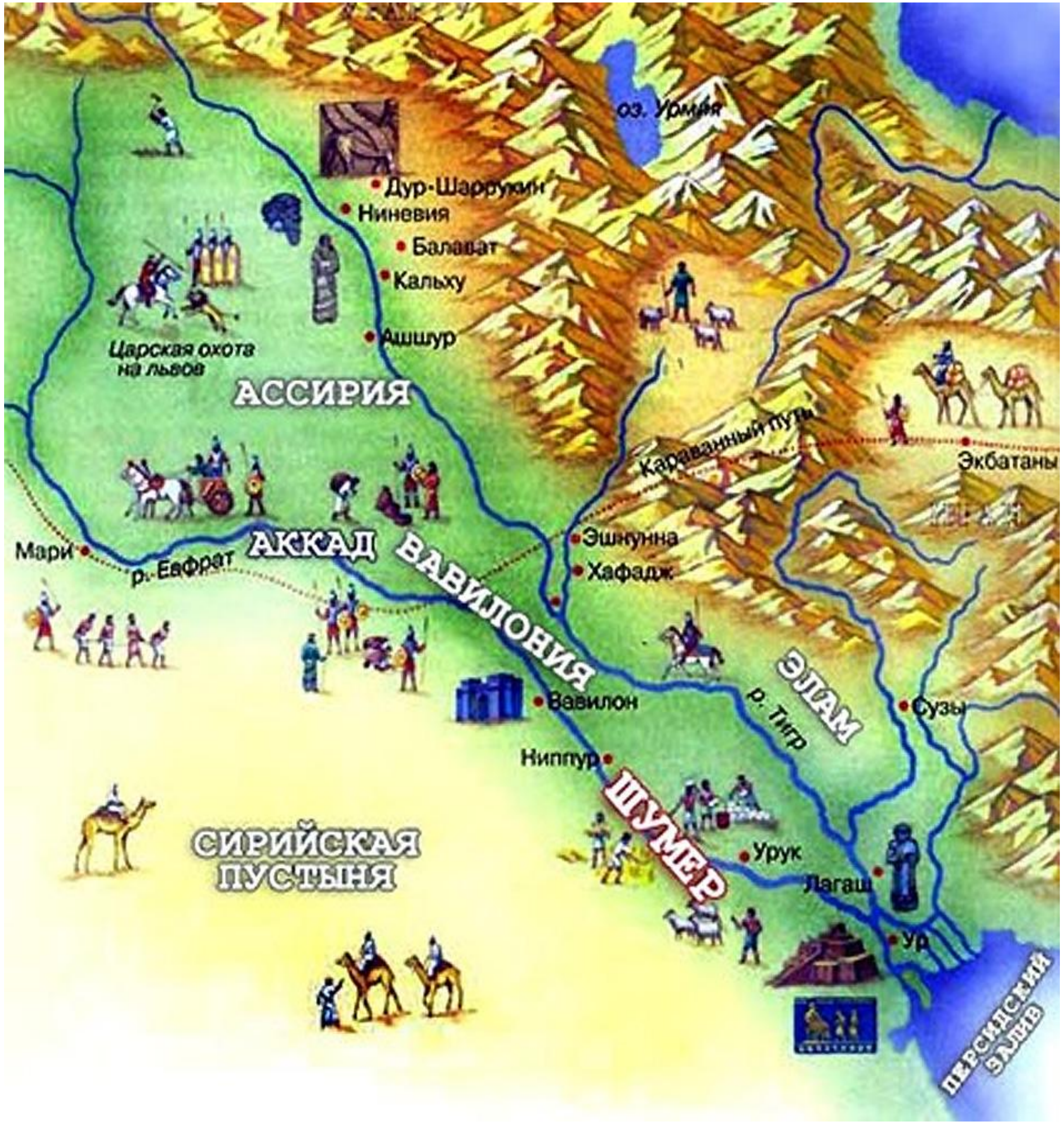
ДРЕВНИЙ ВАВИЛОН



Первоначально культура Древней Месопотамии возникла на берегу Персидского залива. Именно здесь, в дельте Тигра и Евфрата в IV тысячелетии до н.э. жили шумеры, построившие города Ур, Урук (под именем Эрех он упоминается в Библии), Лагаш и Ларса. Севернее жили семиты-аккадяне, главным городом которых был Аккад.

До середины III тысячелетия до н.э. каждый город с его окрестностями был отдельным государством и, естественно, что времена мира и времена войн чередовались.

Уже в середине IV тысячелетия до н.э. в Шумере была письменность. Ее памятники по возрасту старше всех других, дошедших до наших дней. Основным материалом для письма служили каменные, а затем глиняные плитки, на которых острым предметом выцарапывались надписи.

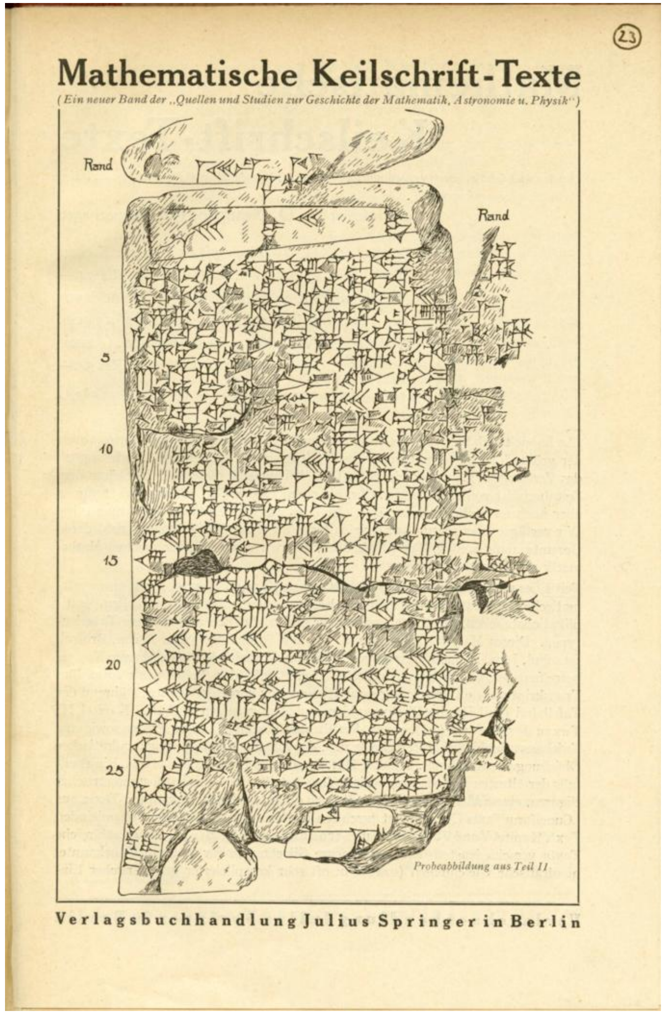
Клинописные глиняные таблички, упомянутые выше, в огромных количествах стали поступать в Европу в результате археологических изысканий в середине прошлого века. Так, в **1849–50** гг. в развалинах древней ассирийской столицы Нина и Семирамиды – города Ниневии археолог Лейярд нашел дворцовую библиотеку, а в **1853** г. Хорзмунд Рассам открыл библиотеку ассирийского царя Ашшурбанипала, правившего в VII в. до н.э.

20 000 табличек из этих раскопок хранятся сейчас в Британском музее в Лондоне. **Всего** же глиняных табличек в мире насчитывается около **500 000**.

Расшифровка шла медленно.

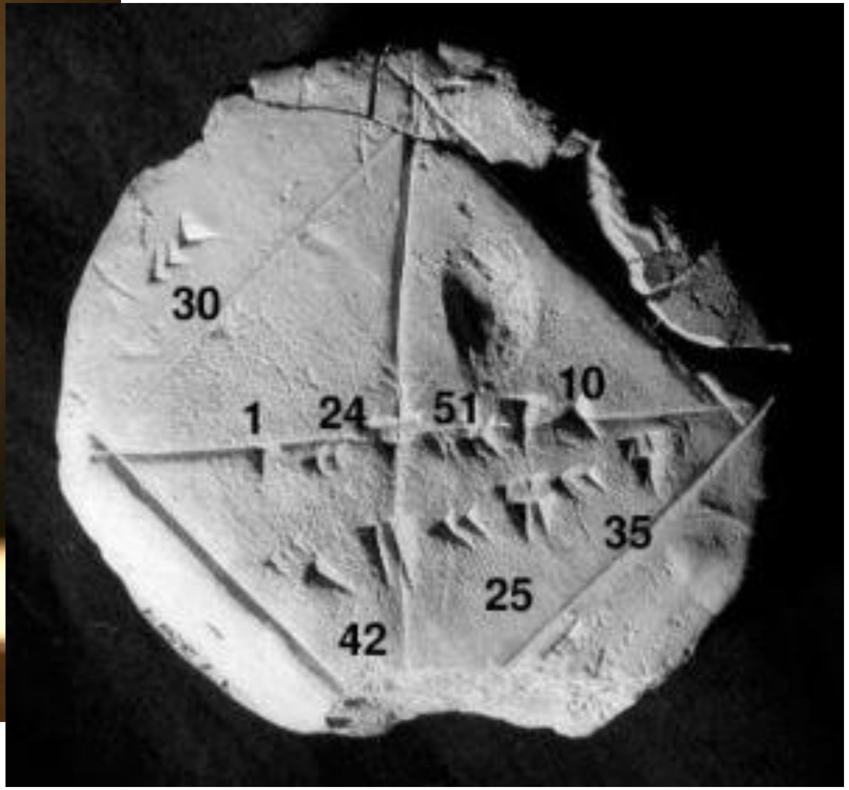
1929–30 гг. Отто **Нейгебауер,** ученик Гильберта и Куранта

с 1935 г. – публикация «Математических» табличек.



Систематическая публикация текстов – Ф. Тюро-Данжен.

Занимались: А. Сакс, Э.М. Бройнс, М.Я. Выгодский, И.Н. Веселовский, А.А. Вайнман и др.


30
1
24
51
10
35
25
42

Как и в Египте, профессия писца была почетной:

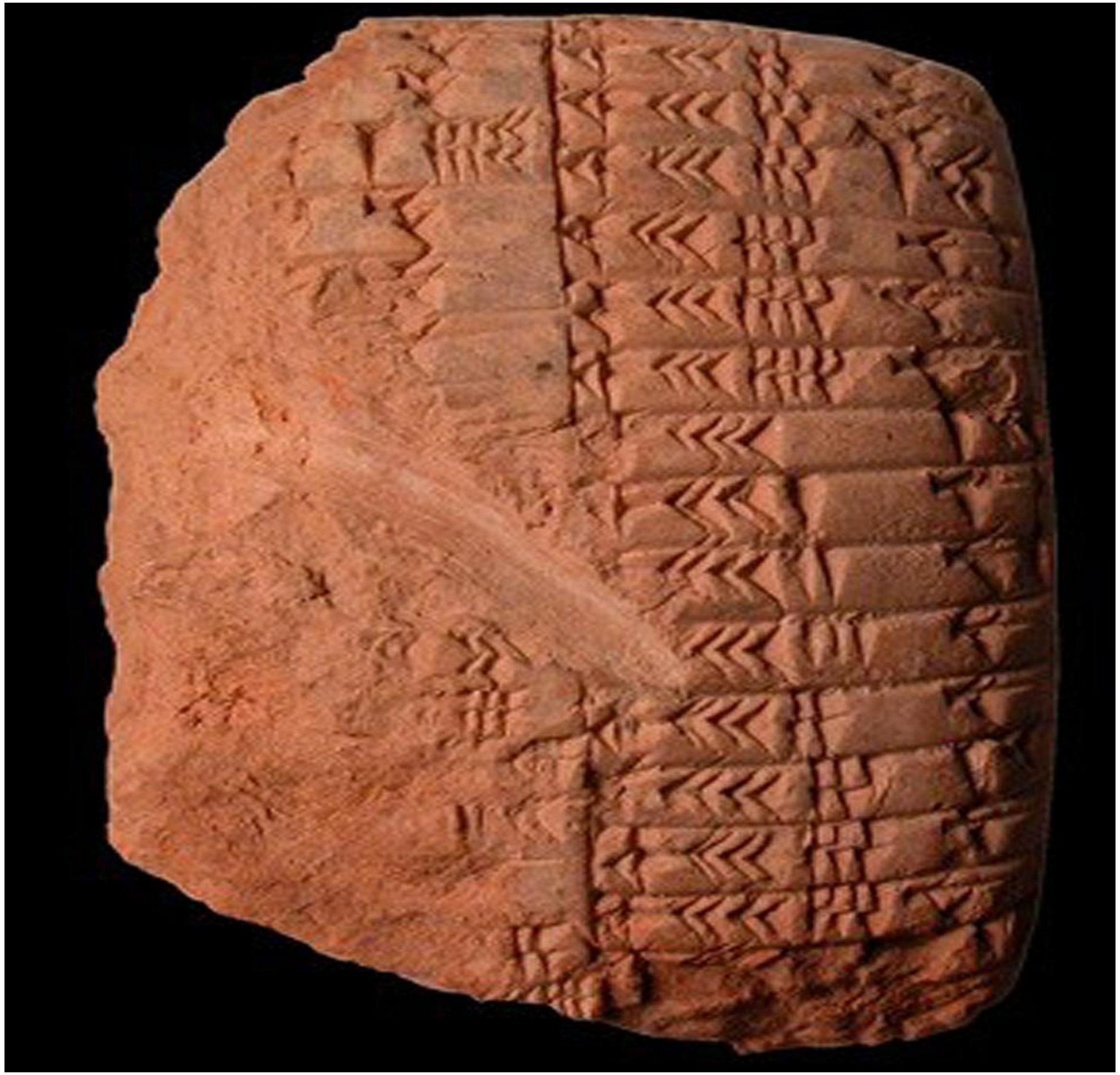
“Тот, кто в совершенстве владеет искусством писать на табличках, будет сверкать, подобно солнцу.”

Нередко сыновья правителей избирали эту профессию, ведь писцы относились к правящему классу.

Школа или академия, в которой обучались писцы, называлась **“Дом табличек”.**

“Писец должен уметь писать понятно, хорошо знать счет , уметь межевать земли, примирять спорящих”, – так писал один из учеников своему другу.

Система счисления – позиционная, шестидесятиричная, которая сочеталась с более ранней десятичной.



Такая система счисления позволяла вавилонянам записывать не только целые числа, но и дроби!

Но шестидесятиричные конечные дроби поле не образуют (например, 1/7 не представима) $\Rightarrow$ **много приближений** – одна из характерных особенностей вавилонской математики.

Математические таблицы

Использование большого количества всевозможных таблиц – еще одна особенность вавилонской математики.

1. **Тексты-таблицы**: таблицы умножения;
таблицы квадратов;
таблицы обратных чисел;
таблицы кубов;
таблицы квадратных корней;
таблицы сумм кубов и квадратов …

$$n^3 + n^2$$

2. **Тексты-задачники**.

Арифметика древних вавилонян

1. Задачи на арифметические и геометрические прогрессии.

   Знали сумму первых членов арифметической прогрессии, знания более развиты, чем у египтян.

2. Много задач на проценты.

3. Формула приближенного вычисления квадратного корня из числа $\sqrt{\mathbf{N}} = \sqrt{(a^2+r)} \approx a+r/(2a) = x_1$.

   Использование приближений, которые позже можно встретить у Герона Александрийского (I в. н.э.):

$$x_2 \approx 1/2\ (x_1 + N/x_1)$$

Алгебра

1. **КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ**, к ним сводящиеся:

Большое количество однотипных задач, которые можно назвать каноническими и записать в виде:

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ xy = b \end{cases}, \qquad \begin{cases} x \pm y = a \\ x^2 + y^2 = b^2 \end{cases}, \qquad ax^2 \pm bx = c .$$

Как правило, x – длина, y – ширина (всегда длина больше ширины), xy – площадь, иногда встречается глубина. Но несмотря на геометрические названия принципа однородности древних греков нет.

Зато существуют и более абстрактные названия неизвестных величин: «множимое» и «обратное к нему».

«Квадрат и сторона 0; 45»

$$\boldsymbol{x^2 + px = q}$$

1. Возьми 1. — p
2. Пополам 0;30. — $p/2$
3. 0;30 x 0;30 = 0;15. — $\frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4}$
4. 0;15 + 0;45 = 1. — $(p/2)^2 + q$
5. Что на что надо умножить, чтобы получить 1: 1. — $\sqrt{(p/2)^2 + q}$
6. 1 – 0;30 = 0;30 – искомая сторона. — $\sqrt{(p/2)^2 + q} - \frac{p}{2} = x$

«Множимое и обратное 2;30»

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

1. На 0;30 умножь: 1;15
2. 1;15 на 1;15 умножь: 1;33,45
3. 1 вычти отсюда
4. Что на что надо умножить, чтобы 0;33,45 получить: 0;45
5. 0;45 к 1:15 прибавь: 2 – множимое
6. 0;45 от 1;15 вычти: 0;30 – обратное

a/2

$$(a/2)^2$$

$$(a/2)^2 - b$$

$$\sqrt{(a/2)^2 - b}$$

$$\frac{a}{2} + \sqrt{(a/2)^2 - b} = x$$

$$\frac{a}{2} - \sqrt{(a/2)^2 - b} = y$$

Мы видим последовательность решения квадратного уравнения, эквивалентного заданной системе. Никаких пояснений нет, но дается большое число однотипных задач.

Как получен алгоритм решения? Существуют различные гипотезы на этот счет. Одна из них:

Пусть множимое и обратное ему различны, тогда в качестве вспомогательной величины можно взять величину, на которую множимое и обратное отличаются

от половины их суммы:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + t \\ y = \frac{a}{2} - t \end{cases}$$

Тогда второе уравнение заданной системы дает простейшее квадратное уравнение

$$t^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b,$$

которое решается извлечением квадратного корня.

Анализ этой гипотезы позволяет сделать вывод, что вавилоняне:

– **знали подстановки;**

– умели раскрывать скобки;

– знали формулу квадрата двучлена.

Это же подтверждает и еще одна, **Неканоническая**, задача:

«*Длина, ширина. Длину и ширину я перемножил и площадь получил. Затем избыток длины над шириной я прибавил к площади: 183 получилось у меня. Затем длину и ширину я сложил: 27.*

Спрашивается: длина, ширина и площадь».

Итак, задана система $\begin{cases}(x-y)+xy=183\\ x+y=27\end{cases}$ или $\begin{cases}(x-y)+xy=a\\ x+y=b\end{cases}$

«*Ты сделаешь так:* 27 + 183 = 210 (*)

2 + 27 = 29» (**)

и затем решается каноническая система
$$\begin{cases} uv = 210 \\ u + v = 29 \end{cases} \qquad (***)$$

В результате получено $x = u = 15, \quad y = v - 2 = 12$.

Очевидно, что уравнение (*) получено в результате сложения уравнений исходной системы: $xy + 2x = 210$.

Если вынести общий множитель $x(y + 2) = 210$

и обозначить $x = u, \; y + 2 = v$, то получится система (***).

$\Rightarrow$ древние вавилоняне умели выносить общий множитель и делать подстановки!

Существуют и другие примеры, подтверждающие этот вывод.

Все только в числах $\Rightarrow$ речь идет о **ЧИСЛОВОЙ** алгебре.

Как возникли квадратные уравнения?

$\Rightarrow$ Обращение задач.

2. КУБИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ДРЕВНЕМ ВАВИЛОНЕ

Есть шесть задач трех типов: пусть x – длина, y – ширина, z – высота.

1. $\begin{cases} xyz = 3/2 \\ y = x \\ z = 12x \end{cases} \implies 12x^3 = \frac{3}{2} \implies x = \frac{1}{2}$

2. a) $\begin{cases} xyz = 7/4 \\ y = x \\ z = 12x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy(z+1) = 1/18 \\ y = x \\ z = 12x + 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy(z+1) = 7/6 \\ y = \frac{2}{3}x \\ z = 12x \end{cases}$

3. a) $\begin{cases} xy(z+1) = 7/6 \\ x + y = 5/6 \\ z = 12x \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy(z+1) = 7/6 \\ x - y = 1/6 \\ z = 12x \end{cases}$

Задачи типа 2 Нейгебауэр называет задачами «***канонического***» типа.

Для решения этих задач **важно** учесть **единицы измерения**:

– длина и ширина измерялись в *гарах*, а высота – в *локтях*;
1 *гар* = 12 *локтей*;

– объем – в сарах: 1 *сар* = 1 кубический *гар* = 1 *гар* × 1 *гар* × 1 *гар*.

Задача 2а). Запишем условие в локтях: $\begin{cases} 12x \cdot 12y \cdot z = 7/4 \cdot 12 \cdot 12 \\ 12y = 12x \\ z = 12x + 1 \end{cases}$.

Тогда первое уравнение дает: $(12x)^3 + (12x)^2 = 252.$

Для решения этого уравнения используется таблица $n^3 + n^2$ для всех $n = 1, \ldots, 60 \Rightarrow n = 6$ локтей, поэтому $x = ½$, $y = ½$, $z = 7$.

Задача 2b) решается точно так же.

<u>Задача 2с</u>). Запишем условие в локтях $\begin{cases} 12x \ \cdot 12y \cdot z = 1/18 \cdot 12 \cdot 12 \\ 12y = 12x \\ z = 12x + 7 \end{cases}$

Подставляя все в первое уравнение, получаем:

$$(12x)^3 + 7(12x)^2 = 8.$$

Вавилоняне сразу дают ответ: $12x = 1$. Как он получен, неизвестно.

Может быть, очевидным подбором?

Может быть, существовали таблицы типа $n^3 + 2n^2, \quad n^3 + 3n^2, \ldots,$ $n^3 + 7n^2, \ldots$ Ответа у нас нет.

Задачи типа 3 Нейгебауэр называет задачами «***общего***» типа. Запишем эти системы в параметрическом виде:

$$\begin{cases} xy(z+1) = a \\ x \pm y = b \\ z = kx \end{cases}$$

Для решения этих задач сначала вычисляется величина $\frac{1}{b^3}\left(x^2y + \frac{xy}{k}\right)$. Что это такое? Нетрудно видеть, что

$$x^2y + \frac{xy}{k} = xy\left(x + \frac{1}{k}\right) = xy \cdot \frac{1}{k}(z+1) = \frac{a}{k};$$

после деления на b^3 получаем:

$$\frac{x}{b} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{\left(x+\frac{1}{k}\right)}{b} = \frac{1}{b^3} \cdot \frac{a}{k}\ .$$

В задаче **3b** получается уравнение $6x \cdot 6y \cdot (6x + \frac{1}{2}) = 21$ и **без объяснения** утверждается: $6x$=3, $6x + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$, $6y$=2, откуда уже легко найти ответ.

В работе **К. Фогеля** «*Кубические уравнения в Древнем Вавилоне*», помещенной в качестве приложения к «*Лекциям по истории античных математических наук*» **О. Нейгебауэра** (М.-Л., 1937. Том 1. Догреческая математика. С. 233–239) дается очень интересная гипотеза о том, как можно средствами вавилонской математики получить такое решение.

Скачать книгу можно по ссылке:

pdf: https://math.msu.ru/node/1249

djvu: http://pyrkov-professor.ru/default.aspx?tabid=184&ArticleId=570

Домашнее задание:

Изложить подробно решение Фогеля задачи 3а и прислать мне по почте galina.smirnova@math.msu.ru

3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Самым древним и самым знаменитым примером неопределенного уравнения является уравнение, выражающее зависимость между сторонами прямоугольного треугольника:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Это утверждение всем известно как “теорема Пифагора”, хотя никаких доказательств, что Пифагор первым доказал его, нет.

Поскольку существует бесконечное множество прямоугольных треугольников, то существует и бесконечное множество решений этого уравнения, и задача состоит в том, чтобы найти все эти решения.

Плимптон 322

В оригинале в таблице пять столбцов. В четвертом указан номер строки, во втором – один из катетов, в третьем – гипотенуза, в последнем – второй катет, **в первом** (самое загадочное! зачем???) – **квадрат отношения гипотенузы ко второму катету** (косеканс??? в квадрате).

Все числа на следующем слайде – в шестидесятиричной системе счисления.

Египетский треугольник на предыдущем слайде и на следующем находится в строке 11 в виде (60; 45; 75).

I.	II. *b*	III. *d*	IV.	*l*
(1) 59 00 15	1 59	2 49	1	2 00
(1) 56 56 58 14 50 06 15	56 07	3 12 1 [1 20 25]	2	57 36
(1) 55 07 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3	1 20 00
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4	3 45 00
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	5	1 12
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	6	6 00
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7	45 00
(1) 41 33 59 03 45	13 19	20 49	8	16 00
(1) 38 33 36 36	9 01 [8 01]	12 49	9	10
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10	1 48 00
(1) 33 45	45	1 15	11	1 00
(1) 29 21 54 02 15	27 59	48 49	12	40 00
(1) 27 00 03 45	7 12 1 [2 41]	4 49	13	4 00
(1) 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14	45 00
(1) 23 13 46 40	56	53 [1 46]	15	1 30

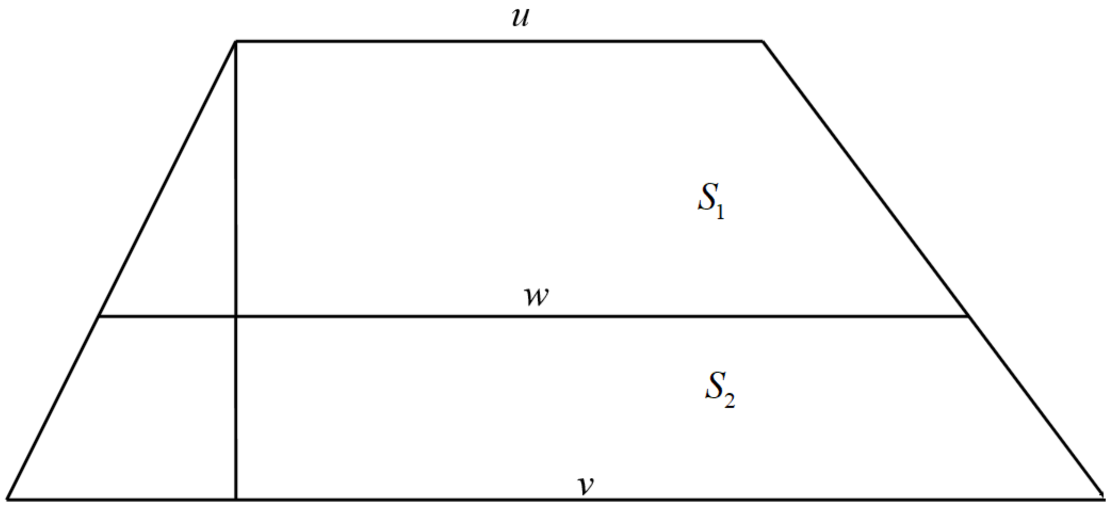
Номер строки	*l*	*b*	*d*
1	120	119	169
2	3456	3367	4825
3	4800	4601	6649
4	13500	12709	18541
5	72	65	97
6	360	319	481
7	2700	2291	3541
8	960	799	1249
9	600	481	769
10	6480	4961	8161
11	60	45	75
12	2400	1679	2929
13	240	161	289
14	2700	1771	3229
15	90	56	106

Это – современное изображение пифагорейских троек, которые находятся в таблице. Показаны первые 15 строк из **38 (!!!)**.

Задача, решения которой называются «**вавилонскими тройками**», также имеет геометрическую природу: рассечь данную трапецию на две равновеликие части прямой, параллельной основаниям.

Обозначив параллельные отрезки через *u, v* и *w*, получим

$$\boldsymbol{u^2 + v^2 = 2w^2} .$$



Существует табличка, в которой рядом изображены пифагорейские и вавилонские тройки (след. слайд), следовательно, можно утверждать, что вавилоняне знали связь между ними.

Существует таблица, в которой изображены сразу и пифагорейские, и вавилонские тройки:

3	4	5	7	1	5	
5	12	13	17	7	13	. . .
7	24	25	31	17	25	

$\Rightarrow$ знали связь: если $\begin{cases} x = p^2 - q^2 \\ y = 2pq \\ z = p^2 + q^2 \end{cases}$, то $\begin{cases} u = x - y = (p-q)^2 \\ v = x + y = (p+q)^2 \\ w = z = p^2 + q^2 \end{cases}$

Более того, они умели, опираясь на одно решение вавилонского уравнения с помощью ***формулы***(?!) ***композиции форм*** (?!!) находить два других!!! (таблица из Суз № 20, Э.М. Бройнс)

Формула композиции форм

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 = (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2 \ (*)$$

Действительно, пусть (u, v, w) – некоторая вавилонская тройка, тогда, взяв пифагорейскую тройку (x, y, z) такую, что $z = 1$ (такие таблицы в Древнем Вавилоне существовали), можно получить еще две другие вавилонские тройки:

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = 1 \cdot 2w^2 =$$
$$= 2w^2 = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2$$
$$= (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2$$

Т.е. $u_1 = |xu - yv|, \quad v_1 = xv + yu, \quad w_1 = w$

и $u_2 = xu + yv, \quad v_2 = |xv - yu|, \quad w_2 = w.$

Мы видим, что весьма сложная формула (*) была известна!!! И в дальнейшем она играла существенную роль у Диофанта, и на средневековом арабском Востоке, и в Европе XIII-XVII вв.