

# ДРЕВНИЙ ВАВИЛОН





Первоначально культура Древней Месопотамии возникла на берегу Персидского залива. Именно здесь, в дельте Тигра и Евфрата в IV тысячелетии до н.э. жили шумеры, построившие города Ур, Урук (под именем Эрех он упоминается в Библии), Лагаш и Ларса. Севернее жили семиты-аккадяне, главным городом которых был Аккад.

До середины III тысячелетия до н.э. каждый город с его окрестностями был отдельным государством и, естественно, что времена мира и времена войн чередовались.

Уже в середине IV тысячелетия до н.э. в Шумере была письменность. Ее памятники по возрасту старше всех других, дошедших до наших дней. Основным материалом для письма служили каменные, а затем глиняные плитки, на которых острым предметом выцарапывались надписи.

Клинописные глиняные таблички, упомянутые выше, в огромных количествах стали поступать в Европу в результате археологических изысканий в середине прошлого века. Так, в **1849–50** гг. в развалинах древней ассирийской столицы Нина и Семирамиды – города Ниневии археолог Лейярд нашел дворцовую библиотеку, а в **1853** г. Хорзмунд Рассам открыл библиотеку ассирийского царя Ашшурбанипала, правившего в VII в. до н.э.

20 000 табличек из этих раскопок хранятся сейчас в Британском музее в Лондоне. **Всего** же глиняных табличек в мире насчитывается около **500 000**.





Расшифровка шла медленно.

1929–30 гг.

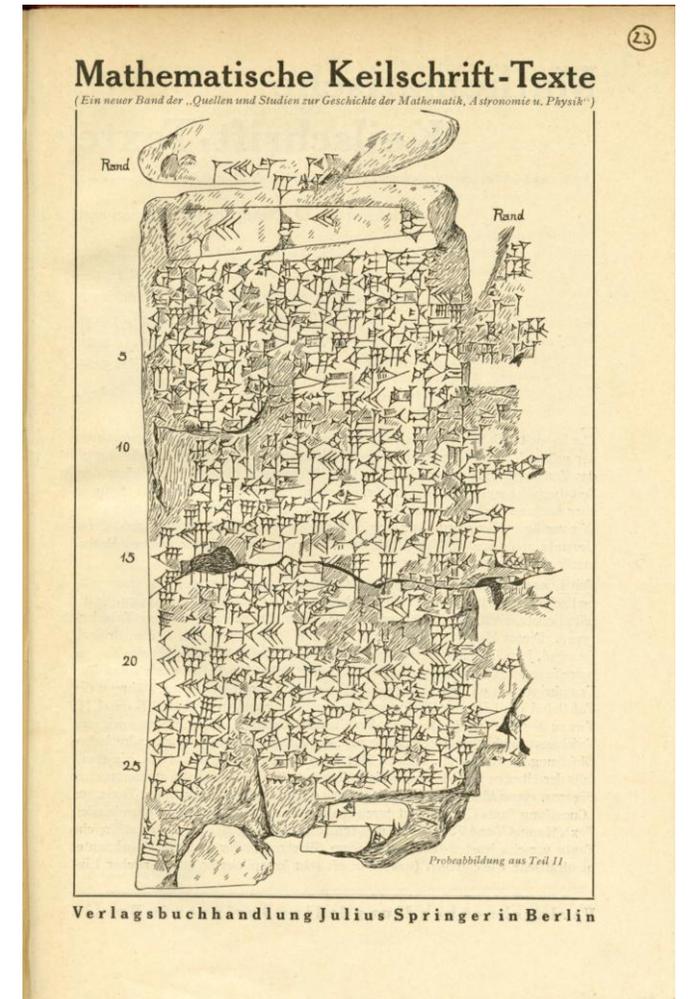
Отто **Нейгебауер**, ученик  
Гильберта и Куранта

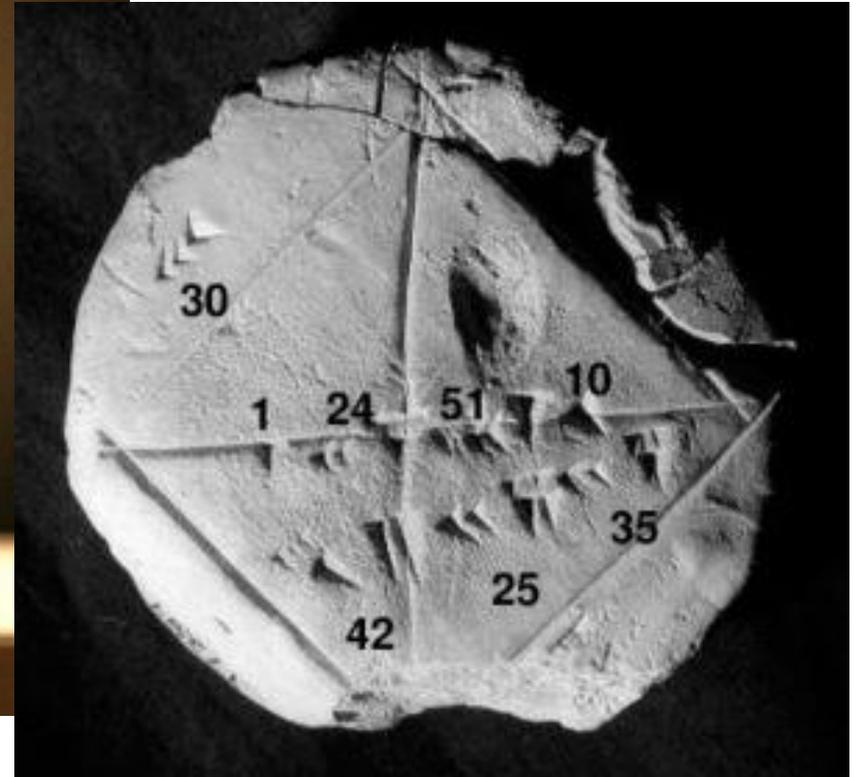
с 1935 г. –

публикация «Математических»  
табличек.

Систематическая публикация текстов  
– Ф. Туро-Данжен.

Занимались: А. Сакс, Э.М. Бройнс,  
М.Я. Выгодский, И.Н. Веселовский,  
А.А. Вайнман и др.





Как и в Египте, профессия писца была почетной:

*“Тот, кто в совершенстве владеет искусством писать на табличках, будет сверкать, подобно солнцу.”*

Нередко сыновья правителей избирали эту профессию, ведь писцы относились к правящему классу.

Школа или академия, в которой обучались писцы, называлась **“Дом табличек”**.

*“Писец должен уметь писать понятно, хорошо знать счет, уметь межевать земли, примирять спорящих”,* – так писал один из учеников своему другу.

**Система счисления – позиционная, шестидесятиричная, которая сочеталась с более ранней десятичной.**



Такая система счисления позволяла вавилонянам записывать не только целые числа, но и дроби!

Но шестидесятиричные конечные дроби поле не образуют (например,  $1/7$  не представима)  $\Rightarrow$  **много приближений** – одна из характерных особенностей вавилонской математики.

# Математические таблицы

**Использование большого количества всевозможных таблиц – еще одна особенность вавилонской математики.**

- 1. Тексты-таблицы:** таблицы умножения;  
таблицы квадратов;  
таблицы обратных чисел;  
таблицы кубов;  
таблицы квадратных корней;  
таблицы сумм кубов и квадратов ...  
$$n^3 + n^2$$

- 2. Тексты-задачники.**

## Арифметика древних вавилонян

1. Задачи на арифметические и геометрические прогрессии.

Знали сумму первых членов арифметической прогрессии, знания более развиты, чем у египтян.

2. Много задач на проценты.

3. Формула приближенного вычисления квадратного корня из числа  $\sqrt{N} = \sqrt{a^2+r} \approx a+r/(2a) = x_1$ .

Использование приближений, которые позже можно встретить у Герона Александрийского (I в. н.э.):

$$x_2 \approx 1/2 (x_1 + N/x_1)$$

# Алгебра

## 1. **КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ**, к ним сводящиеся:

Большое количество однотипных задач, которые можно назвать каноническими и записать в виде:

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ xy = b \end{cases}, \quad \begin{cases} x \pm y = a \\ x^2 + y^2 = b^2 \end{cases}, \quad ax^2 \pm bx = c.$$

Как правило,  $x$  – длина,  $y$  – ширина (всегда длина больше ширины),  $xy$  – площадь, иногда встречается глубина. Но несмотря на геометрические названия принципа однородности древних греков нет.

Зато существуют и более абстрактные названия неизвестных величин: «множимое» и «обратное к нему».

## «Квадрат и сторона 0; 45»

1. Возьми 1.
2. Пополам 0;30.
3.  $0;30 \times 0;30 = 0;15$ .
4.  $0;15 + 0;45 = 1$ .
5. Что на что надо умножить, чтобы получить 1: 1.
6.  $1 - 0;30 = 0;30$  – искомая сторона.

$$x^2 + px = q$$

$$p$$

$$p/2$$

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4}$$

$$(p/2)^2 + q$$

$$\sqrt{(p/2)^2 + q}$$

$$\sqrt{(p/2)^2 + q} - \frac{p}{2} = x$$

## «Множимое и обратное 2;30»

1. На 0;30 умножь: 1;15

2. 1;15 на 1;15 умножь:  
1;33,45

3. 1 вычти отсюда

4. Что на что надо умножить,  
чтобы 0;33,45 получить:  
0;45

5. 0;45 к 1;15 прибавь: 2 –  
множимое

6. 0;45 от 1;15 вычти: 0;30 –  
обратное

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

$$a/2$$

$$(a/2)^2$$

$$(a/2)^2 - b$$

$$\sqrt{(a/2)^2 - b}$$

$$\frac{a}{2} + \sqrt{(a/2)^2 - b} = x$$

$$\frac{a}{2} - \sqrt{(a/2)^2 - b} = y$$

Мы видим последовательность решения квадратного уравнения, эквивалентного заданной системе. Никаких пояснений нет, но дается большое число однотипных задач.

Как получен алгоритм решения? Существуют различные гипотезы на этот счет. Одна из них:

Пусть множимое и обратное ему различны, тогда в качестве вспомогательной величины можно взять величину, на которую множимое и обратное отличаются

от половины их суммы:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + t \\ y = \frac{a}{2} - t \end{cases}$$

Тогда второе уравнение заданной системы дает простейшее квадратное уравнение

$$t^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b,$$

которое решается извлечением квадратного корня.

Анализ этой гипотезы позволяет сделать вывод, что вавилоняне:

- **знали подстановки;**
- **умели раскрывать скобки;**
- **знали формулу квадрата двучлена.**

Это же подтверждают и другие, Неканонические, задачи, которые можно найти в клинописных таблицах. Например:

*«Длина, ширина. Длину и ширину я перемножил и площадь получил. Затем избыток длины над шириной я прибавил к площади: 183 получилось у меня. Затем длину и ширину я сложил: 27.*

*Спрашивается: длина, ширина и площадь».*

Итак, задана система  $\begin{cases} (x - y) + xy = 183 \\ x + y = 27 \end{cases}$  или  $\begin{cases} (x - y) + xy = a \\ x + y = b \end{cases}$

«Ты сделаешь так:  $27 + 183 = 210$  (\*)

$2 + 27 = 29$ » (\*\*)

и затем решается каноническая система 
$$\begin{cases} uv = 210 \\ u + v = 29 \end{cases} \quad (***)$$

В результате получается:  $x = u = 15, \quad y = v - 2 = 12.$

Очевидно, что уравнение (\*) получено в результате сложения уравнений исходной системы:  $xy + 2x = 210.$

**Если вынести общий множитель**  $x(y + 2) = 210$

и **обозначить**  $x = u, \quad y + 2 = v$ , то получится система (\*\*\*)

⇒ древние вавилоняне умели выносить общий множитель и делать подстановки!

Всё только в числах  $\Rightarrow$  речь идет о **ЧИСЛОВОЙ** алгебре.

**Как возникли квадратные уравнения?**

$\Rightarrow$  Обращение задач.

## 2. КУБИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ДРЕВНЕМ ВАВИЛОНЕ

Есть шесть задач трех типов: пусть  $x$  – длина,  $y$  – ширина,  $z$  – высота.

$$1. \quad \begin{cases} xyz = 3/2 \\ y = x \\ z = 12x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 12x^3 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

$$2. \quad \begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} xyz = 7/4 \\ y = x \\ z = 12x + 1 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} xy(z + 1) = 1/18 \\ y = x \\ z = 12x + 7 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} xy(z + 1) = 7/6 \\ y = \frac{2}{3}x \\ z = 12x \end{cases} \end{array}$$

$$3. \quad \begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} xy(z + 1) = 7/6 \\ x + y = 5/6 \\ z = 12x \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} xy(z + 1) = 7/6 \\ x - y = 1/6 \\ z = 12x \end{cases} \end{array}$$

**Задачи типа 2** Нейгебауэр называет задачами «канонического» типа.

Для решения этих задач **важно** учесть **единицы измерения**:

– длина и ширина измерялись в *гарах*, а высота – в *локтях*;

1 *гар* = 12 *локтей*;

– объем – в сарах: 1 *сар* = 1 кубический *гар* = 1 *гар* × 1 *гар* × 1 *гар*.

Задача 2а). Запишем условие в локтях: 
$$\begin{cases} 12x \cdot 12y \cdot z = 7/4 \cdot 12 \cdot 12 \\ 12y = 12x \\ z = 12x + 1 \end{cases} .$$

Тогда первое уравнение дает:  $(12x)^3 + (12x)^2 = 252$ .

Для решения этого уравнения используется таблица  $n^3 + n^2$  для всех  $n = 1, \dots, 60 \Rightarrow n = 6$  локтей, поэтому  $x = 1/2, y = 1/2, z = 7$ .

Задача 2b) решается точно так же.

Задача 2с). Запишем условие в локтях  $\begin{cases} 12x \cdot 12y \cdot z = 1/18 \cdot 12 \cdot 12 \\ 12y = 12x \\ z = 12x + 7 \end{cases}$

Подставляя все в первое уравнение, получаем:

$$(12x)^3 + 7(12x)^2 = 8.$$

Вавилоняне сразу дают ответ:  $12x = 1$ . Как он получен, неизвестно.

Может быть, очевидным подбором?

Может быть, существовали таблицы типа  $n^3 + 2n^2, n^3 + 3n^2, \dots,$   
 $n^3 + 7n^2, \dots$       Ответа у нас нет.

**Задачи типа 3** Нейгебауэр называет задачами «**общего**» типа. Запишем эти системы в параметрическом виде:

$$\begin{cases} xy(z + 1) = a \\ x \pm y = b \\ z = kx \end{cases}$$

Для решения этих задач сначала вычисляется величина  $\frac{1}{b^3} \left( x^2 y + \frac{xy}{k} \right)$ .  
Что это такое? Нетрудно видеть, что

$$x^2 y + \frac{xy}{k} = xy \left( x + \frac{1}{k} \right) = xy \cdot \frac{1}{k} (z + 1) = \frac{a}{k};$$

после деления на  $b^3$  получаем:

$$\frac{x}{b} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{\left(x + \frac{1}{k}\right)}{b} = \frac{1}{b^3} \cdot \frac{a}{k}.$$

В задаче **3b** получается уравнение  $6x \cdot 6y \cdot \left(6x + \frac{1}{2}\right) = 21$  и **без объяснения** утверждается:  $6x=3$ ,  $6x + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ ,  $6y=2$ , откуда уже легко найти ответ.

В работе **К. Фогеля** «*Кубические уравнения в Древнем Вавилоне*», помещенной в качестве приложения к «*Лекциям по истории античных математических наук*» **О. Нейгебауэра** (М.-Л., 1937. Том 1. Догреческая математика. С. 233–239) дается очень интересная гипотеза о том, как можно средствами вавилонской математики получить такое решение.

Скачать книгу можно по ссылке:

**pdf:** <https://math.msu.ru/node/1249>

**djvu:** <http://pyrkov-professor.ru/default.aspx?tabid=184&ArticleId=570>

**Домашнее задание:**

**Изложить подробно решение Фогеля задачи 3а и прислать мне по почте [galina.smirnova@math.msu.ru](mailto:galina.smirnova@math.msu.ru)**

### 3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

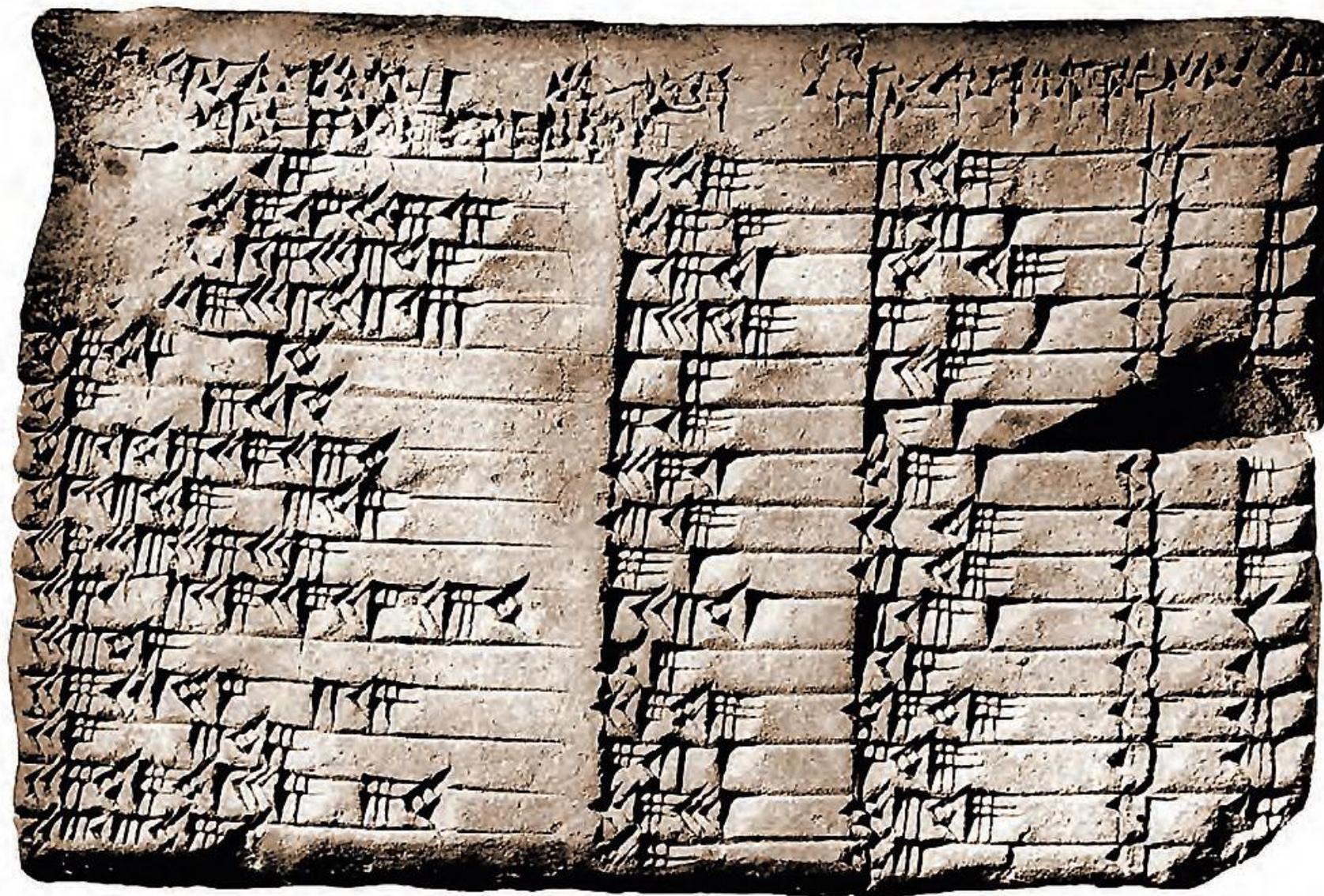
Самым древним и самым знаменитым примером неопределенного уравнения является уравнение, выражающее зависимость между сторонами прямоугольного треугольника:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Это утверждение всем известно как “теорема Пифагора”, хотя никаких доказательств, что Пифагор первым доказал его, нет.

Поскольку существует бесконечное множество прямоугольных треугольников, то существует и бесконечное множество решений этого уравнения, и задача состоит в том, чтобы найти все эти решения.

# Плимптон 322





**В оригинале** в таблице пять столбцов. В четвертом указан номер строки, во втором – один из катетов, в третьем – гипотенуза, в последнем – второй катет, **в первом** (самое загадочное! зачем???) – **квадрат отношения гипотенузы ко второму катету** (косеканс??? в квадрате).

Все числа на следующем слайде – в шестидесятиричной системе счисления.

Египетский треугольник на предыдущем слайде и на следующем находится в строке 11 в виде (60; 45; 75).

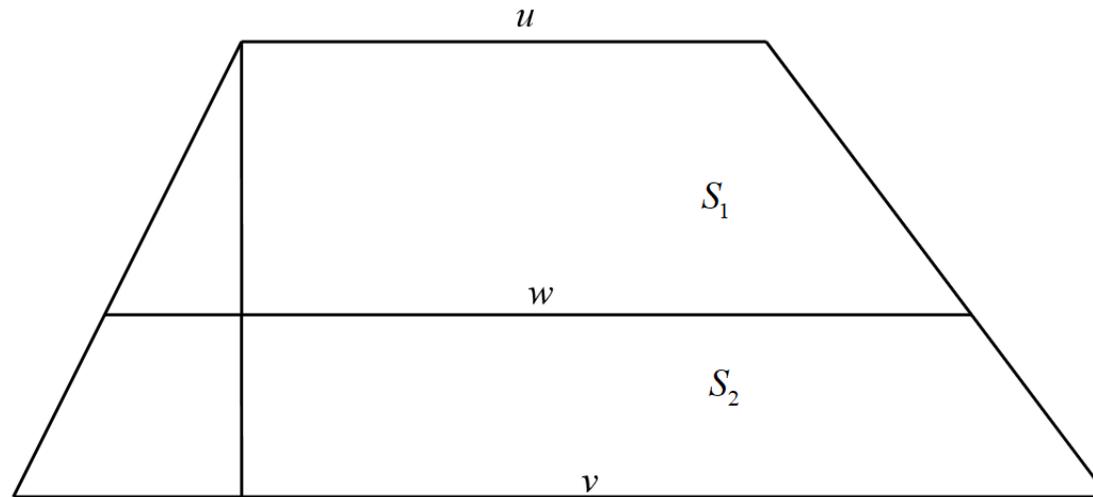
I.	II. <i>b</i>	III. <i>d</i>	IV.	<i>l</i>
(1) 59 00 15	1 59	2 49	1	2 00
(1) 56 56 58 14 50 06 15	56 07	3 12 1 [1 20 25]	2	57 36
(1) 55 07 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3	1 20 00
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4	3 45 00
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	5	1 12
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	6	6 00
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7	45 00
(1) 41 33 59 03 45	13 19	20 49	8	16 00
(1) 38 33 36 36	9 01 [8 01]	12 49	9	10
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10	1 48 00
(1) 33 45	45	1 15	11	1 00
(1) 29 21 54 02 15	27 59	48 49	12	40 00
(1) 27 00 03 45	7 12 1 [2 41]	4 49	13	4 00
(1) 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14	45 00
(1) 23 13 46 40	56	53 [1 46]	15	1 30

Номер строки	$l$	$b$	$d$
1	120	119	169
2	3456	3367	4825
3	4800	4601	6649
4	13500	12709	18541
5	72	65	97
6	360	319	481
7	2700	2291	3541
8	960	799	1249
9	600	481	769
10	6480	4961	8161
11	60	45	75
12	2400	1679	2929
13	240	161	289
14	2700	1771	3229
15	90	56	106

Это – современное изображение пифагорейских троек, которые находятся в таблице. Показаны первые 15 строк из **38 (!!!)**.

Задача, решения которой называются «**вавилонскими тройками**», также имеет геометрическую природу: расечь данную трапецию на две равновеликие части прямой, параллельной основаниям.

Обозначив параллельные отрезки через  $u$ ,  $v$  и  $w$ , получим  
 $u^2 + v^2 = 2w^2$ .



Существует табличка, в которой рядом изображены пифагорейские и вавилонские тройки (след. слайд), следовательно, можно утверждать, что вавилоняне знали связь между ними.

Существует таблица, в которой изображены сразу и пифагорейские, и вавилонские тройки:

3	4	5	7	1	5	
5	12	13	17	7	13	...
7	24	25	31	17	25	

⇒ знали связь: если  $\begin{cases} x = p^2 - q^2 \\ y = 2pq \\ z = p^2 + q^2 \end{cases}$ , то  $\begin{cases} u = x - y = (p - q)^2 \\ v = x + y = (p + q)^2 \\ w = z = p^2 + q^2 \end{cases}$

Более того, они умели, опираясь на одно решение вавилонского уравнения с помощью **формулы(?!) композиции форм (?!!)** находить два других!!! (таблица из Суз № 20, Э.М. Бройнс)

*Формула композиции форм*

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 = (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2 (*)$$

Действительно, пусть  $(u, v, w)$  – некоторая вавилонская тройка, тогда, взяв пифагорейскую тройку  $(x, y, z)$  такую, что  $z = 1$  (такие таблицы в Древнем Вавилоне существовали), можно получить еще две другие вавилонские тройки:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) &= 1 \cdot 2w^2 = \\ &= 2w^2 = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 \\ &= (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2\end{aligned}$$

Т.е.  $u_1 = |xu - yv|, \quad v_1 = xv + yu, \quad w_1 = w$

и  $u_2 = xu + yv, \quad v_2 = |xv - yu|, \quad w_2 = w.$

Мы видим, что вавилонянам была известна весьма сложная формула (\*)!!! И в дальнейшем она играла существенную роль у Диофанта, и на средневековом арабском Востоке, и в Европе XIII-XVII вв.