ДРЕВНЯЯ ГРЕЦИЯ
VI в. до н.э. – VI в.н.э.

Наука в ее современном понимании возникла в Древней Греции.

«*Во всем мире нет ничего более удивительного и ничего более трудного для понимания, чем* ***внезапное возникновение цивилизации в Греции****. Многое из того, что создает цивилизацию, уже существовало в течение тысячелетий в Египте и Месопотамии и распространилось оттуда в соседние страны. Но некоторых элементов недоставало, пока они не были восполнены греками.*

Чего они достигли в искусстве и литературе, известно каждому, но то, что они сделали в чисто интеллектуальной области, является еще более исключительным. ***Они изобрели математику, науку и философию****; на место простых летописей они впервые поставили историю; они свободно рассуждали о природе мира и целях жизни, не обремененные путами какого-либо традиционного ортодоксального учения*...»

Б. Рассел «История западной философии»

Государство нового типа – *демократия.*

Полисы – Милет, Спарта, Афины и др.

Самоуправление – отвергается любое правление сверху, вопросы решаются сообща, поэтому важно уметь ***убедить***, ***доказать*** $\Rightarrow$ появляется **доказательство**:

1) установление истинности *(все доказать нельзя, поэтому нужны **аксиомы**)*;

2) установление связи между предложениями *(на Востоке – как решить задачу?, в Греции – почему?)*;

3) для открытия новых теорем (**√2**, *функция Вейерштрасса)*.

Источники: До наших дней дошло 45 математических текстов.

Периодизация математики Древней Греции

1. <u>Архаическая</u> эпоха – до середины V в. до н.э.: – самое начало!

– школы: Фалес, Пифагор, Парменид Великий…

– реконструируется по Геродоту (V до н.э.), Традициям семи мудрецов, сочинениям Платона, Аристотеля, Эвдема Родосского.

– появляется доказательство!!!

– **$\mu\alpha\tau\eta\mu\alpha\tau\alpha$ и древнегреческий квадривиум**:

арифметика, геометрия, гармония и астрономия.

2. **<u>Классическая</u> эпоха**: 450 до н.э. – 330 до н.э.

– развитие прозы, техники, истории, философии, математики;

– идентификация проблемы с именем исследователя;

– ощутимый прогресс в математических науках:

Гиппократ Хиосский, Архит из Тарента, Евдокс Книдский, Феодор из Кирены, Теэтет Афинский и др.;

– первый очерк истории арифметики, геометрии и астрономии Эвдема Родосского.

3. **Эллинизм**: 330 до н.э. – 30 до н.э.

– первые полностью сохранившиеся математические рукописи

– 1й период расцвета Александрийской школы:

Евклид, Архимед, Апполоний Пергский, Эратосфен, Никомед, Гиппарх…

4. **Римская эпоха**: 30 до н.э. – 250 н.э. и
Поздняя эпоха: 250 н.э. – 550 н.э.

– 2й период расцвета Александрийской школы:

Герон, Птолемей, Менелай, Диофант, Папп, Теон, Гипатия.

– Прокл Афинский, Евтокий Аскалонский, Симпликий Киликийский…

Архаическая Греция
(VI в.до н.э. – 450 г. до н.э.)

Самые знаменитые школы:

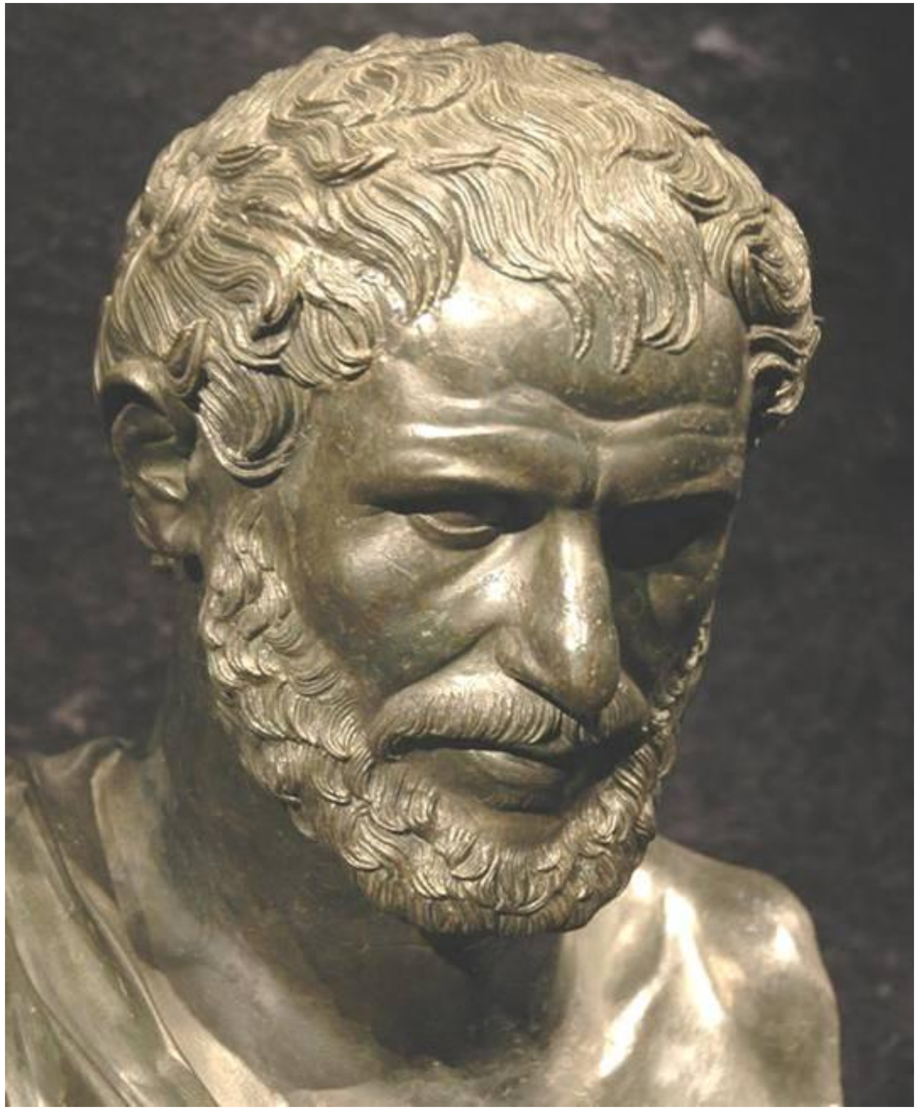
ФАЛЕС	ок. 624 до н.э. – 548 до н.э.
ПИФАГОР	ок. 570 до н.э. – 500 до н.э.
ПАРМЕНИД	ок. 540(?) до н.э. – 470 до н.э.

Философы: Анаксимандр, Анаксимен, Гераклит, Эмпедокл…

Поэты: Архилох, Сафо…

Трагедии: Фриних, Эсхил…

Фалес Милетский
ок. 637/624 до н.э. – 548/558 до н.э.



– прожил почти 90 лет;

– купец, политический деятель, философ, математик, астроном;

– один из семи мудрецов;

– предсказал затмение Солнца 585 г. до н.э.

– основатель Ионийской натурфилософской школы (Анаксимандр, Анаксимен…; попытки рационального объяснения математики), взгляды которой излагает Аристотель.

Прокл Афинский, V в. н.э.:

Ионийцы первыми** в Элладе занялись **геометрией.

1. Любой диаметр делит круг пополам.
2. Вертикальные углы равны.
3. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.
4. (*Эвдем Родосский*, ?) Если сторона и два прилегающих к ней угла одного треугольника равны стороне и двум прилегающим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
5. (*Памфила Эпидаврская*, эпоха Нерона, I в. н.э., ?) Любой вписанный треугольник, опирающийся на диаметр, прямоугольный.

ПИФАГОР и его школа

Родился около 570 г. до н.э. на острове Самос. Умер в 477 г. до н.э.

Отец – камнерез Мнесарх, чужестранец; мать – Партения, из знатной семьи.

Много путешествовал, после возвращения на Самос пришлось уехать в Кротон (Великая Греция), где основал ***Пифагорейский Союз***.

Самые известные пифагорейцы – **Архит** из Тарента, **Феодор** из Кирены.

Пророк и чудотворец.

*Так называемые **пифагорейцы**, занявшись математическими науками, впервые двинули их вперед и, воспитавшись на них, стали считать их начала началами всех вещей. Но в области этих наук **<u>числа</u>** занимают от природы первое место, а у чисел они усматривали, казалось им, много сходных черт с тем, что существует и происходит, – больше, чем у огня, земли и воды, например, такое-то свойство чисел есть справедливость, а такое-то – душа и ум, другое – удача, и, можно сказать, в каждом из остальных случаев точно так же.*

*Кроме того, они **видели в числах свойства и отношения, присущие гармоническим сочетаниям**. Так как, следовательно, все остальное явным образом уподоблялось числам по всему своему существу, а числа занимали первое место во всей природе, **элементы чисел они предположили элементами всех вещей и всю Вселенную [признали] гармонией и числом**.*

Аристотель. «Метафизика»

$$\mu\,\alpha\,\theta\,\eta\,\mu\,\alpha$$
$$\tau\,\alpha \quad \mu\,\alpha\,\theta\,\eta\,\mu\,\alpha\,\tau\,\alpha$$

арифметика, геометрия, гармония, астрономия

Арифметика среди прочих наук выделяется совершенством знания. Архит

По Пифагору математику нужно строить так:

1) все фигуры абстрактны, их свойства устанавливаются не измерениями, а рассуждениями;
2) должна быть система из конечного числа ***аксиом*** и некоторого числа **определений**.

1. АРИФМЕТИКА

Основа – число ($\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma$) – множество единиц $\Rightarrow$ сначала $\mathbb{N}$.

1. Единица **НЕДЕЛИМА**, дробей нет, а рассматриваются лишь отношения двух целых чисел. Начало теории рациональных чисел. Казалось, что этого достаточно для построения геометрии.
2. Платон: «*Арифметика есть* ***учение о четном и нечетном***» («Начала» Евклида, IX книга, предл. 21–34).

   Первая теорема теории делимости:
   «*Произведение двух чисел* ab *четное* $\Leftrightarrow$ *либо* a, *либо* b *четное*».

3. Учение о ***совершенных*** числах.

Совершенные числа – это числа, равные сумме всех своих делителей без самого числа:

6 = 1+2+3, **28** = 1+2+4+7+14, **496** = 1+2+48+16+31+62+124+248, 8 128 (Никомах, II в. до н.э.), 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328…

Сейчас известно 47 таких чисел. Неизвестно, бесконечно ли их количество.

Пифагорейцы: если сумма 1+2+4+…+$2^k = p$ – простое число, то $2^k p$ – совершенное.

Эйлер: Других четных совершенных чисел не существует.

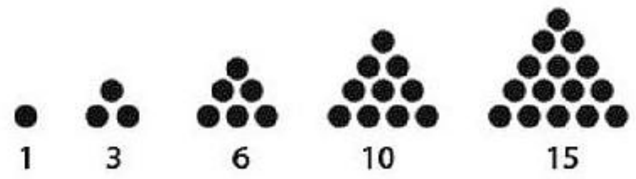
До сих пор не найдено ни одного нечетного совершенного числа.

4. ***Дружественные*** числа – числа, каждое из которых равно сумме делителей другого. Например, 284 и 220.

Ферма нашел такие сложные как 17296 и 18416.

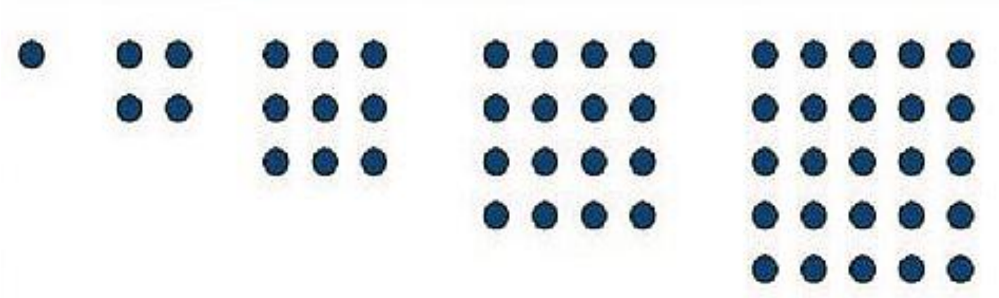
4. ***Фигурные*** числа и их свойства.

Треугольные числа обладают следующими свойствами:

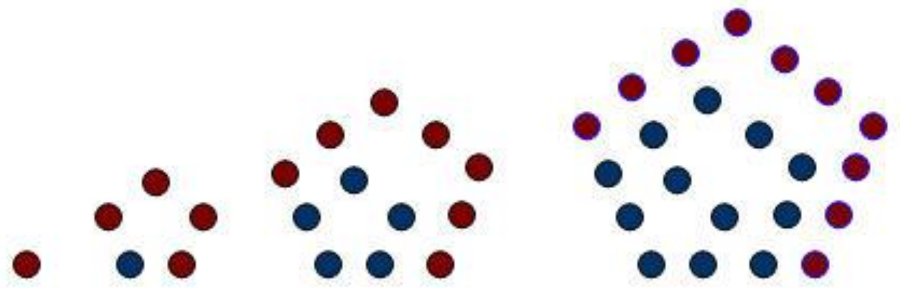


1. Сумма двух последовательных треугольных чисел дает полный квадрат – квадратное число.
2. Четность элемента последовательности меняется с периодом 4: нечетное, нечетное, четное, четное...
3. Каждое четное совершенное число является треугольным.

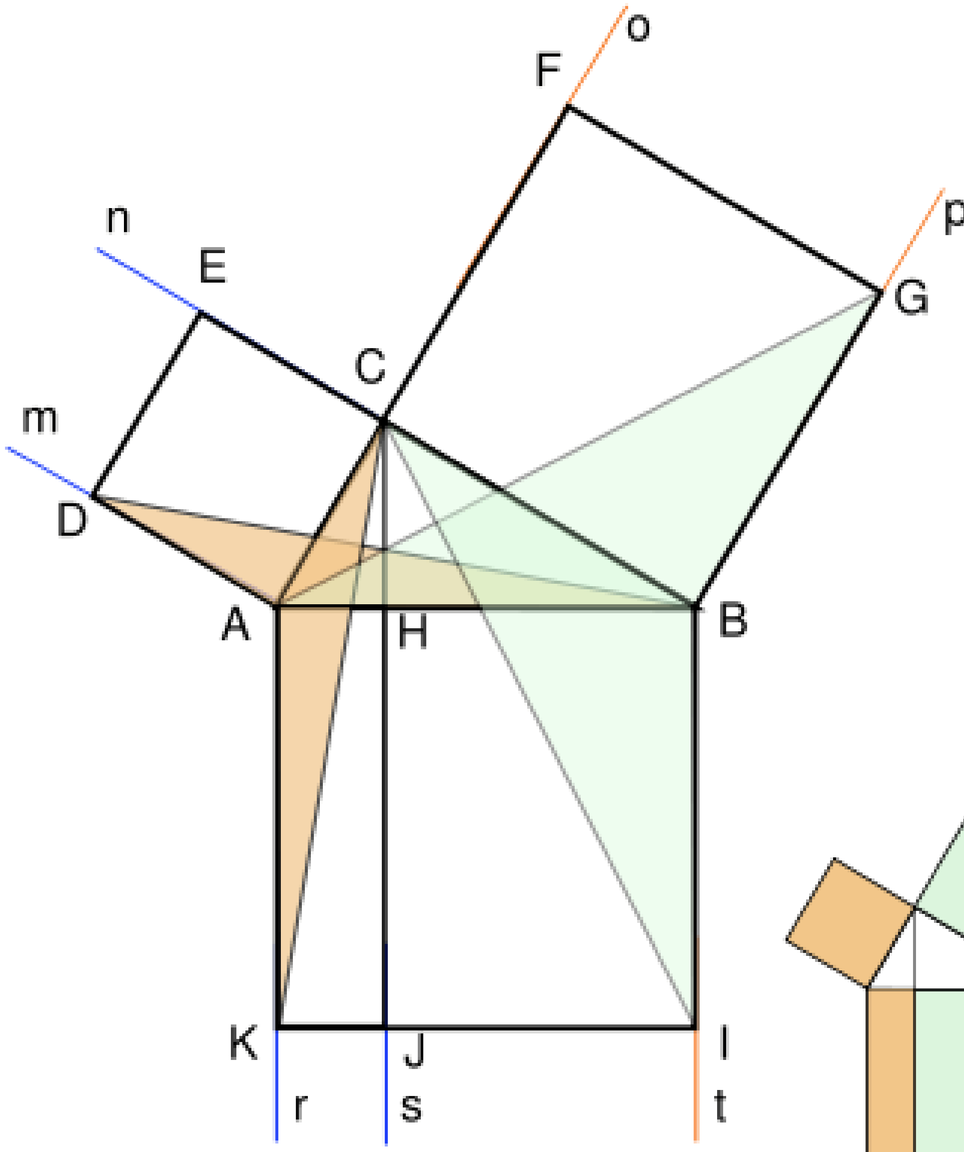
Квадратные числа

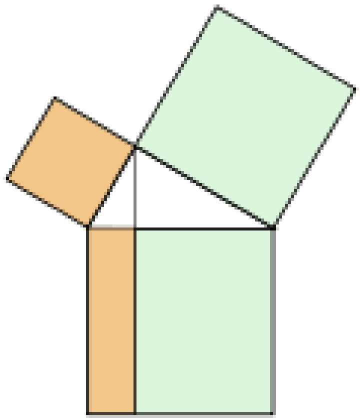


Пятиугольные числа



2. Геометрия основывалась на арифметике.





1. Развита вся планиметрия. Венец – теорема Пифагора. Все изложено в книге I «Начал» Евклида.
2. Развита теория подобия. Предполагали, что все отрезки соизмеримы, поэтому метрическая геометрия сводится к арифметике рациональных чисел.
3. Знали правильные пятиугольники – пентагон и пентаграмму, которые приводят к золотому сечению.

3. **Теория музыки**.

Звук зависит от длины струны.

С помощью двух струн разной длины можно получать разные **гармонические** созвучия: октава, квинта, кварта $\Rightarrow$ все музыкальные созвучия могут быть выражены через число $\Rightarrow$ мистика числа:

«***Все есть число***».

4. Астрономия

покоилась на модели, состоящей из 9 или 10-ти концентрических сфер со светилами (Солнце и планеты), вращающихся вокруг общего **центра Мира**, который мог быть разным в ***различных*** системах (в отличие от Вавилона): космос – живой, Земля – шар *посреди* Вселенной (уже пифагорейцы знали о **шар**образности Земли и объясняли смену дня и ночи ее **вращение**м).

Платон излагает представления **пифагор**ейцев в «Тимее»:

Земля в центре и совершает полный оборот за сутки. Вокруг нее еще 8 концентрических сфер – Меркурий, Венера, Марс, Юпитер, Сатурн, Солнце, Луна, неподвижные звезды.

Позже у **Филалая** (см. Аристотеля) в центре не Земля, а **центральный огонь**, свет и тепло которого передается Солнцем – прозрачным шаром, и есть Противоземлие.

У **Аристарха** Самосского в центре – Солнце.

Движение планет сводилось пифагорейцами к числовым соотношениям.

Тела, перемещаясь в пространстве, производят звуки, причем быстро движущееся тело издает более высокий звук, чем движущееся медленно. Согласно пифагорейской астрономии, чем больше расстояние от планеты до Земли, тем быстрее планета движется. Следовательно, звуки, издаваемые планетами, изменяются в зависимости от их удаленности от планеты до Земли, а все звуки подчиняются определенной гармонии. Как и всякая музыка, такая «**музыка сфер**» может быть сведена к числовым соотношениям.

Открытие несоизмеримых отрезков

– удар по всей стройной системе знаний пифагорейцев.

Значение этого открытия сравнимо с открытием неевклидовой геометрии или теории относительности.

Платон узнал о несоизмеримости довольно поздно и писал, что «*до этого был подобен неразумному животному*» (свинье). **Аристотель** неоднократно возвращался к этому вопросу: «*Все начинают с удивления, обстоит ли дело таким именно образом, как удивляются, например, загадочным самодвижущимся игрушкам, или солнцеворотам, или несоизмеримости диагонали, ибо всем, кто еще не усмотрел причину, кажется удивительным, если что-то нельзя измерить самой малой мерой*» (Meth. 983ª).

Аристотель излагает доказательство Пифагора: «*Если бы сторона и диагональ квадрата были бы соизмеримы, то нечетное равнялось бы четному*». (Первое доказательство от противного).

Аристотель в «*Первой аналитике*» излагает доказательство Пифагора:

Если бы сторона и диагональ квадрата были бы соизмеримы, то нечетное равнялось четному.

Здесь – **первое доказательство от противного:**

Пусть $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, что эквивалентно равенствам

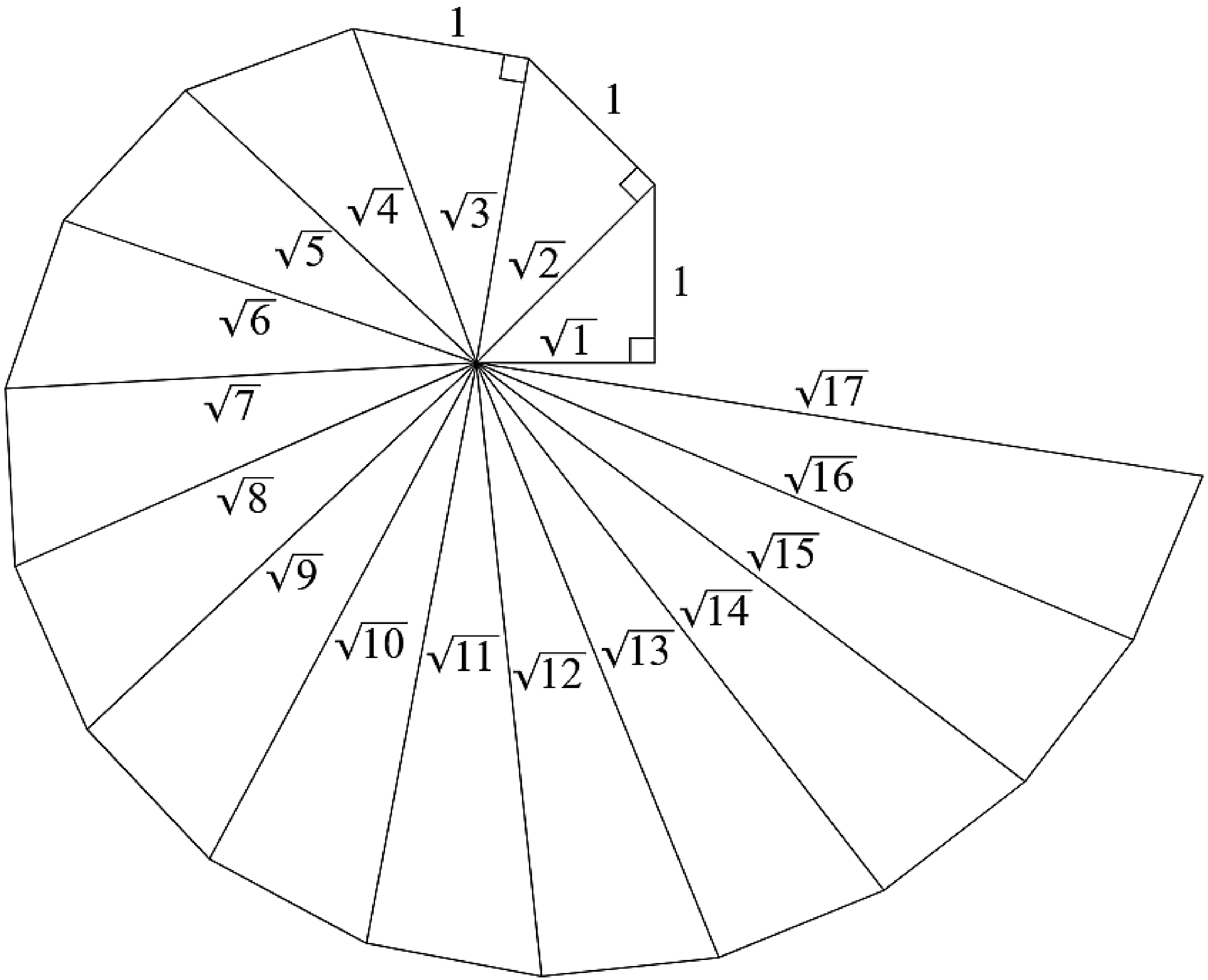
$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2.$$

Из последнего равенства следует, что m^2 четное число. Значит и m четно, так как если бы m было нечетным, то и m^2 было бы нечетным. Тогда m^2 кратно 4, например $m^2 = 4l^2$, и $n^2 = 2l^2$ четное число, откуда следует, что и число n четно. Таким образом, предположение о том, что $\sqrt{2}$ можно представить в виде несократимой дроби, привело к противоречию.

Вскоре были найдены и другие несоизмеримые отрезки Согласно Платону («Теэтет»), **Феодор из Кирены** показал, что стороны квадратов с площадями 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17 несоизмеримы со стороной единичного квадрата:

«*Т е э т е т. Вот Феодор объяснял нам на чертежах нечто о сторонах квадрата, [площадь которого выражена продолговатым числом], налагая их на трехфутовый и пятифутовый [отрезки] соответственно и доказывая, что по длине они несоизмеримы с однофутовым [отрезком]; и так перебирая [эти отрезки] один за другим, он дошел до семнадцатифутового. **Тут его что-то остановило**. Поскольку такого рода отрезков оказалось бесчисленное множество, нам пришло в голову попытаться найти какое-то их единое [свойство], с помощью которого мы могли бы охарактеризовать их все*.

Спираль Феодора из Кирены
(конец V – начало IV в. до н. э.)



Почему Феодор остановился на 17?

Существует **несколько реконструкций**.

1. ***J.H. Anderhub***, 1941:

Непосредственное построение цепочки прямоугольных треугольников объясняет, почему Феодор остановился: треугольник с гипотенузой $\sqrt{17}$ вторгается в область первого треугольника с гипотенузой $\sqrt{2}$, поскольку сумма всех внутренних углов прямоугольного треугольника превышает 360 градусов.

Но важнее понять: **КАК Феодор доказывал, что гипотенузы не имеют общей меры с единичным отрезком**!

2. ***O. Becker***:

Пусть $a_N = \sqrt{N} = \frac{p}{q}$ и N нечетно, т.к. при четном N доказательство аналогично доказательству для $\sqrt{2}$.

Тогда $p^2 = Nq^2 \ (*)$, следовательно, p нечетно.

1) Если p нечетное, то его квадрат должен иметь вид

$$p^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 8\left(n \cdot \frac{n+1}{2}\right) + 1 = 8m + 1$$

$$m \in \mathbb{Z}$$

2) Аналогично для нечетного q имеем

$$q^2 = 8k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$(*)$: $$8(m - Nk) = N - 1$$

Таким образом, число N должно удовлетворять уравнению в целых числах: $8S = N - 1$.

Если N=17, то есть решение S=2.

Возможно, этот момент и остановил Феодора.

3. Б. ван дер Варден возражает Андерхубу и Беккеру: «*Феодор был не арифметиком, а геометром*». Может быть, он доказывал несоизмеримость отрезков ***геометрически***? С помощью критерия, который есть в «Началах» Евклида (алгоритм Евклида):

X_2 : «*Если для двух величин при постоянном попеременном вычитании меньшей от большей остаток никогда не будет измерять предыдущий, то данные величины несоизмеримы*».

Ван дер Варден:

если можно показать, что в процессе попеременного вычитания после некоторого определенного числа действий получаются две линии, которые имеют друг к другу то же отношение, что и исходные, то можно заключить, что рассматриваемый процесс никогда не закончится. Но так действительно и обстоит дело для сторон квадратов с площадью 3, 5,..., 17 квадратных футов. Пусть, например, $w = w_3$ — сторона трехфутового квадрата, а $e = w_1$ — единица длины. В таком случае

$$\omega^2 = 3e^2.$$

Отнимем e от w; останется $w-e$. Мы, таким образом, получили два отрезка: e и $w-e$. Продолжая этот процесс, мы можем заменить e и $w-e$ любой другой парой отрезков, которые имеют то же самое отношение. Тогда

$$e:(w-e)=(w+e):2e, \tag{1}$$

так как произведение средних членов равно произведению крайних

$$(w-e)(w+e)=w^2-e^2=2e^2. \tag{2}$$

К отрезкам $w+e$ и $2e$ мы применим тот же самый процесс: отнимем $2e$ от $w+e$ и снова получим $w-e$. Теперь заменим $2e$ и $w-e$ двумя отрезками с тем же самым отношением

$$2e:(w-e)=(w+e):e. \tag{3}$$

Пропорция (3) доказывается точно так же, как и (1). Мы берем отрезки $w+e$ и e и снова отнимаем e от $w+e$, получаем w и e. Но это как раз те самые отрезки, с которых мы начали. Таким образом, наше соотношение повторяется: процесс будет периодическим и никогда не прекратится.

Равенство (2) может быть следующим образом доказано при помощи операций с площадями: w^2-e^2 (разность квадратов w^2 и e^2) представляет «гномон», как показано на рис. 74. Если мы отсечем его верхнюю часть и снова приставим ее справа, то получим прямоугольник со сторонами $w-e$ и $w+e$. Таким образом,

$$(w+e)(w-e)=w^2-e^2.$$

Этот способ доказательства совершенно аналогичен тому, который применялся пифагорейцами для приложения площадей с недостатком или избытком. Следовательно, в распоряжении Феодора были вспомогательные средства для того, чтобы дать это или подобное доказательство.

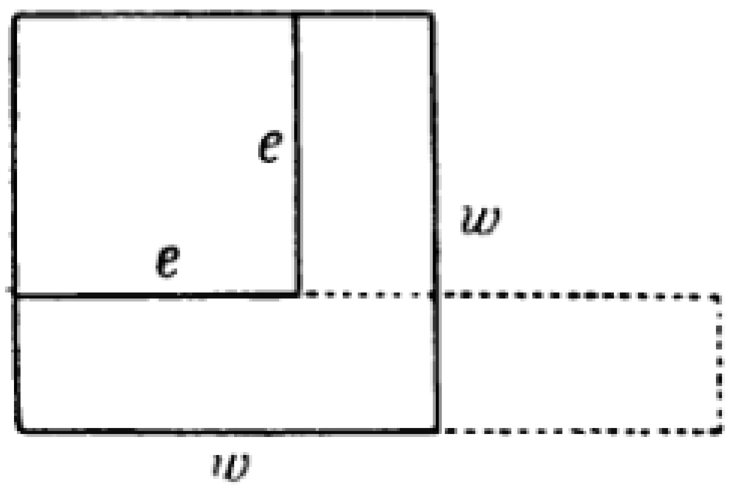


Рис. 74.

Аналогичное доказательство можно дать для всех случаев $w_3, w_5, w_6, \ldots, w_{17}$.

Случай w_{17}, а также w_5 особенно просты, потому что здесь требуется только одна пропорция

$$e:(w-4e)=(w+4e):e.$$

Следующий случай w_{18} не представляет интереса, так как $w_{18}=3w_2$. Напротив, w_{19} является особенно трудным, поскольку для него требуется целых шесть пропорций:

$$\begin{aligned}
e:(w-4e)&=(w+4e):3e,\\
3e:(w-2e)&=(w+2e):5e,\\
5e:(w-3e)&=(w+3e):2e,\\
2e:(w-3e)&=(w+3e):5e,\\
5e:(w-2e)&=(w+2e):3e,\\
3e:(w-4e)&=(w+4e):e,
\end{aligned}$$

которые все могут быть доказаны при помощи вычислений с площадями. Таким образом, вполне понятно, что Феодор в своем изложении остановился на $\sqrt{17}$.

"Конечно, нельзя думать, что доказательство Феодора было в точности таким, как описано выше, но, однако, в высшей степени вероятно, что для доказательства несоизмеримости до $\omega_3, \omega_5, \ldots, \omega_{14}$ *он пользовался именно критерием иррациональности 2-го предложения X книги «Начал»".*

Однако мы видим, что в реконструкции ван дер Вардена доказательство несоизмеримости имеет место не только для N=17, но и даже для N=18, сложности возникают лишь при N=19.

Домашнее задание 2: разобрать реконструкцию Ван дер Вардена доказательства иррациональности и доказать таким способом иррациональность $\sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{13}$.

4. J. Itard, 1961 предлагает реконструкцию, аналогичную рассуждениям Беккера, но с помощью сравнений по модулю и с помощью учения о четных и нечетных числах.

Итар: Если возможно равенство $p^2 = Nq^2$ (*), то сравнение разрешимо по любому модулю. Для доказательства невозможности достаточно показать, что существует какое-нибудь неразрешимое сравнение.

У древних было учение о четном и нечетном, поэтому рассмотрим сначала разрешимость по степеням 2. Можно показать, что если сравнение разрешимо по модулю 2, 4, 8, то оно разрешимо по модулю любой другой степени 2.

Значит, по Итару метод древних был эквивалентен рассмотрению трех сравнений:

$$z^2 \equiv N(mod\ 2) \qquad (1)$$

$$z^2 \equiv N(mod\ 4) \qquad (2)$$

$$z^2 \equiv N(mod\ 8) \qquad (3)$$

Феодор мог без труда показать, что при N = 3, 5,…, 15 сравнения (1)–(3) неразрешимы. Но для N=17 они все разрешимы:

$$z^2 \equiv 17(mod2) \equiv 1(mod2),$$

$$z^2 \equiv 17(mod4) \equiv 1(mod4), \qquad z^2 \equiv 17(mod8) \equiv 1(mod8)$$

Следовательно никакого заключения относительно возможности (*) сделать нельзя.

Ученик Феодора **Теэтет** Афинский доказал, что если площадь квадрата выражается любым неквадратным числом, то его сторона несоизмерима со стороной единичного квадрата, т.е. обобщил результат учителя:

«*Отрезки прямой линии, производящей квадрат, площадь которого является целым, но не квадратным числом, не имеют общей меры с единицей длины*».

Для доказательства необходима общая теория делимости, и в год смерти Сократа (399 г. до н.э.) Теэтет создает ее. Изложена в **VII и части IX книг «Начал» Евклида**.

С ее помощью Теэтет выделил бесконечный класс иррациональностей вида $\sqrt{N}$, где N– натуральное число, не являющееся полным квадратом и предложил классификацию этих иррациональностей, а также получил ряд результатов, изложенных позже Евклидом в **X книге «Начал»**. В этой книге намечено построение *пифагорова* поля $\boldsymbol{\Omega}$ – минимального поля, в котором разрешимо любое уравнение вида $x^2 = a^2 + b^2$. Здесь же доказывается, что соизмеримые величины относятся друг к другу как число к числу, т.е. множество рациональных чисел вложено во множество действительных чисел.

Книга X "Начал" Евклида наиболее длинна (115 предложений) и трудна для понимания. Особенно ощущается недостаток удобной символики, из-за отсутствия которой изложение становится очень громоздким и тяжеловесным. Совершенно неудобочитаема.

1950 Б.Л. Ван дер Варден "***Пробуждающаяся наука***":

"*До X, 28 все еще сносно, но затем с X, 29 начинаются доказательства существования: «Найти два потенциально соизмеримых выразимых отрезка так, чтобы разность построенных на них квадратов равнялась квадрату на отрезке, соизмеримом с большим из них» и т. п., и тут уже действительно не легко понять, к чему все это нужно.*

Автор удивительно умеет скрывать ход своих мыслей; начиная с построения, он не вводит даже понятия о биномиали, которое могло бы как-то прояснить цель его построений, и только уже в самом конце он дает разделение биномиалей на шесть видов".

В 1585 г. Симон Стевин: "*Трудности десятой книги… привели многих в ужас, и дело дошло до того, что ее называют "крестной казнью математиков", материя сия не поддается угрызению и в ней не обнаруживают ни малейшей пользы"*.

После открытия иррациональных чисел в греческой математике был сделан вывод о том, что множество отрезков богаче, чем множество положительных рациональных чисел, и **в основу математики положили геометрию** – возникла **геометрическая алгебра**.