Обоснование математического анализа в XIX веке.

Введение теории пределов и перестройка математического анализа на ее основе
Гаусс, Коши, Абель, Больцано
1812–1823

I. Представимость функции тригонометрическим рядом, функция и интеграл Дирихле 1834–37
Интеграл Римана 1854–67

Мера множества Жордан, Кантор, Пеано, Лебег 1895
Мера и интеграл Лебега начало XX в.

II. Равномерная непрерывность и сходимость: Абель, Стокс, Зейдель, Вейерштрасс

Действительное число и ε-δ аппарат Вейерштрасса 1870-е

III. Теория действительного числа у Дедекинда, Вейерштрасса и Кантора 1872–75
Теория множеств Кантора 1871–80
Парадоксы теории множеств

IV. Т Ф К П

К. **ВЕЙЕРШТРАСС**. ***Лекции 1861 г.***

Определение непрерывной функции.

«Если f (x) есть функция от x, и x – определенное значение, то при переходе x в x+h функция переменится и будет f(x+h).

Если можно определить для h такую границу δ, что для всех значений h, по абсолютному значению меньших, чем δ, разность f(x+h) – f(x) становится меньше, чем сколь угодно малая величина ε, то говорят, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции».

Карл ВЕЙЕРШТРАСС (1815 – 1897)

Великий педагог; строгость везде.

Из семьи чиновника. По настоянию отца 4 года учился на юридическом факультете в Бонне, но бросил и поступил в университет Мюнстера.

После него **14 лет работал учителем математики** в провинциальной гимназии и кроме математики вел там занятия по физике, ботанике, географии, истории, немецкому языку, чистописанию и гимнастике.

Только с 1854 его работы по анализу становятся известными и признанными и с **1856 и до конца жизни он – профессор Берлинского университета.**

Член Берлинской АН (1856), иностранный член Парижской АН (1879), Лондонского королевского общества (1881), иностранный член-корреспондент (1864) и почётный член (1895) Петербургской АН.

Т Ф К П в XIX в.

Комплексные числа

Первая идея: **1545** **Кардано** «Великое искусство алгебры»

Введены: **1572** **Бомбелли** «Алгебра»

"piu di meno", "meno di meno"

Попытки геометрической интерпретации:

Около **1580** Кардано «Беседа о плюсе и минусе»

1599 Виет «Порождение треугольников»

1685 Валлис «Алгебра»

1702 Лейбниц: «*Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием*».

Лейбниц и И. Бернулли широко применяли комплексные числа, НО всякий раз – для конкретной задачи, и всякий раз – спор!

«Genesis triangulorum» — так озаглавлена последняя часть Ad logisticen speciosam, notae priores, содержащая 12 предложений (XLV — LVII). В первых девяти из них Виет строит своеобразное исчисление треугольников, опираясь на формулу композиции форм

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 = \\ = (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2, \qquad (3)$$

которая была выведена и использована Леонардо Пизанским (см. гл. I). Форме $x^2 + y^2$ Виет сопоставляет прямоугольный треугольник с основанием x, высотой y и гипотенузой $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; мы будем записывать его в виде (x, y, z) тогда формулу (3) в случае, если $x : y \neq u : v$, он интерпретирует как формулу «составления» треугольников (x, y, z) и (u, v, w).

Он ставит задачу: «Из двух прямоугольных треугольников «составить» (effingere) третий прямоугольный треугольник». И поясняет далее, что гипотенуза третьего треугольника должна равняться произведению гипотенуз данных.

Согласно формуле (3) такой третий треугольник можно «составить» из данных (x, y, z) и (u, v, w) двумя способами:

$$(x, y, z) \otimes (u, v, w) = \begin{cases} 1)\ (|xu - yv|,\ xv + yu,\ zw), \\ 2)\ (xu + yv,\ |xv - yu|,\ zw) \end{cases}$$

(см. рис. 9).

1 synaereseos – сочетать

2 diareseos – разрезать

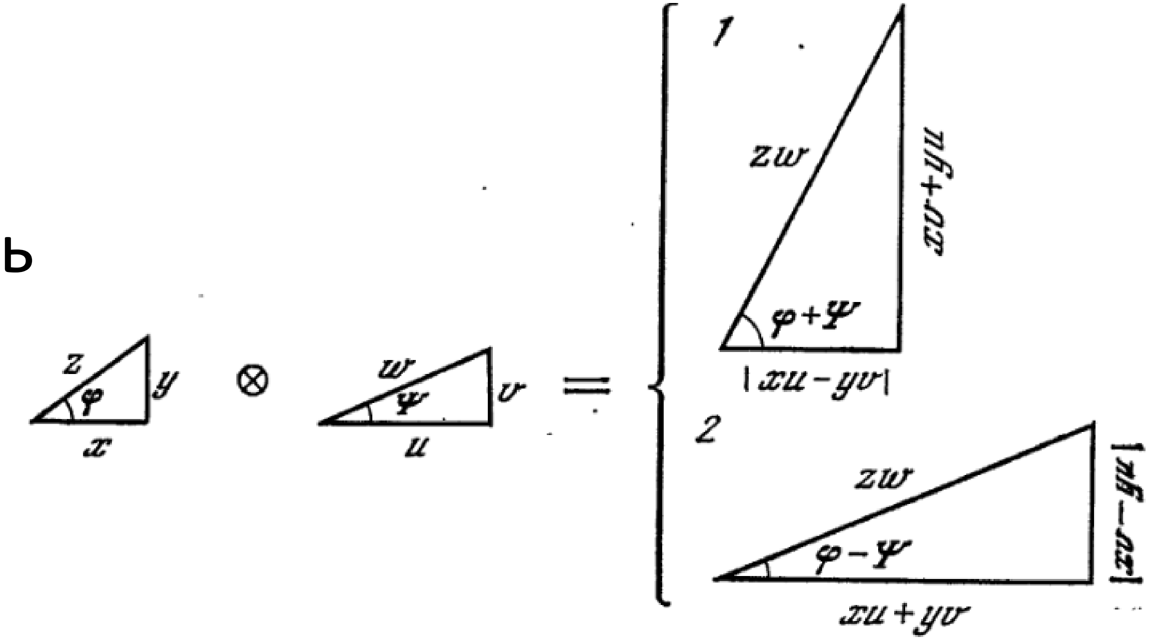


Рис. 9

Последовательное вычисление $(x+iy)^n$ позволяет Виету сформулировать формулу Муавра:

1. С пом. $\otimes_1$ Виет находит

$$n=2 \quad (x;y;z)\otimes(x;y;z)=$$

$$=(|x^2-y^2|;\ 2xy;\ z^2)$$

$$n=3 \quad (|x^2-y^2|;2xy;z^2)\otimes(x;y;z)=$$

$$=(|x^3-3xy^2|;\ |3x^2y-y^3|;\ z^3)$$

$$n=4 \quad (\ldots)\otimes(x;y;z)=$$

$$=(|x^4-6x^2y^2+y^4|;(4x^3y-4xy^3|;\ z^4)$$

$$n=5 \quad (|x^5-10x^3y^2+5xy^4|;\ |5x^4y-10x^2y^3+y^5|;\ z^5)$$

Итак, Виет построил безупречно строго оригинальное исчисление треугольников, которое эквивалентно умножению комплексных чисел и их делению. Он вывел формулу, эквивалентную возведению комплексного числа как в обычной $(a + bi)$, так и в тригонометрической форме $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в любую положительную целую степень. При этом он не вводил никаких новых «объектов» или «символов» типа $\sqrt{-1}$.

Сравним комплексные числа-символы Бомбелли с исчислением треугольников Виета. Каждая из этих систем имела свои достоинства и свои недостатки: числа-символы Бомбелли были удобны для производства четырех действий арифметики, по современной терминологии, они составляли поле, т. е. определенные для них два закона композиции обладали теми же «хорошими» свойствами как сложение и умножение рациональных чисел. Однако они не имели «тригонометрической формы», т. е. с ними не были связаны понятия модуля и аргумента. Поэтому они были неудобны для выполнения операции извлечения корня, а также для приложений к тригонометрии.

Исчисление треугольников Виета допускало как алгебраическую, так и тригонометрическую интерпретацию, и поэтому оно было сразу же применено для получения ключевых формул тригонометрии. Виет пользовался им и при решении неопределенных уравнений. Однако это исчисление было малооперативным, к тому же над треугольниками был определен только один закон композиции (соответствующий умножению), короче, оно было построено еще в духе античной математики. Поэтому при дальнейшем развитии математики Нового времени предпочтение было отдано оперативным числам-символам. В XVIII в. они получили тригонометрическую интерпретацию, а в прошлом веке, особенно после того, как Гаусс построил арифметику комплексных чисел, они приобрели права гражданства, превратившись в «настоящие» числа.

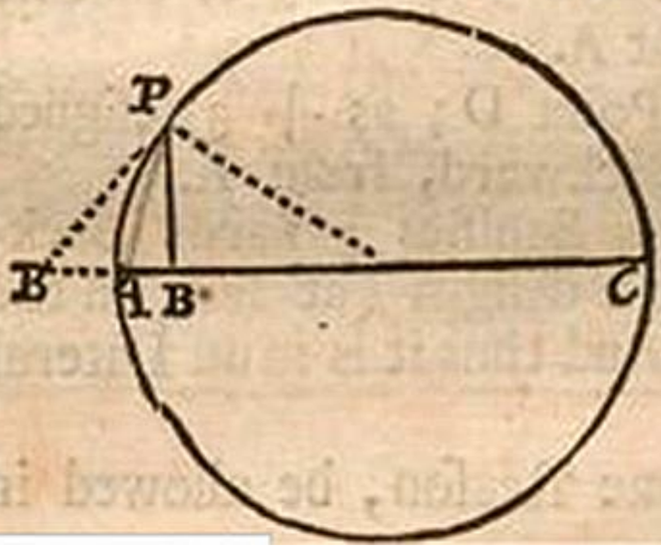
1685 John WALLIS *Algebra*

CHAP. LXVII.

The ſame Exemplified in Geometry.

WHAT hath been already ſaid of $\sqrt{-bc}$ in Algebra, (as a Mean Proportional between a Poſitive and a Negative Quantity:) may be thus Exemplified in Geometry.

If (for inſtance,) Forward from A, I take $AB = +b$; and Forward from thence, $BC = +c$; (making $AC = +AB + BC = +b + c$, the Diameter of a Circle:) Then is the Sine, or Mean Proportional $BP = \sqrt{+bc}$.



But if Backward from A, I take $AB = -b$; and then Forward from that B, $BC = +c$; (making $AC = -AB + BC = -b + c$, the Diameter of the Circle:) Then is the Tangent or Mean Proportional $BP = \sqrt{-bc}$.

Спор о природе логарифмов

1712–13 **Лейбниц – Иоганн Бернулли**

Логарифмическая функция – функция, удовлетворяющая функциональному уравнению $\log(z \cdot z_1) = \log z + \log z_1$.

Ее дифференциал $d(\log z) = dz/kz$.

Но чему равняется $\log(-1)$?

БЕРНУЛЛИ: $\log x = \log(-x)$, т.е. действительное число, поскольку

1) $d(\log(-x)) = -dx/-kx = dx/kx = d(\log x)$

2) т.к. $(-x)^2 = x^2$, то $2\log(-x) = 2\log x$, следовательно равны и их половины.

ЛЕЙБНИЦ: Логарифм от -1 и логарифм от мнимой единицы – мнимые числа, т.к. взяв ряд $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots$,

при $x = -2$ имеем $\ln(-1) = -2 - 2^2/2 - 2^3/3 \ldots$

– расходящийся ряд $\Rightarrow$ нет значения в R.

Разрешил **ЭЙЛЕР** в 1749: логарифмическая функция – **многозначная**:

Т.к. $\quad ln\, x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y = \left(1 + \frac{y}{i}\right)^i$

(i у Эйлера означает бесконечность), то можно выразить *y* через *x* следующим образом:

$$y = i\left(x^{\frac{1}{i}} - 1\right)$$

И поскольку корней степени *i* в поле комплексных чисел имеется ровно *i*, то и значений логарифма должно быть много.

ДАЛАМБЕР и **ЭЙЛЕР** неоднократно переходили от *a+b* $\sqrt{-1}$ к точкам *(a;b)* и обратно; **для них комплексные числа – просто удобные символы.**

1742 **Эйлер** в доказательстве Основной теоремы алгебры писал: «*Все мнимости имеют вид M + N* $\sqrt{-1}$».

Даламбер это доказал (на современном ему уровне строгости математики).

1748 **Эйлер** ввел **первые функции комплексного переменного.**

1768 Эйлер *Универсальная Арифметика*

«***Мнимым количеством*** *называют такое, которое ни больше нуля, ни меньше нуля, ни равно нулю; это, следовательно, нечто невозможное, как, например,* $\sqrt{-1}$ *или вообще* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\sqrt{-1}$ *, поскольку такое количество ни положительно, ни отрицательно, ни нуль… Всякое мнимое количество всегда образовано двумя членами, один из которых есть действительное количество, обозначаемое через M, а другой – произведение также действительного количества N на* $\sqrt{-1}$*; таким образом,* $\sqrt{-1}$ *есть единственный источник всех мнимых выражений*».

90 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

что больше нежели ничево положительными; а все что меньше ничево отрицательными числами изъявляется, и такъ видимъ мы, что корни изъ отрицательныхъ чиселъ ни больше ни меньше нежели ничево, и самое ничево они также не будутъ, ибо о умноженной на о въ произведеніи даетъ о, и слѣдовательно не отрицательное число.

143.

Когда всѣ возможныя числа, какія только представить можно, суть больше и меньше о *или* самой о; то изъ сего видно, что корни квадратные изъ отрицательныхъ чиселъ, въ число возможныхъ чиселъ включены быть не могутъ, слѣдовательно суть числа *не возможныя*, Сіе обстоятельство ведетъ насъ къ познанію такихъ чиселъ, которыя по ихъ свойству суть не возможныя и обыкновенно *мнимыми* числами называются, потому что ихъ въ умѣ только представить можно.

И Эйлер, и Даламбер стали рассматривать функции комплексных переменных в задачах по гидромеханике и вывели их **условия аналитичности** :

1746 (оп. 1748) **Даламбер** (без доказательства):

f (x+iy) = p + iq, ***f(x+iy) d(x+iy) = dp + i dq***

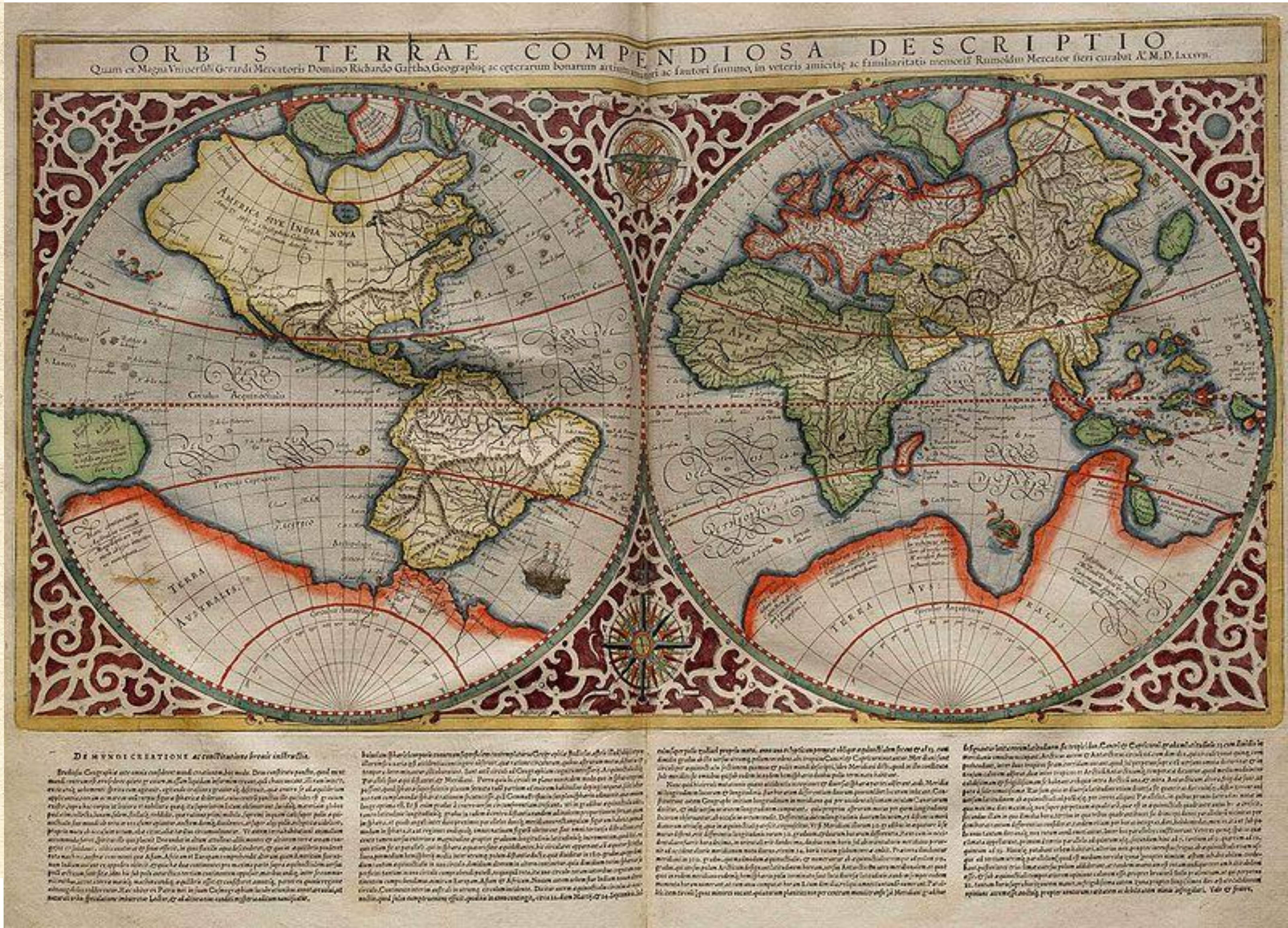
1752 **Даламбер** доказал достаточность: если функция аналитична, то ее действительная и мнимая части удовлетворяют условиям К-Р

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

1755 **Эйлер** доказал необходимость.

1777 **Эйлер** – идея конформного отображения части сферы на плоскость (т.н. проекция Меркатора в картографии – 1569).

Герард **МЕРКАТОР** (1512-1594), фламандский картограф и географ.



Все эти факты не были объединены в общую теорию. Тормозило **отсутствие ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОБОСНОВАНИЯ** комплексного числа:

1) большое число сходных попыток математиков-любителей;

2) сдержанное отношение к ним авторитетных математиков.

1799 Каспар **ВЕССЕЛЬ** (1745–1818), датский землемер,

дал полное истолкование комплексного числа как вектора на плоскости, НО на датском языке $\Rightarrow$ работа была практически неизвестна до конца XIX в.

1806 Жан Робер **АРГАН** (1768–1822), швейцарский математик-самоучка, и французский аббат **БЮЭ** (Adrien Quentin Buée, 1745–1825), независимо друг от друга,

предложили интерпретацию комплексного числа как направленного отрезка (Арган еще ввел модуль комплексного числа и в 1814–15 доказал основную теорему алгебры).

Карл Фридрих ГАУСС (1777 – 1855)

Решающее значение в признании комплексных чисел имела
1828–32 «***Теория биквадратичных вычетов***»:

– дал общую теоретическую трактовку и построил арифметику комплексных чисел:

ввел **целые** гауссовы числа, они образуют кольцо, в котором **единицы** ± 1, $\pm \boldsymbol{i}$,

ввел ассоциированные числа, **разложение на множители**, **простые** комплексные числа, **норму** комплексного числа, **вычеты** по комплексному модулю, для **НОД** – обобщение алгоритма Евклида и арифметика, аналогичная обычной;

– сформулировал и частично доказал биквадратичный закон взаимности;

$\Rightarrow$ ***Целые комплексные числа столь же законны***, как и обычные целые числа; с их помощью можно получать и новые доказательства, и новые результаты!

До этого **ГАУСС**:

1) в **1799** в диссертации о доказательстве основной теоремы алгебры неоднократно пользовался $\mathbf{C} \to \mathbf{R}^2$;

2) в **1811** в письме к Бесселю (след. слайд) фактически дал Программу развития ТФКП. Здесь есть:

– интерпретация комплексного числа;

– определение интеграла в комплексной области как предела интегральных сумм;

– интегральная теорема;

– разложимость аналитической функции в степенной ряд.

Осуществил и упорядочил Огюстен-Луи **КОШИ,** заложив **основы общей ТФКП** (хотя сначала его подход к комплексным числам был не геометрическим, а чисто алгебраическим)

К.Ф.Гаусс из письма к Бесселю 1811 г. (опубл. 1880) по поводу вводимого им интегрального логарифма

Что нужно понимать под $\int \varphi x \cdot dx$ для $x = a + bi$? Очевидно, если хотят исходить из ясных понятий, нужно принять, что x, отправляясь от значения, для которого интеграл должен равняться нулю, посредством бесконечно малых приращений (каждое вида $a+bi$) переходит к $x=a+bi$, и тогда сложить все $\varphi x \cdot dx$.

Итак, смысл (интеграла) вполне установлен. Но переход можно осуществить бесконечно многими способами: так же как совокупность всех действительных величин можно мыслить в виде бесконечной прямой линии, так и совокупность всех величин, действительных и мнимых, можно осмыслить посредством бесконечной плоскости, каждая точка которой с абсциссой a и ординатой b будет представлять величину a+bi. Непрерывный переход от одного значения x к другому $a+bi$ представляется тогда посредством линии и возможен бесконечным числом способов. Я утверждаю теперь, что интеграл $\int \varphi x \cdot dx$ при двух различных переходах всегда сохраняет одно и то же значение, если внутри части плоскости, заключенной между линиями, представляющими переход, φx нигде не обращается в бесконечность. Это прекраснейшая теорема, нетрудное доказательство которой я дам при удобном случае. Она связана с другими прекрасными истинами, относящимися к разложению в ряды.

Особенности научного творчества Коши: не был классиком формы; большинство публикаций носит спешный, эскизный характер; из **789** (!) публикаций всего 8 книг.

Основные достижения Коши:

1. Работы **по обоснованию анализа** (в тесной связи с преподаванием).
2. Создание основ **общей ТФКП**.

Две фундаментальные проблемы ТФКП:

1. ***Интегрирование в комплексной области по замкнутому контуру***: к **1840** г. постепенно, наощупь, найдена теорема Коши, связывающая интеграл с суммой вычетов внутри контура.

2. ***Разложение произвольной функции комплексного переменного в степенной ряд***, радиус сходимости которого – расстояние до ближайшей особой точки.

I. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

возникает еще в 18 веке (несобственные интегралы 2 рода).

Первый интеграл в комплексной области определил Гаусс (письмо к Бесселю 1811 г.)

Результаты КОШИ в этом направлении:

1814 (оп. 1827) «*Интегрирование по сторонам* ***прямоугольника*** *двумя путями*»

1) определение функции, дифференцируемой в точке (частная производная по сопряженному направлению = 0);

2) вывод условий Коши-Римана из единственности производной;

3) определение простого полюса и полюса порядка *n*;

4) ***вывод***: так как интеграл не зависит от пути интегрирования, то интеграл по замкнутому контуру = 0, если внутри нет особых точек.

1825 «*Мемуар об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами*»

Во многом следует 3 доказательству Гаусса ОТА. Рассматривает **общий случай** (контур – не прямоугольник) и вводит понятие **вычет**а как разности значений интеграла при разных обходах.

1826 Точное **определение вычета** как коэффициента про разложении функции в ряд (см. след. слайд). **Интегральным вычетом** Коши назвал сумму всех вычетов по полюсам внутри контура.

За 1826-1829 Коши написал 16 (!) работ по теории вычетов, в которых рассматривал ее приложения к вычислению интегралов, дифференциальным уравнениям, разложению функций в ряды и бесконечные произведения, к теории уравнений и т. д. Поэтому

к **1829** все в основном оформилось и завершилось:

1840 **Основная теорема о вычетах**

$$\int f(z)dz = 2\pi i \sum res\, f(z_k)$$

Точное определение **ВЫЧЕТа** у **Коши** (1826)

«Если, после того, как найдены значения x, обращающие f(x) в ∞, прибавить к одному из этих значений, обозначенному через x_1, бесконечно малое количество ε и далее разложить $f(x_1+\varepsilon)$ в ряд по возрастающим степеням того же количества,

*то первые члены разложения будут содержать отрицательные степени ε и один из них будет произведением 1/ε на конечный коэффициент, который мы и назовем **вычетом** f(x), относящимся к частному значению x_1»*

II. РАЗЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФКП В СТЕПЕННОЙ РЯД,

радиус сходимости которого – расстояние до ближайшей особой точки.

В 18 веке у Эйлера сумма ряда – значение функции в точке. В современной теории сходимости рядов сумма ряда – предел частичных сумм. Была развита **Гауссом**, **Абелем**, **Коши** и их последователями в 19 веке, хотя отдельные критерии были установлены ранее (Лейбниц, Даламбер, Маклорен, Варинг и др.)

1813 **Гаусс** *«О гипергеометрическом ряде»*

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$

– выводит условия сходимости ряда и его расходимости, исследует даже поведение на границе!

– получил признак сходимости, рассматривая отношение двух соседних членов:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\nu}{n} + \frac{\theta(n)}{n^2}, \quad |\theta(n)| < 1,$$

при $\lambda > 1$ ряд сходится (признак недостаточно строго сформулированный Даламбером в 1768);

при $\lambda < 1$ нужно исследовать *ν* (в **1843** – признак Раабе:

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

и если *R >1*, то ряд сходится;

если *R <1*, то расходится).

Свои результаты излагал в лекциях, которые слушал и развивал дальше **Дирихле**, а затем и **Дедекинд**, издавший впоследствии лекции Гаусса и Дирихле.

1826 **Абель** *«Исследование ряда*

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$ *в комплексной области»*

Вводит понятие круга сходимости, доказывает, что сумма сходящегося степенного ряда – непрерывная функция, НО сумма сходящегося ряда непрерывных функций не обязательно непрерывная функция (ошибка Коши) и поэтому важно изучать ***равномерную сходимость***.

1831 **Коши** *«Туринские мемуары»*

Вычислил радиус сходимости $$\rho = \frac{1}{\overline{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Если предел в знаменателе = 0, то ряд сходится на всей плоскости, если $\rho = 0$, то область сходимости ряда – единственная точка.

(позже есть у Адамара в диссертации 1892).

1831 (оп. 1841) Коши «*Упражнения по анализу*»

Интегральная формула Коши для любой точки z области, в которой функция аналитична

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

(здесь C – контур вокруг нуля и ζ – точка внутри контура) и вопрос о том, как искать ***коэффициенты в разложении функции в степенной ряд***:

разложив в ряд $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \frac{z^2}{\zeta^3} + \cdots$ и подставив его в интеграл, получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}\int_C \frac{f(\zeta)z^n}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta.$$

Тем самым Коши доказал, что функция комплексного переменного разлагается в ряд Тейлора.

1843 Пьер Альфонс **ЛОРАН** (1813–1854)

ввел ***сходимость в кольце*** и показал, что любая однозначная аналитическая функция внутри кольца может быть разложена в ряд $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$:

пусть z_0 – особая точка *f(z)*, тогда для любого *z* внутри кольца $r < |z - z_0| < R$ коэффициенты ряда есть

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

(здесь *C* – любая окружность внутри кольца).

Вейерштрасс знал уже в **1841,** но поскольку он свои первые работы не публиковал до 1894 г. (хотя результаты включал в лекции), то они были не очень хорошо известны.

В 30-е и 40е Жозеф **ЛИУВИЛЛЬ** (1809–1882) и Карл Густав **ЯКОБИ** (1804–1851) развивают теорию ***эллиптических функций***.

1850 Виктор **ПЮИЗО** (1820–1883) разработал теорию ***алгебраических функций*** и разложил многозначную алгебраическую функцию по дробным степеням в точках ветвления.

Тем самым разложение ФКП в ряд было прочно обосновано. Появились учебники по ТФКП: с **1857** Вейерштрасс читал курс анализа в Берлине. К этому времени: ***чтобы задать аналитическую функцию, нужно иметь ряд + круг сходимости***.

Курс Вейерштрасса состоял из четырёх семестровых курсов:

1) теория аналитических функций,

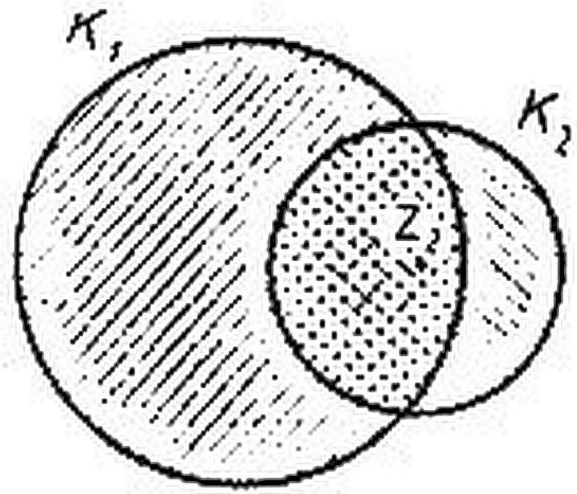
2) теория эллиптических функций,

3) применения эллиптических функций к геометрии и механике,

4) теория абелевых функций.

Он повторил этот цикл **15 раз** – вплоть до летнего семестра 1887 г.

Вейерштрасс: <u>**ИДЕЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ**</u> разложения функции во внешнюю часть круга сходимости:



$$f_a(z) = \sum c_n (z-a)^n \qquad f_b(z) = \sum \frac{f_a^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n$$

1. Благодаря Вейерштрассу идея разложения функций в ряд Тейлора достигла наивысшего расцвета и позволила выделить класс ***аналитических функций*** – однозначных, комплексно дифференцируемых, **представимых степенным рядом в окрестности любой точки** из ООФ.

Комплексные переменные гораздо лучше подходят для изучения аналитических функций, т.к. не всякая бесконечно дифференцируемая функция в $\mathbb{R}$ представима ***сходящимся*** рядом Тейлора.

2. Разные цепочки кругов могут привести к различным значениям функции в одной и той же точке $\Rightarrow$ возникает проблема **многозначных функций** $\Rightarrow$ идеи РИМАНА.

Бернхардт РИМАН (**1826 – 1866**)

Сын деревенского священника, учился в Геттингене: поступил на богословский факультет, но потом перевелся в Берлин, чтобы заниматься математикой. В 1849 г. вернулся в Геттинген к Гауссу: **1851** Докторская диссертация

Основы общей ТФКП

«Существовавшие ***до настоящего времени*** *методы изучения этих функций имели в своей основе* ***определение функции посредством формулы****, позволяющей вычислить ее значение для каждого заданного значения аргумента; в нашем исследовании показывается, что в силу свойств, внутренне присущих функции комплексного переменного, в определении такого рода* ***часть данных есть следствие остальных****, и устанавливается, каким образом число данных может быть уменьшено и сведено строго к необходимому»*

Чтобы восстановить однозначность функции, Риман заставил ее пробегать не просто комплексную плоскость, а системы наложенных плоскостей, образующих «листы» **римановой** поверхности. Особенно – в работе **1857** г. (сл. слайд).

1854 ***О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии*** – метрический подход к построению *n*-мерного пространства.

Но должность профессора получил только в 1859 после смерти Дирихле. Много болел, последние месяцы – в Италии.

1859 ***Гипотеза Римана*** о нулях дзета-функции $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ (Эйлер в 1737) – в отрицательных четных числах (тривиальные нули) и комплексных числах с действительной частью ½ (нетривиальные нули).

До сих пор не решена, хотя к 2004 г. *численными методами* было подтверждено, что более 10^{13} (десяти триллионов) первых нетривиальных нулей дзета-функции Римана удовлетворяют этой гипотезе.

1857 **Риман** ***Теория абелевых функций***

вопрос: в какой мере аналитические функции определяются краевыми условиями?

Риман создал теорию многолистных поверхностей, определяемых алгебраическим уравнением, по аналогии с результатами **Коши** из теории комплексных (мнимых) функций и результатами **Пюизо** из теории алгебраических функций:

1) идея Римана об изображении хода комплексной переменной в виде движения точки на поверхности возникла по аналогии с идеей Коши об изображении хода комплексной переменной в виде движения точки на плоскости. Комплексное интегрирование на поверхности Римана является аналогом комплексного интегрирования Коши на плоскости.

Риман пришел к мысли о том, что выделение однозначной ветви многозначной функции, осуществляемое различными способами, приводит к появлению линий разрыва на поверхности, по аналогии с эквивалентным условием Коши о появлении линий разрыва на плоскости.

Теорема Римана о том, что функция, аналитическая на некоторой поверхности, отображает ее взаимно однозначно и непрерывно на другую поверхность, возникла по аналогии с плоскостной теоремой о том, что функция, аналитическая на некоторой плоскости, является ее взаимно однозначным отображением на другой плоскости.

2) понятия многолистной поверхности с определением точек разветвления поверхности и описанием связи листов, распадающихся на отдельные циклы в окрестности каждой такой точки, между собой возникли у Римана по аналогии с алгебраическими понятиями Пюизо, представленными в теории алгебраических функций. Идея многолистной поверхности Римана являлась превосходным геометрическим комментарием к алгебраическому мемуару Пюизо (1851).

Поверхности Римана – топологическое понятие, но топология еще не развита.