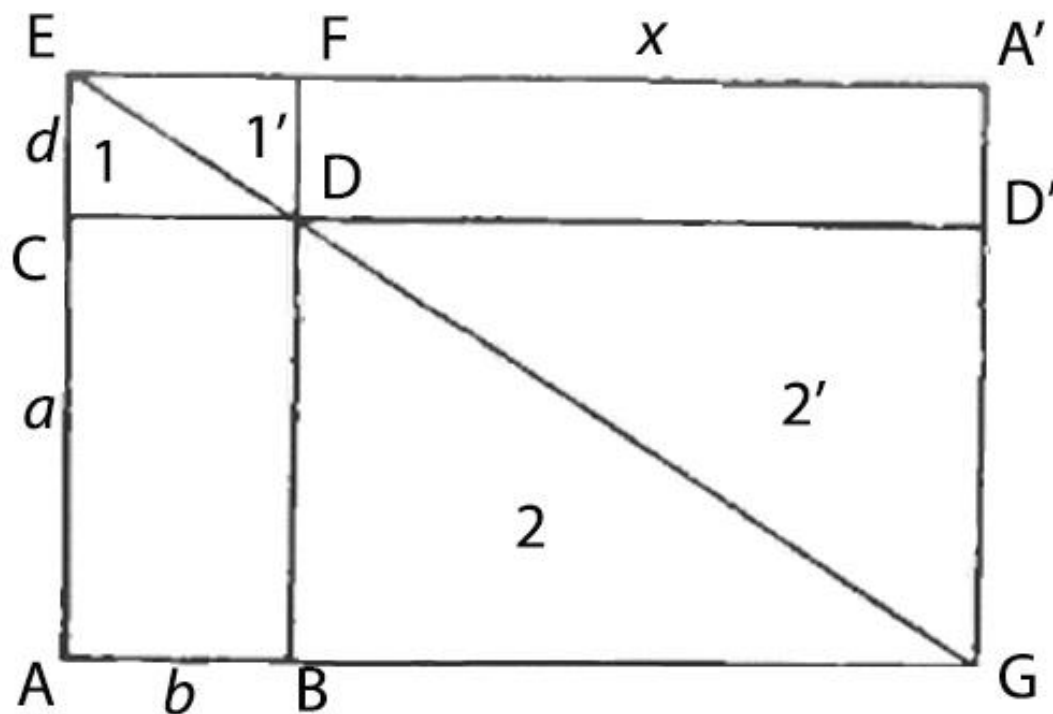
В рамках геометрической алгебры можно доказывать некоторые алгебраические тождества и решать некоторые уравнения.

Приложение площадей.

I. Задачи, эквивалентные **линейным** уравнениям:

К данной прямой (d) приложить прямоугольник, равновеликий заданному (ab).

Требуется найти сторону x прямоугольника, площадь которого (ab) и одна сторона d заданы, то есть, решить уравнение $dx = ab$.



Это – не единственный способ решить линейное уравнение геометрически.

L'ALGEBRA

PARTE MAGGIORE

DELL'ARITMETICA

DIVISA IN TRE LIBRI

DI RAFAEL BOMBELLI

DA BOLOGNA.

Nonamente posta in luce.



IN BOLOGNA

Nella stamperia di Giovanni Rossi

M D L X X I I

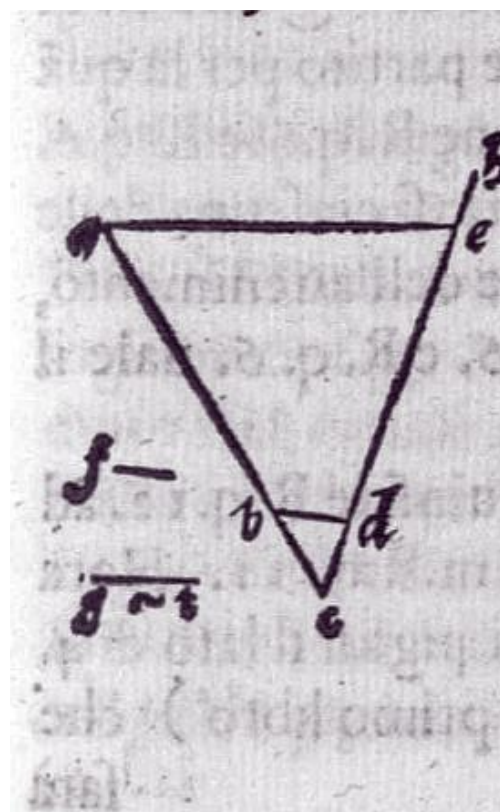
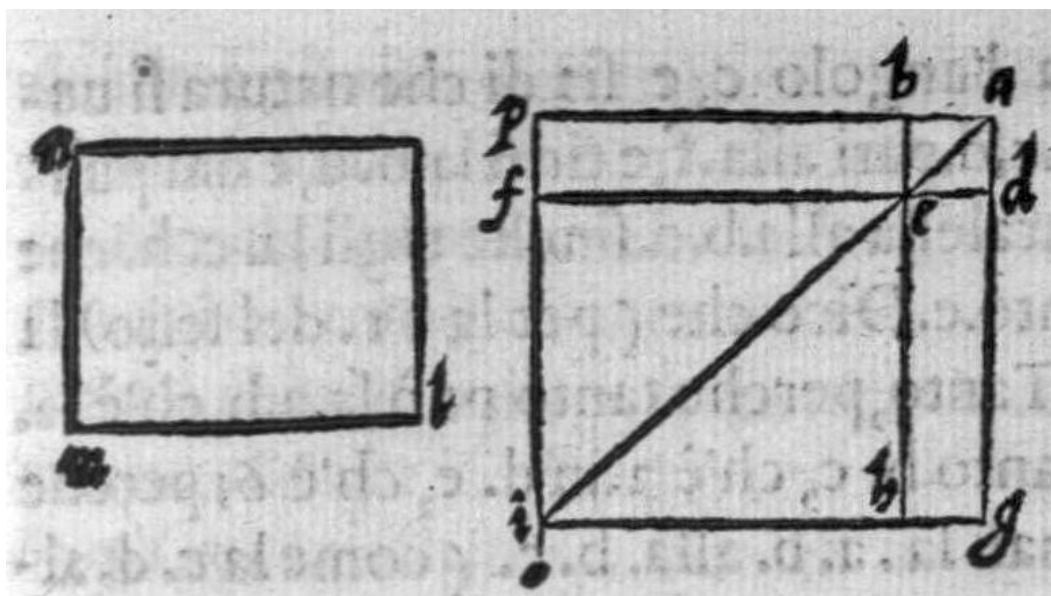
Con Licentia delli RR. VV. del Vesc. & Inquisit.

В 1572 г. Рафаэль Бомбелли опубликовал переработанный после знакомства в 1550 г. с "Арифметикой" Диофанта вариант своего сочинения "***L'Algebra***", в котором **уже к 1550 г.** наряду с традиционным геометрическим построением, доказывающим существование отрезка-решения этой задачи, **имелось** оригинальное **"Dimostrazione in linea"**, сопровождавшее алгебраическое решение линейного уравнения. В нем использовалась теорема Фалеса и **впервые говорилось о единичном отрезке**, заслуга введения которого обычно приписывается Р. Декарту ("Геометрия", **1637**).

241:

243:

Dimostrazione del Capitolo di Tanti eguali à numero.

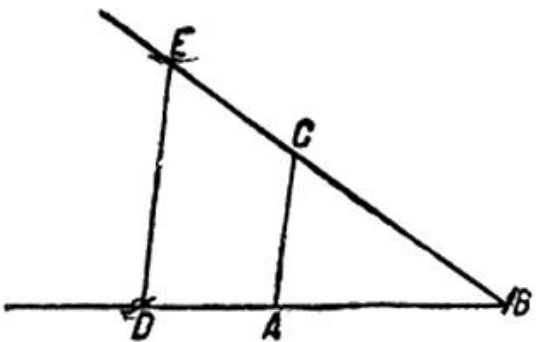


Sia la misura commune f.co
me fu detto di sopra , e sia. a. b.
1 2, eguale alla.g. che sia 2. Tan
ti, per trouare quanto ualerà la
meta della **g. cioè 1**. Tanto al
longhisi la.a.b.fino in c.facendo
b. c. tanto longa delle parti. f.
quanto è il numero delli Tanti
2. faccisi. b. c. longa due uolte
quanto.f. poi tirisi la.e.h. in tal
modo,

Более того, в первоначальных 4й и 5й геометрических книгах "Алгебры" Бомбелли, оставшихся неопубликованными в XVI в. и вновь обнаруженными итальянским историком математики Э. Бортолоцци лишь в 1923 г. и опубликованными в 1929 г., мы находим точно такое же **определение арифметических операций умножения и деления отрезков**, как и в "Геометрии" Декарта (1637), позволившее в результате

Умножение.

Пусть, например (черт. 1), AB является единицей и требуется умножить BD на BC ; для этого я должен только соединить точки A и C , затем провести DE параллельно CA , и BE будет результатом этого умножения.



Черт. 1.

Деление.

Или же, если BE нужно разделить на BD , то, соединив точки E и D , я провожу AC парал-

лельно DE , и BC будет результатом этого деления.

этих операций **получать снова отрезок** – величину той же размерности, что и исходные. Для этого и Бомбелли, и Декарту потребовалось ввести в рассмотрение **отрезок единичной длины**. В результате **принцип однородности** пифагорейцев перестал быть необходимым в буквенном исчислении.

Рафаэль БОМБЕЛЛИ (ок. 1526–1573)

К 1550 г. составил первый вариант своего сочинения по алгебре. Знакомство с найденной в библиотеке Ватикана "Арифметикой" Диофанта – *“греческое сочинение по этой дисциплине, составленное неким Диофантом Александрийским ... и, чтобы обогатить мир таким замечательным произведением, взялись мы за перевод и перевели пять книг из семи, которые не были переведены до этого”* – привело к коренной переработке "Алгебры" Бомбелли, полностью изменившего содержание своей третьей книги, в которую были включены 143 задачи Диофанта. И даже более того:

чисто **аксиоматически** для объяснения неприводимого случая кубического уравнения **ввел** в алгебру **МНИМЫЕ** величины:

Плюс из минуса на плюс из минуса будет минус.

Плюс из минуса на минус из минуса будет плюс.

Минус из минуса на плюс из минуса будет плюс.

Минус из минуса на минус из минуса будет минус.

Текст из первого издания "Алгебры" Бомбелли 1572 г. :

Più uia più di meno, fà più di meno.
Meno uia più di meno, fà meno di meno.
Più uia meno di meno, fà meno di meno.
Meno uia meno di meno, fà più di meno.

Più di meno uia più di meno, fà meno.
Più di meno uia men di meno, fà più.
Meno di meno uia più di meno, fà più.
Meno di meno uia men di meno fà meno.

$$\begin{aligned} (+1) \times (+\sqrt{-1}) &= (+\sqrt{-1}) \\ (-1) \times (+\sqrt{-1}) &= (-\sqrt{-1}) \\ (+1) \times (-\sqrt{-1}) &= (-\sqrt{-1}) \\ (-1) \times (-\sqrt{-1}) &= (+\sqrt{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (+\sqrt{-1}) \times (+\sqrt{-1}) &= -1 \\ (+\sqrt{-1}) \times (-\sqrt{-1}) &= +1 \\ (-\sqrt{-1}) \times (+\sqrt{-1}) &= +1 \\ (-\sqrt{-1}) \times (-\sqrt{-1}) &= -1 \end{aligned}$$

Краткая история открытия правил решения уравнений 3й и 4й степеней.

Сципион дель ФЕРРО (1465–1526) в 1515 г. **нашел** решение одного из трех типов кубического уравнения:

$$x^3 + px = q, \quad p > 0, q > 0. \quad (1)$$

Никколо ТАРТАЛЬЯ (1500–1557), в 1535 г. будучи вызванным на поединок Антонио Мариа дель Фьоре, **переоткрыл** правило дель Ферро и даже продвинулся вперед:

$$x^3 + px = q, \quad (1)$$

$$x^3 = px + q, \quad (2)$$

$$x^3 + q = px, \quad p > 0, q > 0. \quad (3)$$

Опубликовал правило **Джироламо КАРДАНО** (1501–1576) в своем знаменитом трактате «*Ars magna sive de regulis algebraicis*» в 1545 г. в том числе потому, что его ученик

Лодовико ФЕРРАРИ (1522–1565) нашел способ решения одного из типов уравнения 4-й степени.

Никколо ТАРТАЛЬЯ (1500–1557)



Для решения уравнения «Куб вещи плюс вещь равны числу» (1) сделаем замену

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}.$$

Возведя обе части (1) в куб, получим

$$x^3 = (u - v) - 3\sqrt[3]{uv} \cdot x$$

или $x^3 + 3\sqrt[3]{uv} \cdot x = u - v.$

Сравнивая полученное с (1), запишем систему

$$\begin{cases} \sqrt[3]{uv} = \frac{p}{3} \\ u - v = q \end{cases},$$

эквивалентную квадратному

уравнению $t^2 - qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, корнями которого

будут $t_1 = u$, $t_2 = -v$: $t_{1,2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Для решения уравнения «**Куб вещи равен вещи плюс число**» (2) Тарталья сделал замену $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ и получил решение в виде:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

В случае, когда $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, правило «утверждает», что решения нет, однако его нетрудно найти перебором делителей свободного члена:

для уравнения $x^3 = 15x + 4$ существует корень $x = 4$, хотя под квадратным корнем выражение отрицательное. Этот случай был назван «**неприводимым**», и Тарталья не мог опубликовать свои результаты, не объяснив его.

Джироламо КАРДАНО (1501– 1576)

Математик, инженер, философ, врач. Учился в университетах Павии и Падуе. С 1534 жил и работал в Милане. Путешествовал в Швейцарию, Францию, Англию, Шотландию.

«Цель, к которой я стремился, заключалась в увековечении моего имени, поскольку я мог бы этого достигнуть, а вовсе не в богатстве или праздности ... не в высоких должностях и не во власти».

Число своих открытий он определил равным 40 000 (среди них такие – «почему восток лучше запада», «что такое судьба и как она действует»).

«В своих огромных томах он передал памяти потомства кое-что полученное или списанное у других или плохо придуманное своё».

Уильям Гильберт (1544–1603)

Его достижения: исследования по баллистике, таблицы стрельб, карданный вал, в математике – исследования по теории вероятностей («Книга об игре в кости»), по алгебре («Великое искусство или о правилах алгебры», 1545; "Беседа о плюсе и минусе", 1572).

Кардано об открытии «великого правила»:

*“В наше великое время **Сципион дель Ферро** открыл формулу: ”**Куб вещи плюс вещь равны числу**”.*

Это было поистине прекрасное открытие. Так как подобное искусство превосходит все человеческое остроумие и всю ясность ума смертного, то его нужно рассматривать как подарок небесного происхождения, а также способность силы ума.

*Это настолько славное открытие, что от того, кто мог его достигнуть, можно ожидать, что он достигнет всего. Соперничая с ним, **Никколо Тарталья из Брешии**, наш друг, будучи вызван на состязание учеником дель Ферро по имени **Антонио Мария Флоридо**, решил, дабы не быть побежденным, ту же самую проблему и после долгих просьб передал ее мне.*

Я был введен в заблуждение словами Луки Пачоли, который говорил, что нет общего решения такого рода уравнений, и, так как я обладал уже многими, мною самим сделанными открытиями, я не отчаивался найти то, чего я не смел искать.

*Однако, когда я получил эту главу и добрался до ее решения, то я увидел, что с ее помощью можно многое еще сделать, и уже с повышенной уверенностью в своих силах я при исследовании открыл дальнейшее, частью сам, частью с **Лодовико Феррари**, моим бывшим учеником”.*

Ученик Кардано **Лодовико ФЕРРАРИ** рассмотрел один из типов уравнения 4й степени: $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$, но нигде не отмечается, что любое полное алгебраическое уравнение всегда подстановкой типа $t = x + \alpha$ можно свести к уравнению без слагаемого степени $n - 1$.

$$x^4 = -(ax^2 + bx + c)$$

Затем, чтобы получить полный квадрат в левой части, вводит новую переменную: $x^4 = (x^4 + 2tx^2 + t^2) - t^2 - 2tx^2 = (x^2 + t)^2 - 2tx^2 - t^2$
 $(x^2 + t)^2 = x^2(2t - a) - bx + (t^2 - c)$

Таким образом, квадратный трехчлен в правой части должен быть полным квадратом, т.е. его дискриминант равен нулю $\Rightarrow$ получено кубическое уравнение на новую переменную, правило решения которого известно. Подробно все типы уравнений 4й степени рассмотрел Бомбелли.

Кардано размышлял над корнями из отрицательных чисел, называл их "софистическими" числами. В **одном** месте "Великого искусства" он написал:

"Второй вид ложного решения уравнения заключается в корне из минуса. Я приведу пример: если кто-нибудь потребует разделить 10 на две части, которые при перемножении дали бы 30 или 40, то ясно, что этот случай или вопрос невозможен.

Но мы поступим так: разделим 10 пополам, половина будет 5; умноженная на самое себя она даст 25. Затем вычти из 25 то, что должно получиться при перемножении, скажем, 40, как я объяснял это тебе в главе о действиях в 4й книге; тогда останется -15; если взять из этого корень и прибавить к 5 и вычесть из 5, то получаются части, которые перемноженные между собой, дадут 40.

Таким образом, части эти будут $5 \pm \sqrt{-15}$ и $5 \mp \sqrt{-15}$ ".

В современных обозначениях это $5 \pm \sqrt{-15}$ $5 \pm i\sqrt{15}$.

Одну из своих последних неопубликованных работ "*Sermo de plus et minus*" (157???) Кардано посвятил попыткам найти геометрическую интерпретацию "софистическим числам".

Работа, как и все научные работы Кардано, написана на языке науки того времени – латыни, но видно, что объяснить понятно свои идеи Кардано не получается. В этой работе он рассуждает о стороне квадрата, площадь которого равна -1 , т.е. пытается построить отрезок длины $\sqrt{-1}$, вводя для этого в рассмотрение **ориентацию площадей прямоугольников**. Но в результате, начав с этой очень интересной идеи, которую мы сегодня могли бы связать с известным наглядным геометрическим представлением комплексного числа как точки на плоскости, Кардано все же в какой-то момент запутывается в своих рассуждениях и в результате располагает действительную и мнимую части комплексного числа по одной и той же прямой, что не может привести к нужной геометрической интерпретации.

Рафаэль **Бомбелли**, воспринявший подход Диофанта введения в математику объектов без какой-либо геометрической интерпретации, таким же образом начинает оперировать с введенными им комплексными числами, определив для них (ровно так, как это сегодня делаем и мы) арифметические операции, построив тем самым поле комплексных чисел.

При этом **операция извлечения корня из комплексного числа**, рассматриваемого в виде $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, очень сложна. Нам сегодня для этого требуется его тригонометрическая форма и формула Муавра (1707), поэтому много внимания Бомбелли уделяет извлечению из комплексного числа корней квадратного и кубического, причем для последнего даже изобретает некий способ, позволяющий в некоторых случаях этот корень извлечь.

1572 Бомбелли

"L' Algebra"

"Способ нахождения кубической стороны из корней подобного вида",

т.е. вычисление $\sqrt[3]{a + i\sqrt{b}} = x + i\sqrt{y}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$.

Без объяснений Бомбелли утверждает, что

$$\begin{cases} x^3 = a + 3xy \\ x^2 + y = \sqrt[3]{a^2 + b} \end{cases}.$$

Тогда величина x удовлетворяет системе неравенств:

$$\begin{cases} x^3 > a \\ x^2 < \sqrt[3]{a^2 + b} \end{cases}$$

Найдя подбором решение этой системы неравенств, Бомбелли из второго уравнения находит y .

II. Три вида **квадратных** уравнений

1. Построить квадрат равновеликий данному прямоугольнику: $x^2 = ab$.

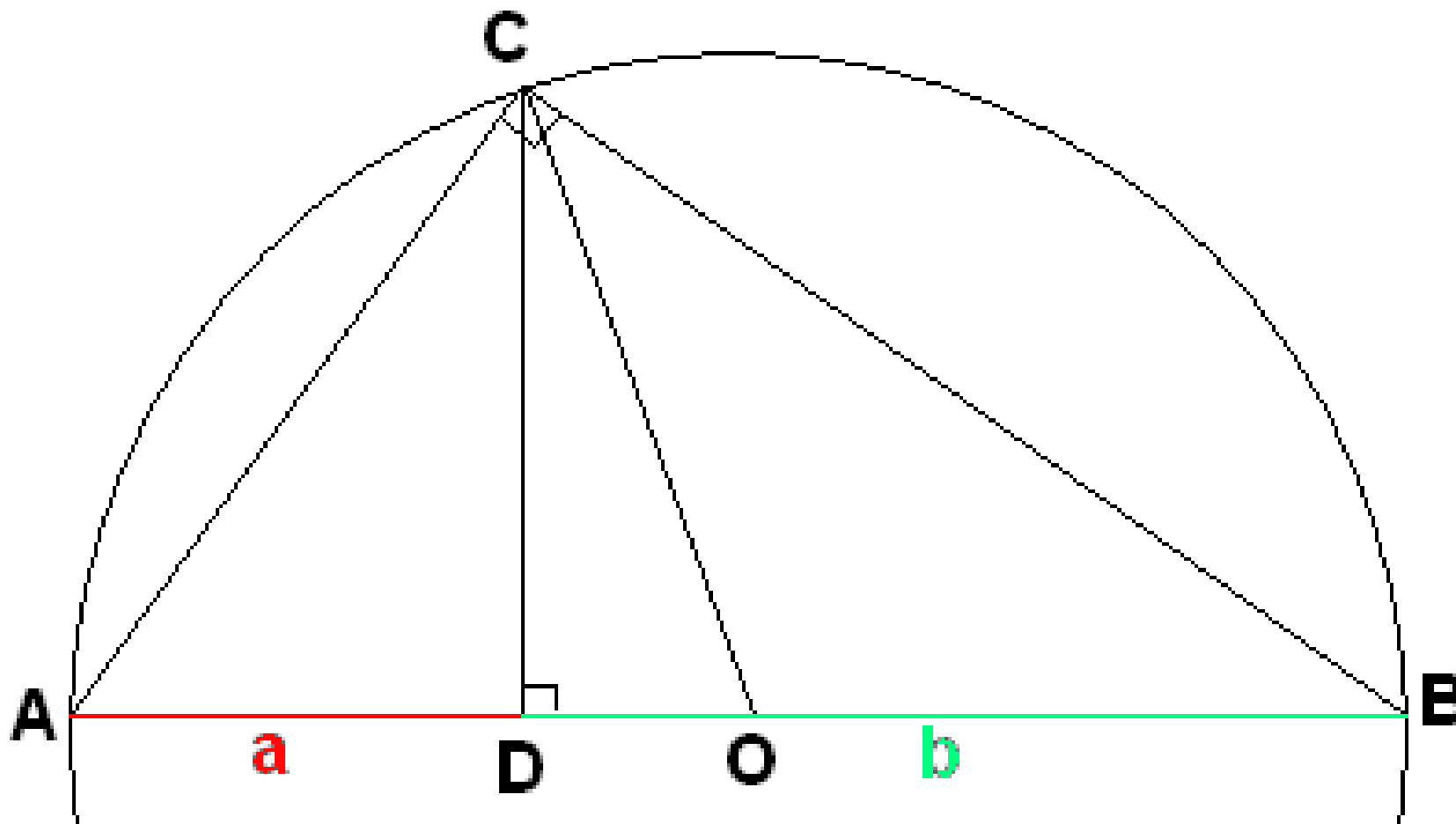
2. Дана некоторая площадь S и отрезок $2a$. Приложить площадь S к отрезку $2a$ так, чтобы недостаток ($\acute{\epsilon}\lambda\lambda\epsilon\iota\psi\iota\varsigma$) был квадратом: $x(2a - x) = S$.

Для решения задачи этого типа было найдено условие существования действительного положительного корня:

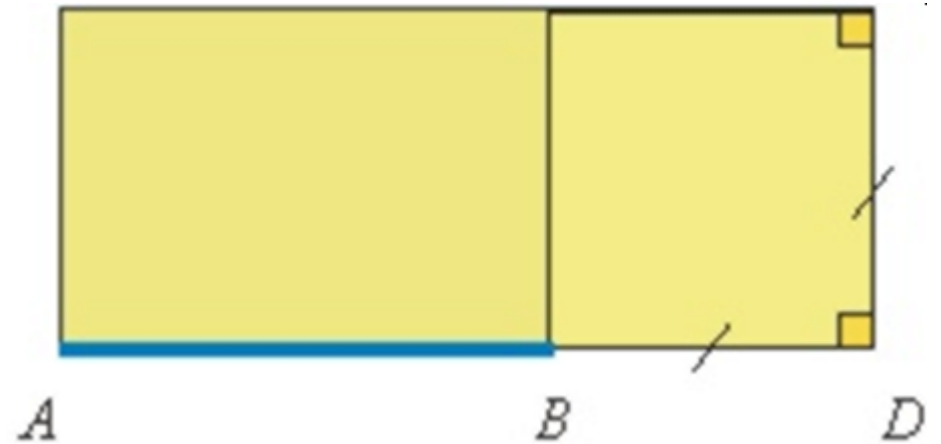
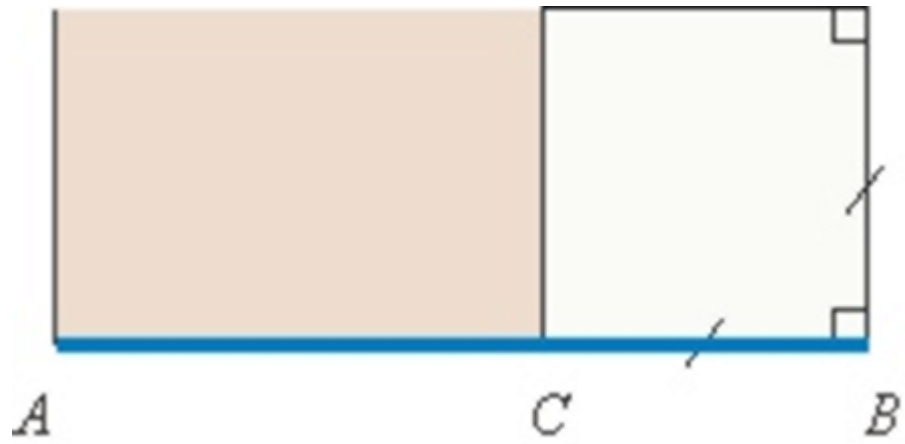
$$S^2 \leq a^2.$$

3. Дана некоторая площадь S и отрезок $2a$. Приложить площадь S к отрезку $2a$ так, чтобы избыток ($\eta\acute{\upsilon}\pi\epsilon\rho\beta\omicron\lambda\eta$) был квадратом: $x(2a + x) = S$.

1. Построить квадрат равновеликий данному прямоугольнику: $x^2 = ab$.



Приложение площадей



Домашнее задание: разобрать подробно решение для одного из двух следующих предложений Книги VI «Начал» Евклида:

Предложение 28

К данной прямой приложить равный данной прямолинейной фигуре параллелограмм, имеющий недостаток в виде параллелограмма, подобного данному; необходимо же, чтобы данная прямолинейная фигура [равную которой надо приложить], была не больше <фигуры>, построенной на половине, подобной недостатку [от <фигуры> на половине и подобную которой надо взять в недостатке].

Предложение 29

*К данной прямой приложить равный данной прямолинейной фигуре параллелограмм с избытком^{***}) в виде параллелограмма, подобного данному.*

Поскольку **только в древней Греции** геометрия была построена как теоретическая наука, основанная на системе аксиом, то только здесь **геометрическая алгебра смогла получить дальнейшее развитие**: доказана дистрибутивность умножения относительно сложения, проведено исследование ограничений для существования положительного корня уравнения эллиптического типа, геометрически обоснована рекуррентная формула решения уравнения Пелля

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1 \text{ и т.д.}$$

Какие задачи можно решить средствами геометрической алгебры (с помощью циркуля и линейки)?

⇒ ЗНАМЕНИТЫЕ ЗАДАЧИ ДРЕВНОСТИ