# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Названа так И.Г. Цейтеном.

Изложена во II-й книге «Начал» Евклида – самой маленькой из всех книг «Начал», но одной из самых важных. Также ее предложения встречаются в VI и XIII книгах.

Все величины – отрезки. Их можно складывать, вычитать, умножать. При умножении повышается размерность произведения, поэтому был введен принцип однородности.

Вместо деления отрезка на отрезок рассматривалось отношение двух отрезков. Делить же площадь на отрезок было возможно.

В рамках геометрической алгебры можно доказывать некоторые алгебраические тождества и решать некоторые уравнения.

Из 14 предложений книги «Начал» первые 10 можно рассматривать как доказательства алгебраических тождеств:

1) $a(b+c+d+\cdots) = ab + ac + ad + \cdots$

2) $(a+b)a + (a+b)b = (a+b)^2$

3) $(a+b)a = ab + a^2$

4) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

5) $ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, or $(a+b)(a-b) + b^2 = a^2$

6) $(2a+b)b + a^2 = (a+b)^2$, or $(a+b)(b-a) + a^2 = b^2$

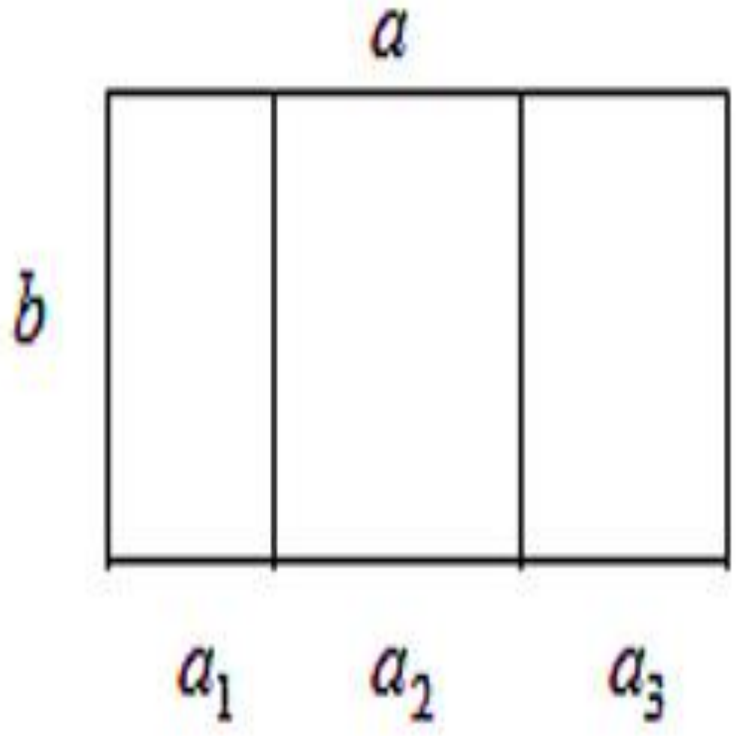
7) $a^2 + b^2 = 2ab + (a-b)^2$

8) $4(a+b)a + b^2 = [(a+b)+a]^2$, or $4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$

9) $a^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right]$, or $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$

10) $(2a+b)^2 + b^2 = 2[a^2 + (a+b)^2]$, or $(a+b)^2 + (b-a)^2 = 2(a^2+b^2)$

# II книга «Начал» Евклида

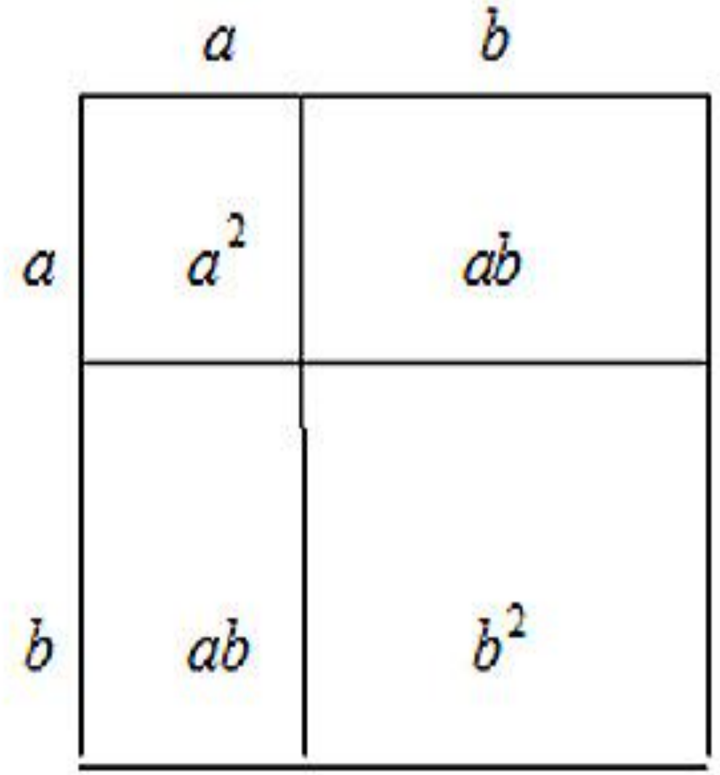



## Предложение 1.

*Если имеются две прямые и одна из них рассечена на сколько угодно отрезков, то прямоугольник, заключающийся между этими двумя прямыми, равен (вместе взятым) прямоугольникам, заключенным между нерассеченной прямой и каждым из отрезков.*

$$ab = (a_1 + a_2 + a_3)b = a_1b + a_2b + a_3b$$

В предложениях 2-3 – частные случаи.



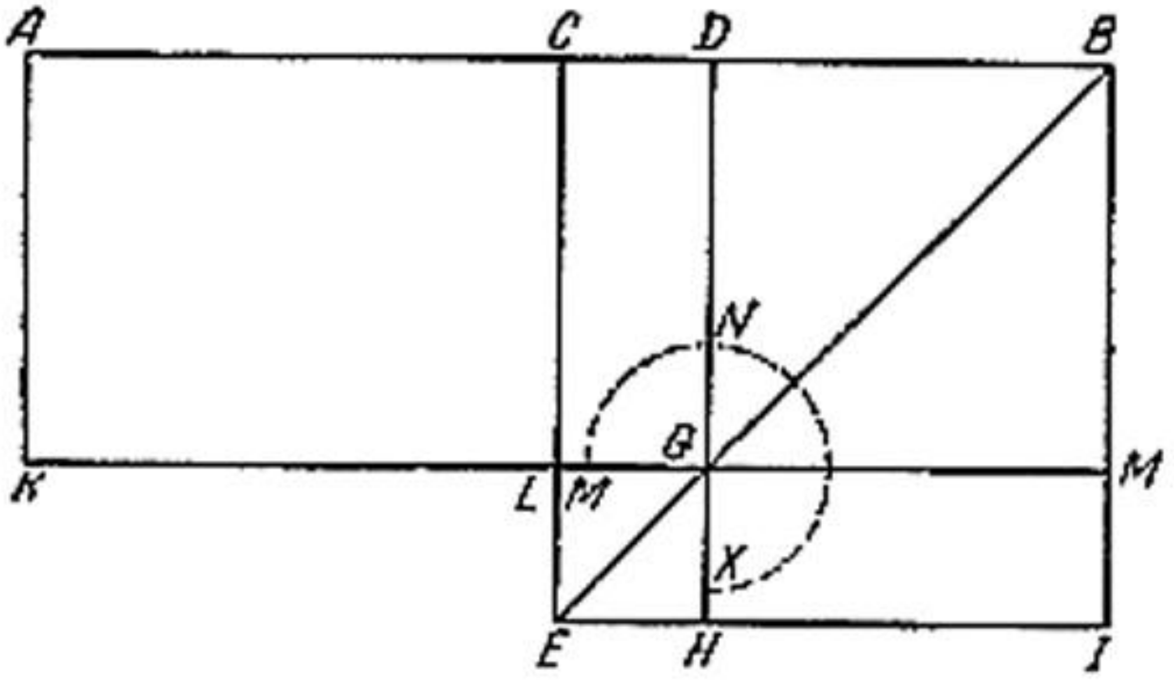

**Предложение 4.**

*Если прямая линия как-либо рассечена, то квадрат на всей (прямой) равен квадратам на отрезках вместе с дважды (взятым) прямоугольником, заключенным между отрезками.*

В предложениях 5-6 – формула разности квадратов.

В предложении 7 – формула квадрата разности.

**Предложение 5.**
*Если прямая линия рассечена на равные и неравные (отрезки), то прямоугольник, заключенный между неравными (отрезками) всей прямой, вместе с квадратом на отрезке между сечениями равен квадрату на половине (прямой).*




Обозначим

$AC = a$, $CD = b$, тогда

$AB = 2a$, $DB = a - b$.

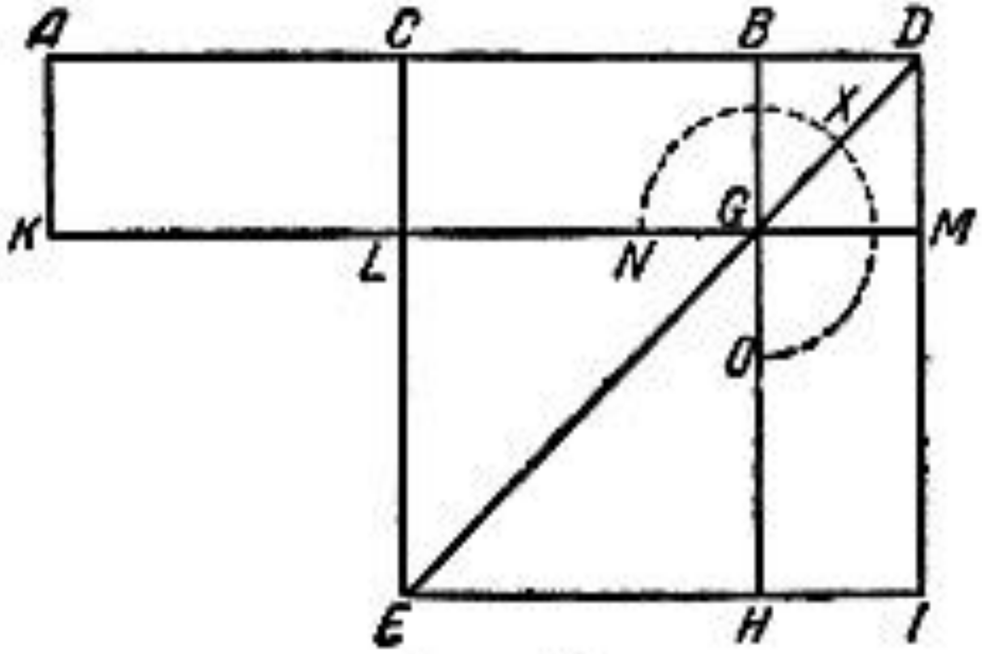
Тогда предложение 5 может быть записано как

$$(a+b)(a-b) + b^2 = a^2,$$

откуда следует формула разности квадратов.

## Предложение 6

*Если прямая линия рассечена пополам и к ней «по прямой» приложена какая-либо другая прямая, то*




Черт. 6.

*прямоугольник, заключённый между всей прямой с приложенной и самой приложенной, вместе с квадратом на половине равен квадрату на ⟨прямой⟩, составленной из половины и приложенной.*

Это тождество лежит в основе **метод**а древних пифагорейцев для **решения квадратных уравнений** (книга VI «Начал»).

Если в предложении 5 обозначить *AD = u*, *BD = v*, получим

$$AC = CB = (u+v)/2, \quad CD = (u-v)/2.$$

Тогда предложение Евклида можно записать как:

$$uv = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

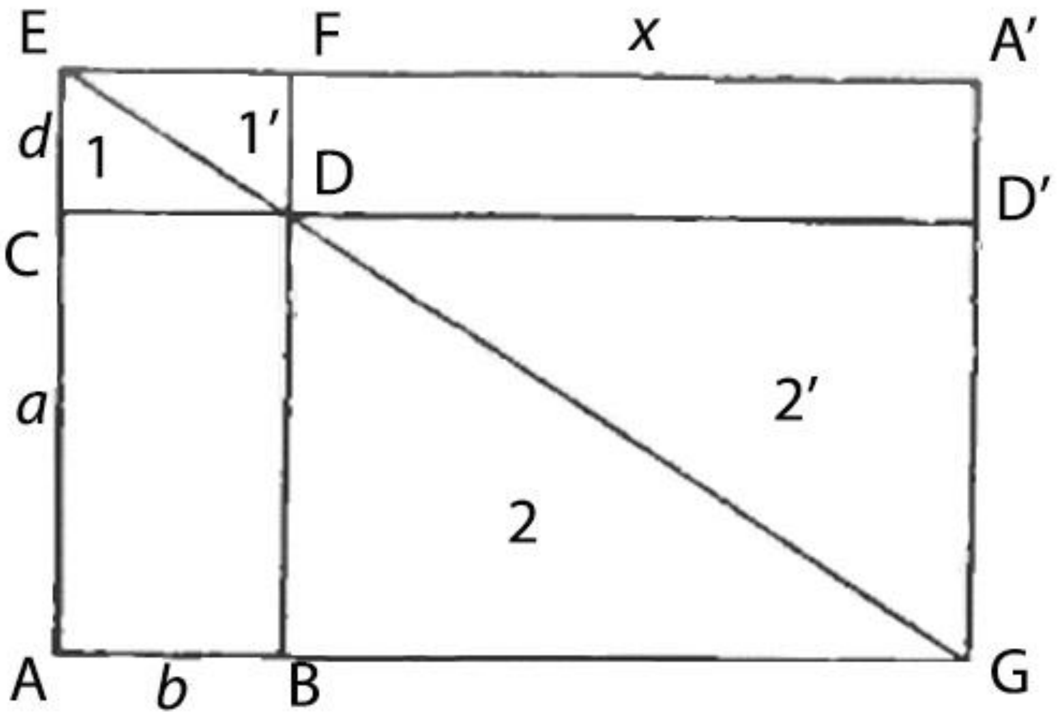
Правую часть тождества можно интерпретировать как квадрат катета прямоугольного треугольника с заданными гипотенузой и другим катетом, и именно эта идея используется в геометрических методах решения квадратных уравнений в Древней Греции.

**Приложение площадей.**

**I.** Задачи, эквивалентные **линейным уравнениям**:

*К данной прямой (d) приложить прямоугольник, равновеликий заданному (ab)*.

Требуется найти сторону x прямоугольника, площадь которого ($ab$) и одна сторона $d$ заданы, то есть, решить уравнение $dx = ab$.



## II. Три вида квадратных уравнений

**1**. Построить квадрат равновеликий данному прямоугольнику: $x^2 = ab$.

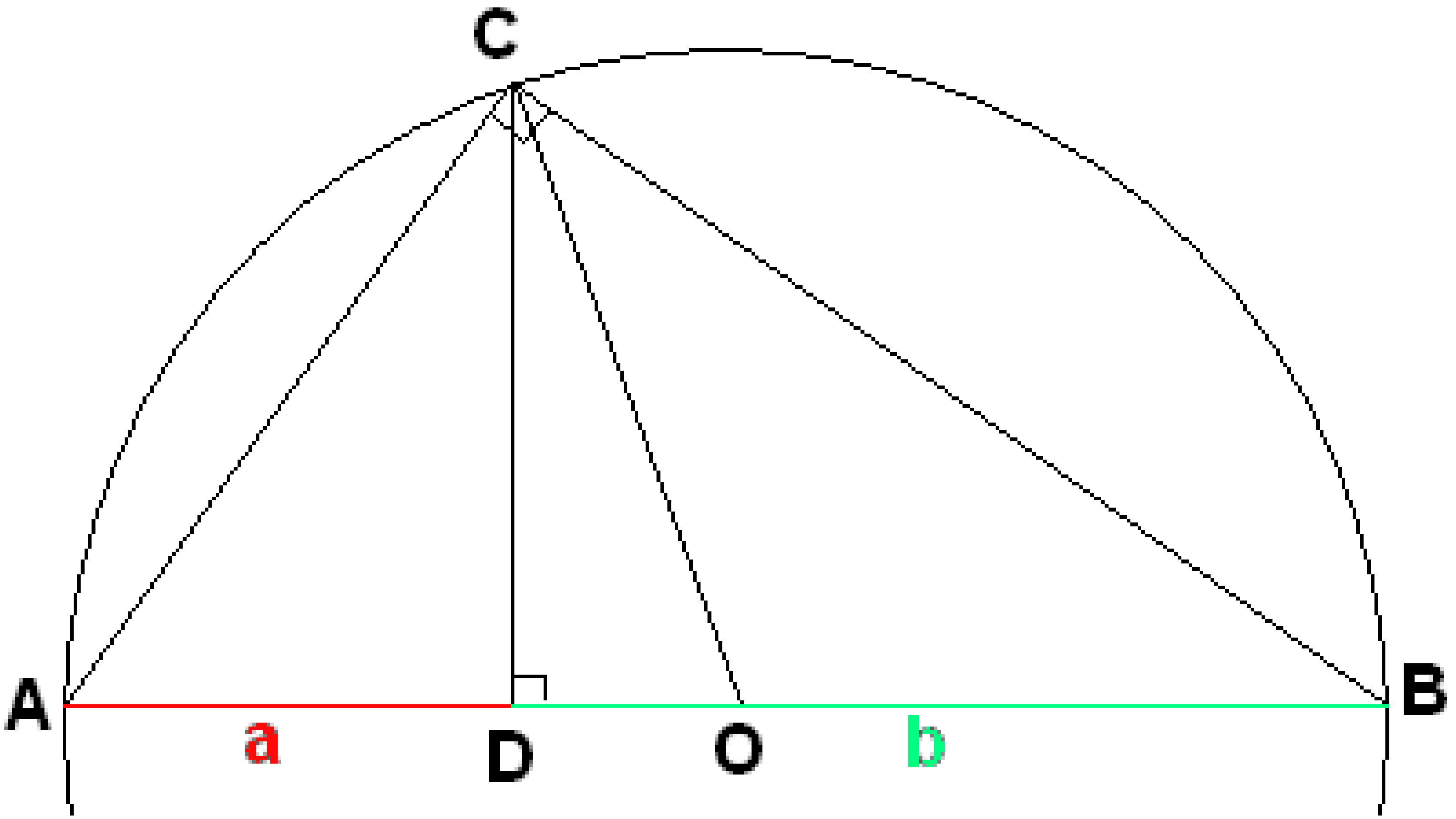
**2**. Дана некоторая площадь $S$ и отрезок $2a$. Приложить площадь $S$ к отрезку $2a$ так, чтобы недостаток ($\acute{\varepsilon}\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\iota\varsigma$) был квадратом: $x(2a-x)=S$ .

Для решения задачи этого типа было найдено условие существования действительного положительного корня:

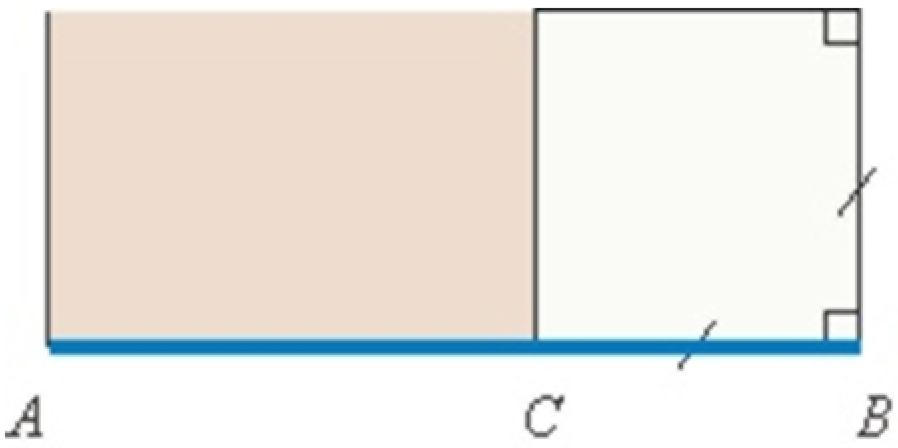
$$S^2 \leq a^2.$$

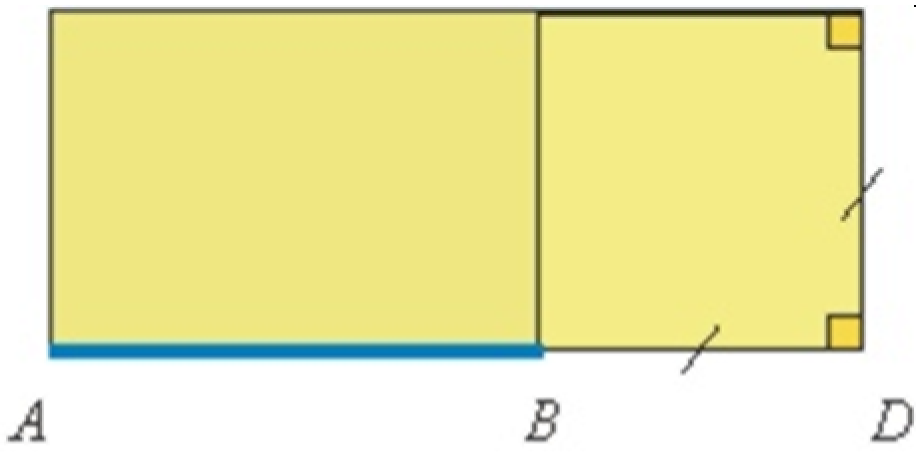
**3**. Дана некоторая площадь $S$ и отрезок $2a$. Приложить площадь $S$ к отрезку $2a$ так, чтобы избыток ($\eta\acute{\upsilon}\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\acute{\eta}$) был квадратом: $x(2a+x)=S$ .

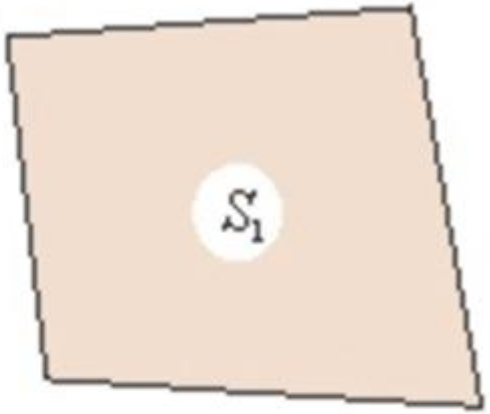
**1**. Построить квадрат равновеликий данному прямоугольнику: $x^2 = ab$.



# Приложение площадей




**Домашнее задание**: разобрать подробно решение для одного из двух следующих предложений Книги VI «Начал» Евклида:

### Предложение 28

*К данной прямой приложить равный данной прямолинейной фигуре параллелограмм, имеющий недостаток в виде параллелограмма, подобного данному; необходимо же, чтобы данная прямолинейная фигура [равную которой надо приложить], была не больше ⟨фигуры⟩, построенной на половине, подобной недостатку [от ⟨фигуры⟩ на половине и подобную которой надо взять в недостатке].*

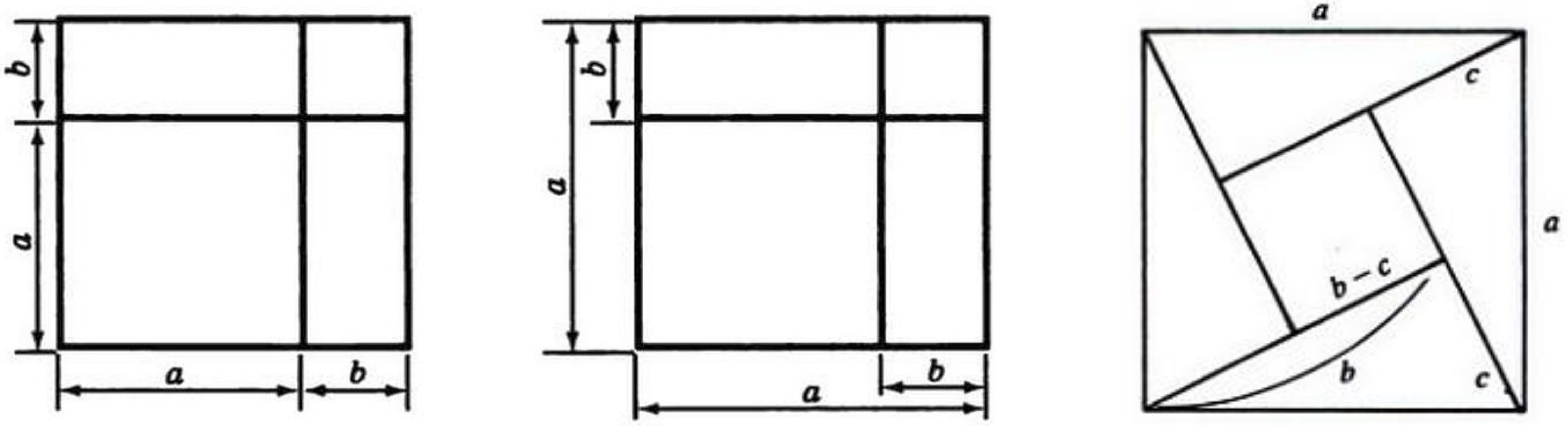
### Предложение 29

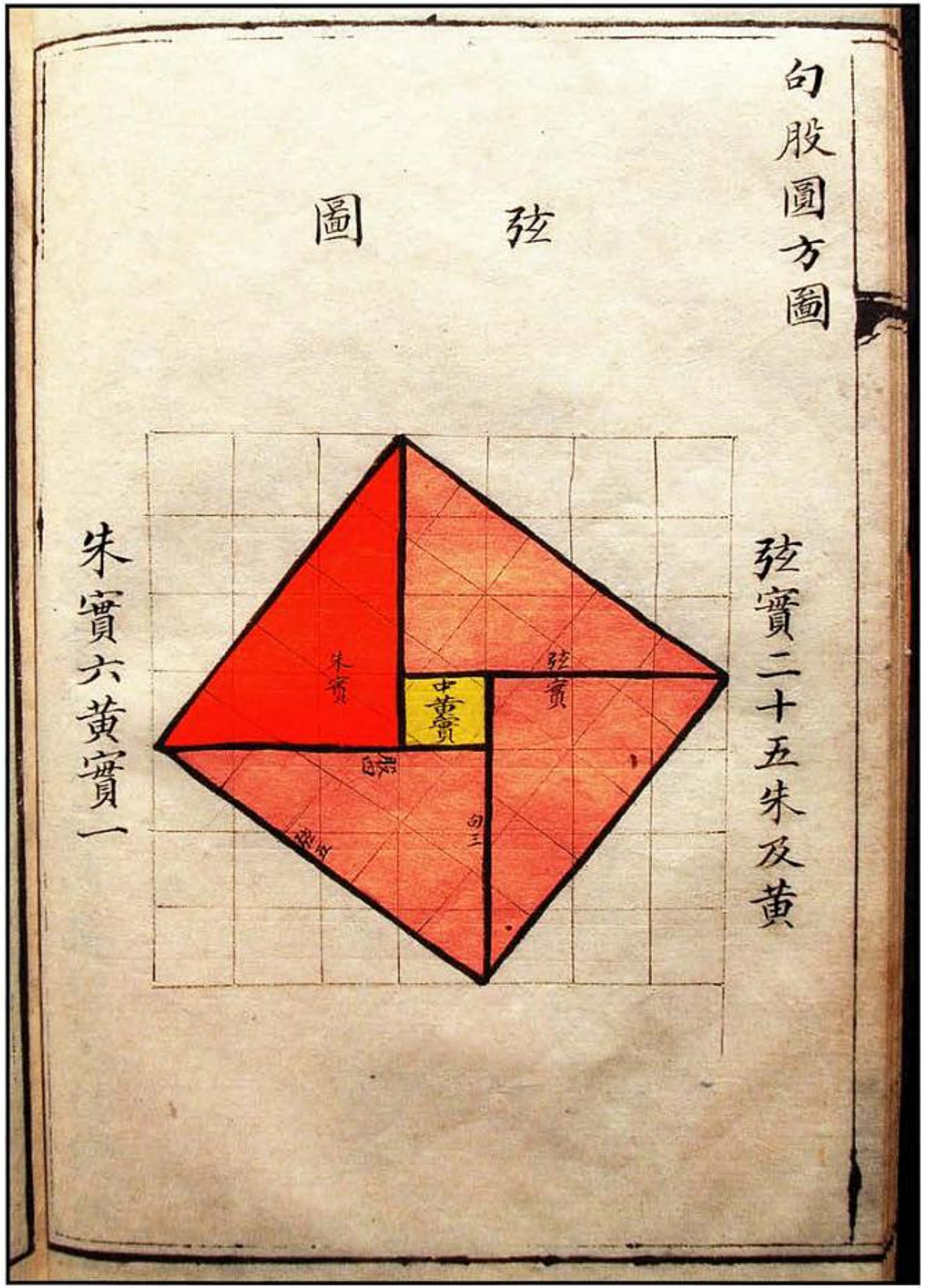
*К данной прямой приложить равный данной прямолинейной фигуре параллелограмм с избытком***) в виде параллелограмма, подобного данному.*

**Геометрический язык для изложения и обоснования элементов алгебры – явление общее для математики всех древних цивилизаций**: везде величины изображались с помощью отрезков, а произведение – с помощью прямоугольника.

С помощью средств геометрии в древних Греции, Индии и Китае доказывались алгебраические тождества

$$(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 \pm 2\boldsymbol{ab},$$
$$\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}).$$






## ЧЕРТЕЖ ГИПОТЕНУЗЫ

С помощью этого чертежа в древнем Китае можно было не только доказать формулу квадрата суммы и теорему Пифагора, но и формулу квадрата разности:

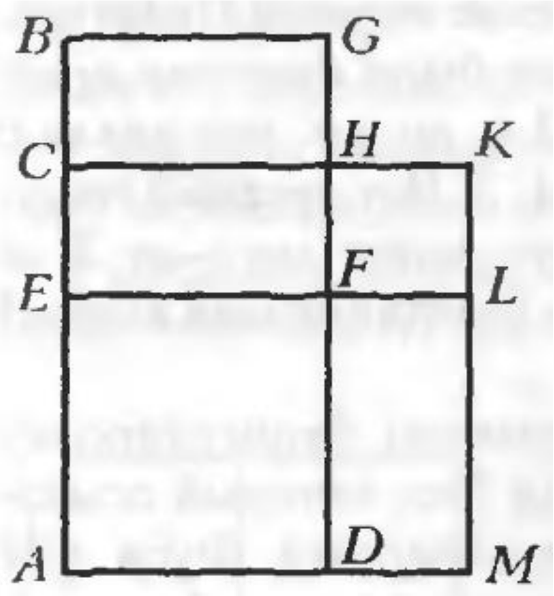
$$(a - b)^2 = c^2 - 4\Delta \quad = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Это – **одно из преимуществ геометрической алгебры,** в которой **с помощью одного и того же чертежа можно доказывать разные алгебраические утверждения.**

В других трактатах в геометрических решениях квадратных уравнений можно разглядеть геометрическое доказательство использовавшейся формулы разности квадратов.

В Индии и Греции геометрически доказывалось тождество

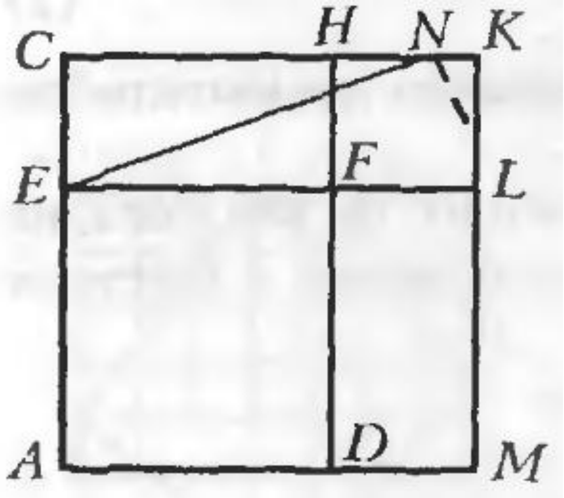
$$\boldsymbol{ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}. \qquad (*)$$




Индийское доказательство при решении $x^2 = ab$:

Пусть $AB = a$, $AD = b$. Тогда строим отрезок $AE$, равный $b$; делим $BE$ пополам: $BC = CE = (a - b)/2$; к отрезку $FD$ прикладываем прямоугольник $FDML = CEFH = BCHG$. Таким образом прямоугольник $ABCD$ преобразован в гномон $ACHFLM$ и, следовательно,

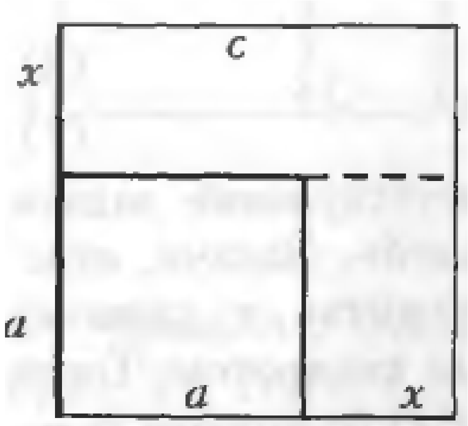
$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$



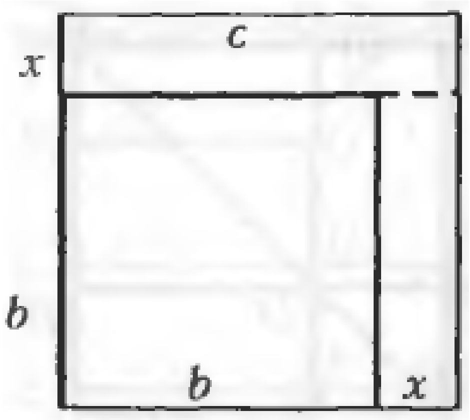

Здесь $AC$=$(a+b)/2$=$AM$, $CE$=$(a–b)/2$. Построим отрезок $NE$=$LE$=$AC$, тогда отрезок $CN$=x, поскольку $CN^2 = NE^2 - CE^2$ . Таким образом для решения уравнения $x^2 = ab$ в древней Индии использовалось тождество (*), которое доказано геометрически с помощью верхнего чертежа.

Два типа квадратных уравнений, которые решались в Греции, можно найти в комментарии Чжао Цзюнь-цина (III в. н.э.) к древнейшему китайскому «Трактату о чжоу-би» (II в. до н.э.).

Сначала он дает геометрическое обоснование двух симметричных тождеств $c^2 - a^2 = (c-a)(c+a)$ и $c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$, где речь идет о катетах гоу и гу прямоугольного треугольника: $c^2 = a^2 + b^2$.




Гномонообразная полоска, называемая в тексте «угольником из делимого для гоу» имеет площадь, равную $a^2$, и состоит из двух прямоугольников с площадями $cx$ и $bx$, где $x$=$c$−$b$. Следовательно,




$$cx + bx = x(c + b) = a^2, \text{ или } \quad a^2 = (c - b)(c + b),$$

откуда $$c^2 - b^2 = (c-b)(c+b).$$

Как указывает китайский историк науки Цянь Бао-цун, здесь дано геометрическое решение двух квадратных уравнений:

$$x^2 + 2bx = a^2 \text{ и } x^2 + 2ax = b^2,$$

корни которых соответственно равны $c - b$ и $c - a$.

Удивительно, но во всех приведенных примерах решаются только три типа квадратных уравнений, которые изложены в «Началах» Евклида.

Т.к. ни в Китае, ни в Индии не существовало развитой теоретической геометрии, то чертежи для этих тождеств нельзя считать утверждениями геометрических теорем, а только лишь записью соответствующих алгебраических тождеств или как решение алгебраических уравнений.

Этот же геометрический язык продолжал служить и в средневековой науке стран арабского Востока и в Европе. Он был заменен новым языком буквенного исчисления только в конце XVI в. (Франсуа Виет).

Поскольку **только в древней Греции** геометрия была построена как теоретическая наука, основанная на системе аксиом, то только здесь **геометрическая алгебра смогла получить дальнейшее развитие**: доказана дистрибутивность умножения относительно сложения, проведено исследование ограничений для существования положительного корня уравнения эллиптического типа, геометрически обоснована рекуррентная формула решения уравнения Пелля

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1 \text{ и т.д.}$$

Какие задачи можно решить средствами геометрической алгебры (с помощью циркуля и линейки)?

# ⇒ ЗНАМЕНИТЫЕ ЗАДАЧИ ДРЕВНОСТИ