ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ АЛГЕБРЫ

О.Ю. Шмидт, А.Г. Курош

БСЭ, 2е издание, 1950. Т. 1

АЛГЕБРА

"*может быть определена как* ***наука о системах объектов*** *той или иной природы,* ***в которых установлены операции****, по своим свойствам более или менее сходные со сложением и умножением чисел. Такие операции называются алгебраическими. Алгебра классифицирует системы с заданными на них алгебраическими операциями по их свойствам и изучает различные задачи, естественно возникающие в этих системах, включая и задачу решения и исследования уравнений, которая в новых системах объектов получает новый смысл*".

Н. Бурбаки "**Архитектура математики**", 1948

"*В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм –* ***математических структур****...*"

"*...что́ надо понимать в общем случае под* ***математической структурой****. Общей чертой различных понятий, объединенных этим родовым названием, является то, что они* <u>*применимы к множеству элементов, природа которых не определена*</u>*. Чтобы определить структуру,* ***задают*** *одно или несколько* ***отношений****, в которых находятся его элементы (в случае групп – это отношение* $x \tau y = z$ *между тремя произвольными элементами); затем* ***постулируют****, что данное отношение или данные отношения удовлетворяют некоторым условиям (которые перечисляют и которые являются* ***аксиомами*** *рассматриваемой структуры).* ***Построить аксиоматическую теорию*** *данной структуры – это значит вывести логические следствия из аксиом структуры,* ***отказавшись от каких-либо других предположений*** *относительно рассматриваемых элементов (в частности от всяких гипотез относительно их «природы»).*"

"...То отношение, которое фигурирует в групповых структурах, называют «законом композиции»; это такое отношение между тремя элементами, которое определяет однозначно третий элемент как функцию двух первых. Когда отношения в определении структуры являются «законами композиции», соответствующая структура называется ***алгебраической структурой*** *(например, структура поля определяется двумя законами композиции с надлежащим образом выбранными аксиомами: сложение и умножение действительных чисел определяют структуру поля на множестве этих чисел).*

Другой важный тип представляют собой ***структуры, определенные отношением порядка****...*

...еще несколько слов о третьем важном типе структур – ***топологических структурах*** *(или топологиях); в них находят абстрактную математическую формулировку интуитивные понятия окрестности, предела и непрерывности, к которым нас приводит наше представление о пространстве..."*

Математическая энциклопедия, 1977

АЛГЕБРА –

1. *Часть математики*. В этом понимании термин "*Алгебра*" употребляется в таких сочетаниях как "гомологическая алгебра", "коммутативная алгебра", "линейная алгебра", "полилинейная алгебра", "топологическая алгебра".

2. Частный случай *операторного кольца*: Алгебра (иногда – линейная, или векторная, А.) над полем, телом, коммутативным кольцом. Ассоциативная Алгебра (прежнее название "гиперкомплексная система"), неассоциативная алгебра, альтернативная алгебра – алгебры именно в этом понимании.

3. То же, что *универсальная алгебра*. В этом понимании алгебрами будут, например, булевы алгебры, унарные алгебры.

Википедия:

А́лгебра (от араб. الْجَبْر) – раздел математики, который можно нестрого охарактеризовать как *обобщение и расширение арифметики*; в этом разделе числа и другие математические объекты обозначаются буквами и другими символами, что позволяет записывать и исследовать их свойства в самом общем виде. Слово «алгебра» также употребляется в общей алгебре в названиях различных алгебраических систем. В ***более широком смысле*** под алгеброй понимают раздел математики, посвящённый изучению операций над элементами множеств произвольной природы, обобщающий обычные операции сложения и умножения чисел.

Алгебра как раздел математики традиционно включает следующие категории:

- **Элементарная алгебра**, которая изучает свойства операций с вещественными числами. В ней постоянные и переменные обозначаются буквенными символами. Обычно преподаётся в школе под названием *алгебра*.
- **Общая алгебра**, иногда называемая *современной алгеброй* или *абстрактной алгеброй*, где аксиоматизируются и изучаются максимально общие алгебраические структуры, такие, как группы, кольца и поля.
- **Универсальная алгебра**, в которой изучаются свойства, общие для всех алгебраических структур (считается подразделом общей алгебры).
- **Линейная алгебра**, в которой изучаются свойства векторных пространств (включая матрицы).
- **Алгебраическая комбинаторика**, в которой методы абстрактной алгебры используются для изучения вопросов комбинаторики.

По-видимому, **первое определение алгебры как математической дисциплины** мы находим у **Омара ХАЙЯМА** (1048–1131):

Алгебра – наука об уравнениях, в которой четко разделяются числа и величины.

Это определение, лишь немного изменившись, дошло до XIX века, например, в известном учебнике **Ж.А. Серре** "*Cours d'algèbre supérieure*" (1877–1879). НО были и другие точки зрения:

И. НЬЮТОН (1643–1727):

"***Алгебра*** *есть ничто иное как* ***математический язык****, слова которого величины, а уравнения – его предложения*".

***Б.Н. Делоне*.**

Пути развития алгебры // УМН. Т.7, вып. 3(49). **1952**. С. 155–178.

"*…обычно принято считать началом алгебры введение Виэтой буквенных обозначений, причём немало сделал в этом вопросе и Декарт…*"

***Brandon P. Emnace*.**

History of Algebra. **2014**.

"*Как раздел математики, алгебра возникла **в Европе** в конце 16-го века с работой Франсуа Виета. По сути, алгебра может рассматриваться как выполнение вычислений, аналогичных вычислениям арифметики, но с нечисловыми математическими объектами. Однако до 19-го века алгебра в основном состояла из теории уравнений.*"

⇒ чтобы сделать вывод о возникновении алгебры, мы должны определить, что для нас важно. Если, в соответствии с Бурбаки, современная алгебра – наука об алгебраических структурах, то для ответа на вопрос "есть ли алгебра" мы должны обращать внимание на следующие аспекты:

1. Существует **класс задач**, которые мы умеем решать.
2. Существует **алгоритм решения**, в котором не так важно интерпретировать выкладки, достаточно уметь интерпретировать окончательный результат.
3. Есть буквенная **символика** и существуют **законы арифметических операций**.
4. Существуют **алгоритмы**, позволяющие **сводить** неизвестные задачи к тем, которые уже решены.

ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ АЛГЕБРЫ

1.	до VI в. до н.э.	возникновение элементов алгебры Древний Вавилон
2.	VI в. до н.э. до Р.Х.	геометрическая алгебра Древняя Греция
3.	Р.Х. до XVII в.	возникновение и развитие буквенной алгебры (основную роль играют неопределенные уравнения) 1591 – Франсуа Виет
4.	1630 – 1770	построение теории алгебраических уравнений Декарт, Ньютон, Чирнгаузен, Эйлер, Безу, Даламбер, Крамер, Лаплас…
5.	1770 – 1870	период формирования современной алгебры Лагранж, Гаусс, Абель, Галуа, Кэли, Куммер…
6.	1870 – наст. время	становление и развитие абстрактной алгебры, построенной на аксиоматике и теории множеств

1 этап: **Вавилонская математика**

Вавилоняне знали некоторые законы алгебраических операций, осуществляли подстановки и решали с помощью алгебраических методов **квадратные уравнения** и эквивалентные им **системы**.

НО никакой символики не было.

Все законы – на числах $\Rightarrow$ алгебра у вавилонян ЧИСЛОВАЯ.

Доказательств нет или мы не знаем, что для них являлось доказательством.

Зато есть решение **неопределенных уравнений** в рациональных числах:

$$x^2 + y^2 = z^2,$$
$$u^2 + v^2 = 2w^2$$

2й этап: VI в. до н.э. до Р.Х.

Классическая геометрическая алгебра

Математические знания превращаются в абстрактную науку, основанную на системе ***доказательств***. При этом доказательство служит не только для установления истины, но и для выяснения сущности предложения.

К концу V в. до н. э. построены основы элементарной теории чисел и теория отношений (теория положительных рациональных чисел). После открытия несоизмеримых отрезков была создана геометрическая алгебра, в рамках которой доказывались алгебраические тождества и решались алгебраические задачи.

3й этап: I в. н.э. – XVII век

Возникновение и развитие буквенной алгебры

Отказ от геометрического языка и возврат к числовой алгебре (Герон, Птолемей, Диофант, Гипатия).

Диофант в "Арифметике" строит **поле** рациональных чисел (область, замкнутую относительно четырех арифметических действий), вводит буквенную символику, формулирует правила действий с многочленами и уравнениями. Все это сделано для решения **неопределенных уравнений**.

Арабские математики: определенные уравнения – Аль-Хорезми (VIII-IX), неопределенные уравнения – Абу Камил (X), Аль-Караджи (X-XI). Классификация кубических уравнений Омара Хайяма (XI-XII).

Леонардо Пизанский, коссисты, Лука Пачоли, Сципион дель-Ферро, Тарталья, Кардано, Бомбелли, Виет.

4й этап: 1630 – 1770 гг.

Построение теории алгебраических уравнений

Начало – у Виета и Декарта.

Чирнгаузен, Эйлер, Варинг и др. пытались решить уравнение 5й степени в радикалах. Эйлеру удалось найти некоторые такие классы – уравнения с циклической группой Галуа и с полуметациклической группой. Также Эйлер нашел общий вид корней уравнения 5 степени, если оно разрешимо (отсюда позже отталкивался Абель).

Доказательство Основной теоремы алгебры (Даламбер, Эйлер). У Эйлера возникают идеи и факты, послужившие основой теории Галуа (симметрические функции корней уравнения, рациональные функции от корней, которые принимают заданное число значений при перестановках корней и их связь с уравнениями заданной степени).

Неопределенные уравнения сливаются с теорий чисел (расширение понятия целого числа – в т.ч. для комплексных чисел).

5й этап: 1770 – 1870 гг.

Период формирования современной алгебры

I. *Поиски формулы корней алгебраического уравнения в радикалах*.

1770–71 Ж.Л. Лагранж "Размышления об алгебраическом решении уравнений".

Два потока исследований:

1) доказательство неразрешимости в радикалах алгебраических уравнений 5й степени и выше (П. Руффини, Н.Х. Абель);

2) поиск критерия разрешимости уравнения с заданными числовыми коэффициентами (К.Ф. Гаусс, Н.Х. Абель, Э. Галуа).

Работы А. Кэли (1854, 1859), "Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях" К. Жордана (1870). Также конечными группами занимались Силов, Фробениус + теория непрерывных групп Ли.

II. Из Великой теоремы Ферма $\Rightarrow$ ***Обобщение понятия целого числа***:

1828–1832 К.Ф. Гаусс "Теория биквадратичных вычетов"

1844–1847 Э. Куммер идеальные множители в полях деления круга и построение арифметики таких полей.

Р. Дедекинд (1871–1879), Е.И. Золотарев (1878), Л. Кронекер (1882) – произвольные поля алгебраических чисел и построение теории алгебраических функций.

Обоснование арифметики в полях алгебраических чисел у Дедекинда означало ***переход к абстрактной алгебре*** **(6й этап)**: чисто аксиоматически и на основе теории множеств введены понятия **поля, кольца, модуля, идеала**. Для построения теории делимости все ее основные понятия были выражены в терминах теории множеств. В 1882 в работе с Вебером все это было перенесено в теорию алгебраических функций. Последним шагом в конце XIX в. стало введение тех же понятий для абстрактных множеств произвольных объектов.

III. ***Создание теории гиперкомплексных систем***.

1843 Р. Гамильтон – кватернионы, при рассмотрении которых (и более сложных систем) утрачиваются важные свойства обычных сложения и умножения $\Rightarrow$ возникает "теория алгебр".

IV. ***Развитие линейной алгебры***.

После Лейбница и др. О.Л. Коши построил строгую теорию определителей. Дальнейшие успехи связаны с введением многомерного пространства (Грассман, Кэли) и с рассмотрением матриц (Сильвестр, Кэли).

6й этап: последняя треть XIX в. до настоящего времени

Становление и развитие абстрактной алгебры, построенной на аксиоматике и теории множеств.

Определенные уравнения отошли на третий план, неопределенные уравнения слились не только с теорией чисел, но с алгебраической геометрией, и продолжают влиять на развитие алгебры, в состав которой теперь входят:

– общая теория полей,
– теория колец и общая теория групп,
– топологическая алгебра и теория структур,
– теория полугрупп и квазигрупп,
– теория универсальных алгебр,
– гомологическая алгебра,
– теория категорий.

А.Г. Курош, 1967.

Подробное изложение этого материала можно найти в статье:

Башмакова И.Г. Основные этапы развития алгебры // История и методология естественных наук. М., изд-во МГУ. 1986. Вып. XXXII. С. 50–64.

http://pyrkov-professor.ru/default.aspx?tabid=196&ArticleId=182