

# **I. Период накопления математических знаний**

Культура и история создают иллюзию, что мы хорошо знаем свое прошлое, однако летописная история европейских цивилизаций насчитывает немногим более двух тысяч лет, а первые сохранившиеся памятники письменности древнегреческой культуры – поэмы Гесиода и Гомера относят нас еще на VIII-IX веков назад. В подлинности событий, описанных в поэмах Гомера, после археологических находок Генриха Шлимана сомневаться не приходится. Не менее ясно, что **историческая картина** этого периода охватывает не все страны и события – она **фрагментарна**. И пока не видно, что помешает ей навсегда остаться таковой.

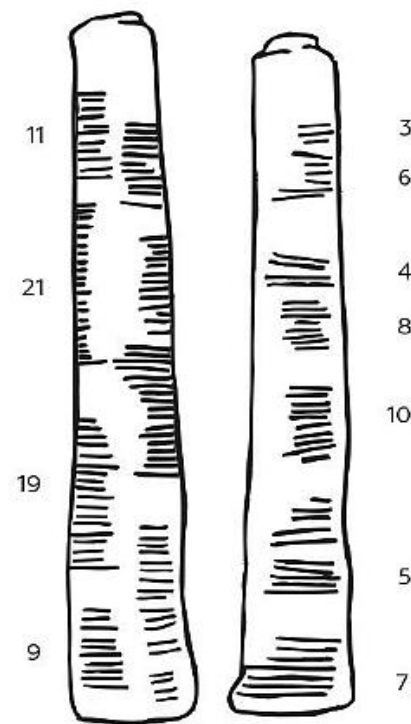
Непонятно, на что можно рассчитывать – методы археологического датирования предполагают наличие письменных источников, а косвенные методы (дендрохронология, **радиоуглеродное датирование**) опираются на предварительную калибровку по находкам известного возраста и для истории часто недостаточно точны.

Первые знаки нельзя считать ранними примерами записи чисел. Это просто царапины, метки, выражающие числа в виде серии насечек, например ||||| для обозначения 13. Самая древняя из известных на сегодняшний день таких надписей – 29 насечек на бедренной кости бабуина, сделанная 37 тыс. лет назад. Эту кость нашли в пещере в горах Лебомбо, на границе между Свазилендом и ЮАР. Место называется Пограничной пещерой, а артефакт – костью Лебомбо.

В отсутствие машины времени нельзя с уверенностью утверждать, что означал каждый символ, но можно делать обоснованные предположения. В лунном месяце 28 дней, значит, насечки, должно быть, связаны с фазами Луны.

В Европе обнаружены похожие артефакты. Пятьдесят семь насечек на волчьей кости из бывшей Чехословакии разбиты на 11 групп по пять с двумя лишними; этой находке 30 тыс. лет. Дважды по 28 будет 56: это может быть обозначение для двухмесячного лунного отрезка времени. И снова у нас нет способа проверить это предположение. Но насечки явно что-то значат, их сделали не просто так.

Еще одна древняя математическая запись, на кости Ишанго из Заира, была сделана 25 тыс. лет назад (прежняя оценка в 6000–9000 лет пересмотрена учеными в 1995 г.). На первый взгляд эти царапины по краям кости кажутся случайными, но здесь может быть скрытый смысл. Один ряд состоит из простых чисел от 10 до 20: это 11, 13, 17 и 19, и в сумме они дают 60. В другом ряду мы видим 9, 11, 19 и 21, что также в сумме равно 60. Третий ряд представляет способ умножения двух чисел: одно из них несколько раз удваивают, а другое делят пополам. Но не исключено, что всё это лишь совпадение или что кость Ишанго – древний лунный календарь.



Кость Ишанго: насечки и представленные ими числа

## Кость Ишанго 18 тыс. лет до н.э.

В 1960 г. бельгийский геолог и путешественник Жан де Хайнцелин де Броккур (1920–1998) обнаружил на территории современной Демократической Республики Конго кость павиана с нанесенными на нее отметками.

Сначала предполагалось, что кость Ишанго является обычной счетной рейкой, использовавшейся африканцами каменного века. Однако, по мнению некоторых ученых, последовательность насечек свидетельствует о том, что математические способности ее владельца могли превосходить простые навыки счета объектов.



**Основные математические понятия** «число», «геометрическая фигура», «величина» возникли задолго до появления математических текстов, и все – **из практики**. Предшествовал этому **чувственный счет**.

Натуральный обмен привел к понятию взаимно-однозначного соответствия и потребовались **эталонны счета**: *естественные* (пальцы) и *искусственные* (палочки, камешки...).

Первая **система счисления** – словесная. Например, в древней Индии,

|           |                                       |
|-----------|---------------------------------------|
| 1 единица | – Луна, Земля, Брахма                 |
| 2 два     | – близнецы, глаза, руки               |
| 5 пять    | – чувства, стрелы бога любви Камадевы |
| 6 шесть   | – запахи                              |
| 7 семь    | – горы                                |
| 8 восемь  | – боги и т.п.                         |

Это – этап счета при помощи **конкретных чисел**. Потом выделили только одну совокупность: руки-ноги.

**А. Лебег:** «Если бы люди имели 11 пальцев, была бы принята одиннадцатиричная система счисления».

# СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

А: **непозиционные**

В: **позиционные**

*иероглифические    алфавитные*

I египетская

II греческая ионическая

III вавилонская  
шестидесятичная

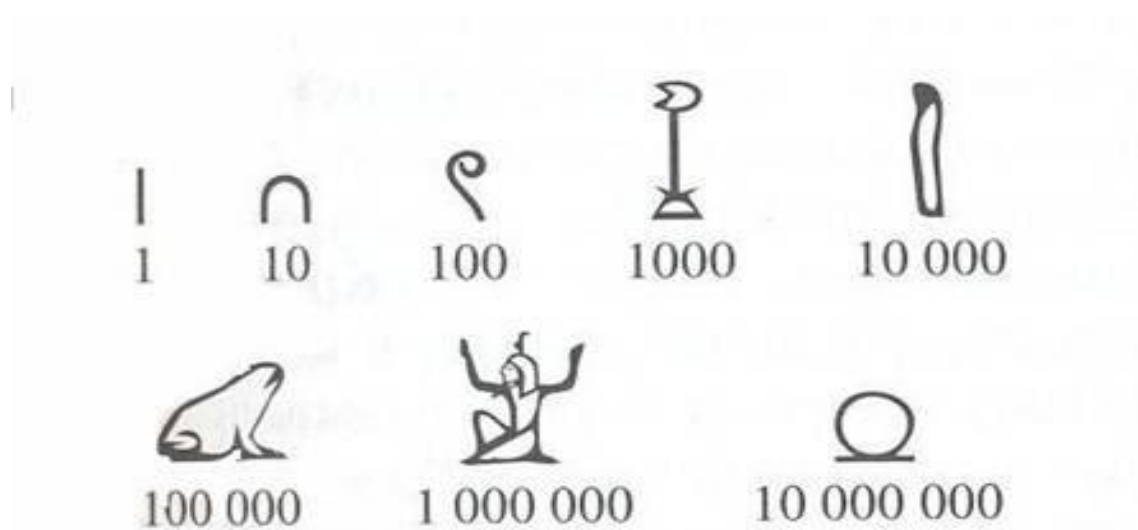
греческая аттическая  
римская  
финикийская  
пальмирская  
критская  
сирийская  
старо-китайская  
старо-индусская

древнеславянская  
еврейская  
арабская  
грузинская  
армянская

двоичная  
**современная  
(индийская)**  
десятичная  
племени майя

# Египетская нумерация

|            |                                                                                                                                    |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1          | ЗАРУБКА                                                                                                                            |
| 10         | ПУТЫ для стреноживания коров                                                                                                       |
| 100        | МЕРНАЯ ВЕРЕВКА                                                                                                                     |
| 1 000      | ЦВЕТOK ЛОТОСА                                                                                                                      |
| 10 000     | ПОДНЯТЫЙ ПАЛЕЦ                                                                                                                     |
| 100 000    | ЛЯГУШКА (головастик)                                                                                                               |
| 1 000 000  | ЧЕЛОВЕК с поднятыми вверх руками                                                                                                   |
| 10 000 000 | Египтяне поклонялись Амону Ра, богу Солнца, и, наверное, поэтому самое большое свое число они изобразили в виде ВОСХОДЯЩЕГО СОЛНЦА |



$$\text{c c c n n n n } |||| = 345$$

$$\text{d c c } || = 1205$$

$$\text{f f c c c n n } |||| = 23029$$



Барельеф в Карнаке



Плита с гробницы принцессы Неферетиабет (2590—2565 до н. э., Гиза). Лувр

## Греческая аттическая нумерация

|       |   |        |       |     |                 |
|-------|---|--------|-------|-----|-----------------|
| 1     | Ι |        | 5     | Π Γ | πέντε           |
| 10    | Δ | δέκα   | 50    | Ϟ   |                 |
| 100   | Η | ἐκατόν | 500   | Ϡ   | Fractions:      |
| 1000  | Χ | χίλιοι | 5000  | ϡ   | $\frac{1}{4}$ ϝ |
| 10000 | Μ | μύριοι | 50000 | ϣ   | $\frac{1}{2}$ Ϟ |

|           |      |
|-----------|------|
| ΗΗϠΓΙ     | 256  |
| ΗΗΗϠΔΔΔΙΙ | 382  |
| ΧΧϠΙ      | 2051 |
| ϠΧΧϠΗΗΗ   | 7800 |

# Древнекитайская десятиричная система счисления

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 一 | 1 | 六 | 6 |
| 二 | 2 | 七 | 7 |
| 三 | 3 | 八 | 8 |
| 四 | 4 | 九 | 9 |
| 五 | 5 | 〇 | 0 |

|    |     |       |        |
|----|-----|-------|--------|
| 十  | 百   | 千     | 萬      |
| 10 | 100 | 1 000 | 10 000 |

一千

-  $1 * 1\,000 = 1000$ ;

五百四十八

-  $5 * 100 + 4 * 10 + 8 = 548$

# Греческая ионическая нумерация

## Греческий числовой алфавит

| Число | Буква               | Название буквы     | Число | Буква            | Название буквы | Число | Буква            | Название буквы |
|-------|---------------------|--------------------|-------|------------------|----------------|-------|------------------|----------------|
| 1     | $\bar{\alpha}$      | альфа              | 10    | $\bar{\iota}$    | иота           | 100   | $\bar{\rho}$     | ро             |
| 2     | $\bar{\beta}$       | бета               | 20    | $\bar{\kappa}$   | каппа          | 200   | $\bar{\sigma}$   | сигма          |
| 3     | $\bar{\gamma}$      | гамма              | 30    | $\bar{\lambda}$  | ламбда         | 300   | $\bar{\tau}$     | тау            |
| 4     | $\bar{\delta}$      | дельта             | 40    | $\bar{\mu}$      | мю             | 400   | $\bar{\upsilon}$ | ипсилон        |
| 5     | $\bar{\epsilon}$    | эпсилон            | 50    | $\bar{\nu}$      | ню             | 500   | $\bar{\phi}$     | фи             |
| 6     | $\bar{\varsigma}^*$ | стигма,<br>дигамма | 60    | $\bar{\xi}$      | кси            | 600   | $\bar{\chi}$     | хи             |
| 7     | $\bar{\zeta}$       | дзета              | 70    | $\bar{\omicron}$ | омикрон        | 700   | $\bar{\psi}$     | пси            |
| 8     | $\bar{\eta}$        | эта                | 80    | $\bar{\pi}$      | пи             | 800   | $\bar{\Omega}$   | омега          |
| 9     | $\bar{\theta}$      | тэта               | 90    | $\bar{\Q}^*$     | копа           | 900   | $\bar{\var�}^*$  | сампи,<br>саде |

## Славянская нумерация

|                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| <sup>1</sup><br>А   | <sup>2</sup><br>В   | <sup>3</sup><br>Г   | <sup>4</sup><br>Д   | <sup>5</sup><br>Е   | <sup>6</sup><br>З   | <sup>7</sup><br>З   | <sup>8</sup><br>И   | <sup>9</sup><br>Ѡ   |
| <i>аз</i>           | <i>веди</i>         | <i>глаголь</i>      | <i>добро</i>        | <i>есть</i>         | <i>зело</i>         | <i>земля</i>        | <i>иже</i>          | <i>фита</i>         |
| 1                   | 2                   | 3                   | 4                   | 5                   | 6                   | 7                   | 8                   | 9                   |
| <sup>10</sup><br>І  | <sup>20</sup><br>К  | <sup>30</sup><br>Л  | <sup>40</sup><br>М  | <sup>50</sup><br>Н  | <sup>60</sup><br>Ѣ  | <sup>70</sup><br>Ѧ  | <sup>80</sup><br>П  | <sup>90</sup><br>Ч  |
| <i>и</i>            | <i>како</i>         | <i>люди</i>         | <i>мыслете</i>      | <i>наш</i>          | <i>кси</i>          | <i>он</i>           | <i>покой</i>        | <i>червь</i>        |
| 10                  | 20                  | 30                  | 40                  | 50                  | 60                  | 70                  | 80                  | 90                  |
| <sup>100</sup><br>Р | <sup>200</sup><br>С | <sup>300</sup><br>Т | <sup>400</sup><br>У | <sup>500</sup><br>Ф | <sup>600</sup><br>Х | <sup>700</sup><br>Ѱ | <sup>800</sup><br>Ѡ | <sup>900</sup><br>Ц |
| <i>рцы</i>          | <i>слово</i>        | <i>тврьдъ</i>       | <i>ук</i>           | <i>ферт</i>         | <i>ха</i>           | <i>пси</i>          | <i>о</i>            | <i>цы</i>           |
| 100                 | 200                 | 300                 | 400                 | 500                 | 600                 | 700                 | 800                 | 900                 |

# Названия больших чисел в славянской нумерации

|                                                                                     |        |             |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------|-------------|
|   | Тысяча | 1000        |
|   | Тьма   | 10 000      |
|   | Легион | 100 000     |
|   | Леодр  | 1 000 000   |
|   | Ворон  | 10 000 000  |
|  | Колода | 100 000 000 |



Тьма  
 $10^6$



Легион  
 $10^{12}$



Леодр  
 $10^{24}$



Ворон  
 $10^{48}$



Колода  
 $10^{49}$

# Суздаль



# Александров

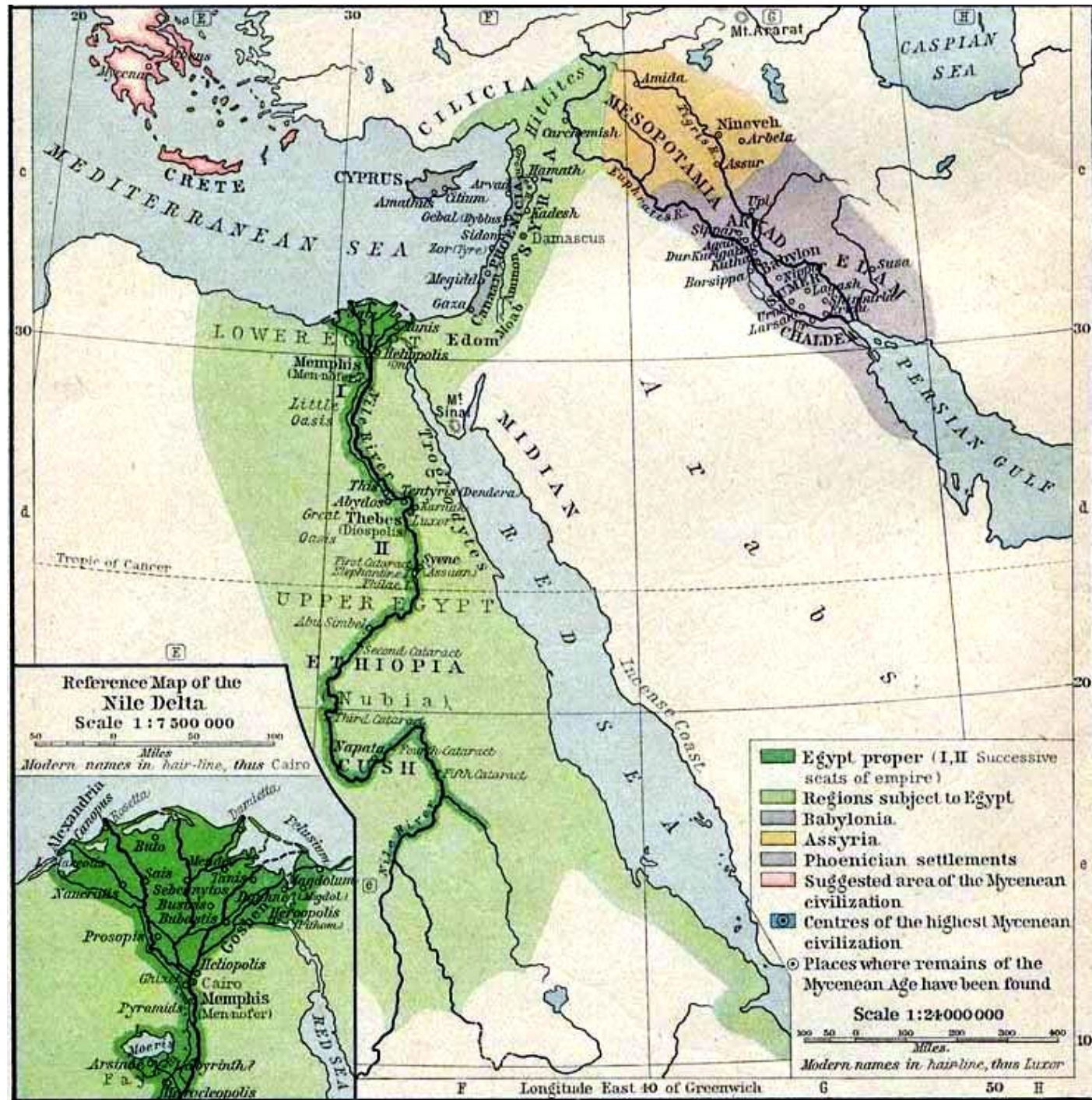


## Вавилонская клинопись



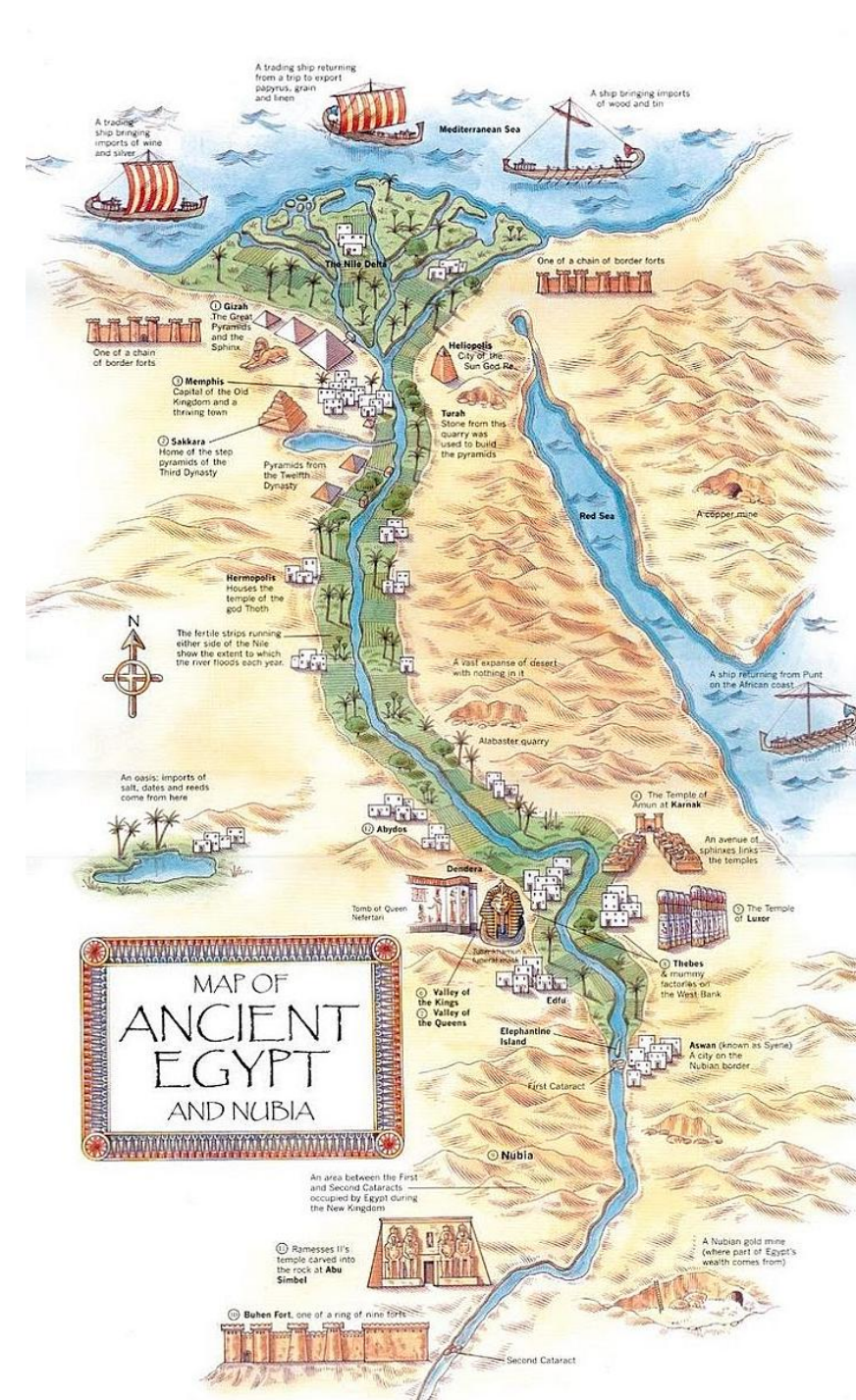
# Древний Египет

Отсутствие четкой хронологии раннего человечества не наносит серьезного ущерба истории естествознания, т.к. вряд ли можно всерьез говорить о научных достижениях до установления **оседлого образа жизни**, основанного на земледелии. Земледелие же возникло не позднее IV тысячелетия до н.э. В Месопотамии и Египте благодаря тому, что орошаемые Тигром, Евфратом и Нилом земли были настолько плодородны, что выращивание пшеницы стало занятием более легким и выгодным, чем кочевое скотоводство.



И Египет, и Вавилон были **земледельческими** государствами. Хорошие урожаи можно было получать только при условии регулирования разливов и осушения болот. Решение этих важных задач потребовало от населения **совместных усилий**, что и привело к **возникновению крупных государств** в отличие от мелких общин, к появлению централизованного управления, централизованной религии.

Возникло немало профессий и специальностей — ремесленники, солдаты, писцы и жрецы. Руководство же общественными работами стало находиться в руках **группы людей, которые хорошо разбирались** в вопросах, связанных со сменой времен года, движением небесных светил, землеустройства, взимания налогов и т.п.



Практически все древние культуры возникали в долинах крупных рек, где природные и климатические условия благоприятствовали жизни и деятельности человека.

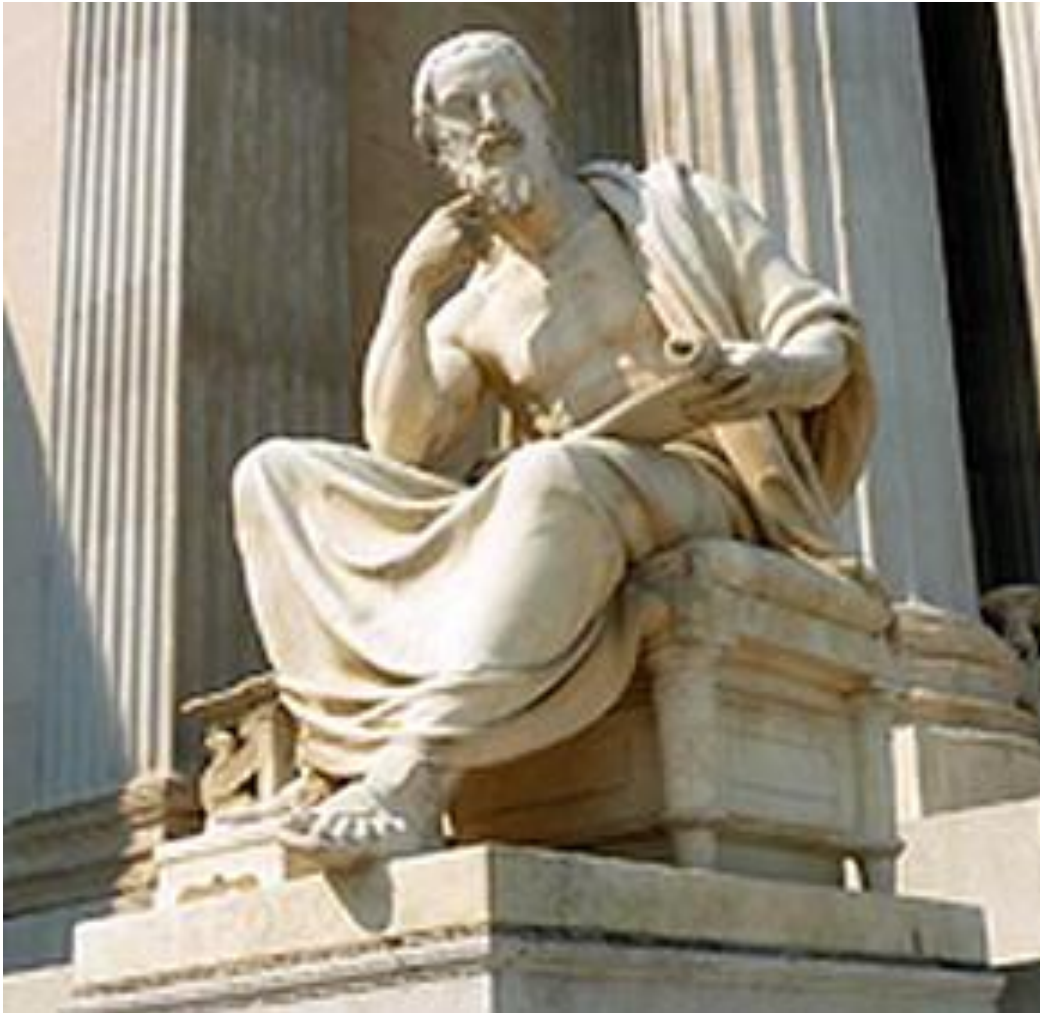
Египетское царство возникло в долине самой крупной реки Африки – Нила. История любого государства – это история борьбы за власть и история древнего Египта подтверждает это еще раз. Для нас важно отметить, что на протяжении нескольких тысячелетий **культура Египта развивалась без внешних влияний**, что и определило самобытность ее характера.

**Прокл Афинский (V в.н.э.):**

*Согласно большинству мнений, геометрия была впервые открыта в Египте и имела свое происхождение в измерении площадей.*

**Геродот** (между 490 и 480 – ок. 425 до н.э.):

*“Они [египетские жрецы] говорили, что царь разделил землю между всеми египтянами, дав каждому по равному прямоугольному участку; из этого он создал себе доходы, приказав ежегодно вносить налог.*



*Если же от какого-нибудь надела река отнимала что-нибудь, то владелец, приходя к царю, сообщал о происшедшем. Царь же посылал людей, которые должны были осмотреть участок земли и измерить, насколько он стал меньше, чтобы владелец вносил с оставшейся площади налог, пропорциональный установленному.*

*Мне кажется, что **так и была изобретена геометрия**, которая затем из Египта была перенесена в Элладу”.*

## Источники

1. **Папирус Ринда** (Rhind), названный так по имени своего первого владельца. Он был открыт в 1858 г. и впервые расшифрован и издан в 1870 г. Этот папирус представляет собой узкую (**33 см**), но длинную (**5,25 м**) полоску папирусной бумаги, содержащую **84 задачи**. Теперь одна его часть хранится в Британском музее в Лондоне, а другая находится в Нью-Йорке.

2. **Московский папирус**, примерно той же длины (**5,44 м**), но более узкий (**8 см**), содержащий **25 задач**. Его в декабре 1888 г. приобрел в Луксоре русский востоковед В.С. Голенищев, а теперь он принадлежит Государственному музею изобразительных искусств им. А.С. Пушкина в Москве.

3. **Кожаный свиток египетской математики**, с большим трудом распрямленный в 1927 г. и проливший свет особенно на египетскую арифметику. Ныне он хранится в Британском музее.

# Папирус Ринда



## Датировка источников

Все рукописи относятся к эпохе Среднего царства (XX–XVII вв. до н.э.) и были составлены, вероятнее всего, для учебных целей.

**Папирус Ринда** переписан писцом Ахмесом около 1650 г. до н.э. и, как сказано в нем, посвящен *“совершенному и основательному исследованию всех вещей, пониманию их сущности, познанию их тайн”*, — именно так высоко ценились в то далекое время математические знания. Автор **оригинала** так же неизвестен, известно лишь, что он был написан **во второй половине XIX в. до н.э.**

**Московский папирус** был переписан неким учеником во времена гиксосов (ок.1800–1600 гг. до н.э.) с более древнего текста, относящегося к 1900 г. до н.э.

**Кожаный свиток** датируется примерно **XIX–XVIII вв. до н.э.**

В эпоху Древнего царства (XXVIII–XX вв. до н.э.) египтяне писали при помощи **иероглифов** (от греческих слов *ιερος* – священный и *γλυφη* – резьба). Каждый иероглиф представляет собой маленький рисунок, соответствующий некоторому слову или слогу.

Позже, в эпоху Среднего царства, вместо каждого иероглифа стали изображать лишь несколько характерных штрихов – так возникло **иератическое** письмо.

И, наконец, в эпоху Нового царства появилось скорописное **демотическое** письмо. Так что уже по тому, какое письмо использовал автор, исследователи могут судить о том, в какое время мог быть написан тот или иной документ.

В качестве иллюстрации – слайд о дробях в египетской математике.

# Дроби в египетской математике

|               |                        |               |                            |                                          |               |                                          |
|---------------|------------------------|---------------|----------------------------|------------------------------------------|---------------|------------------------------------------|
| $\frac{1}{2}$ |                        |               |                            |                                          |               | $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$               |
| $\frac{1}{3}$ |                        |               |                            | $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$               |               | $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$               |
| $\frac{2}{3}$ |                        |               |                            | $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$               | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$               |
| $\frac{1}{4}$ |                        |               |                            | $\frac{1}{4}$                            | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$               |
| $\frac{3}{4}$ |                        |               |                            | $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  |               | $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  |
| $\frac{1}{6}$ |                        |               |                            | $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}$ |               | $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}$ |
| $\frac{5}{6}$ |                        |               | $\frac{5}{6}, \frac{1}{3}$ | $\frac{5}{6}, \frac{1}{6}$               |               | $\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$  |
|               | древнее царство        | новое царство | позднейшее время           | древнее                                  | новое         | демотическое письмо                      |
|               | иероглифическое письмо |               |                            | иератическое письмо                      |               |                                          |

В 2013 г. в старой гавани Вади-эль-Джарф на побережье Красного моря были обнаружены несколько свитков папируса. Некоторые из них были фрагментарными, другие имели длину до нескольких метров. Все они содержали тексты, написанные иероглифами или иератиками — скорописью, которую древние египтяне использовали для повседневного общения.

Датированы исторические документы были «годом после 13-го подсчёта скота» во время правления фараона Хуфу (**Хеопс** 2589—2566 гг. до н. э.), что означает около 27 года его царствования. Таким образом эти папирусы становятся самими **древними историческими записями на Земле** из когда-либо найденных.

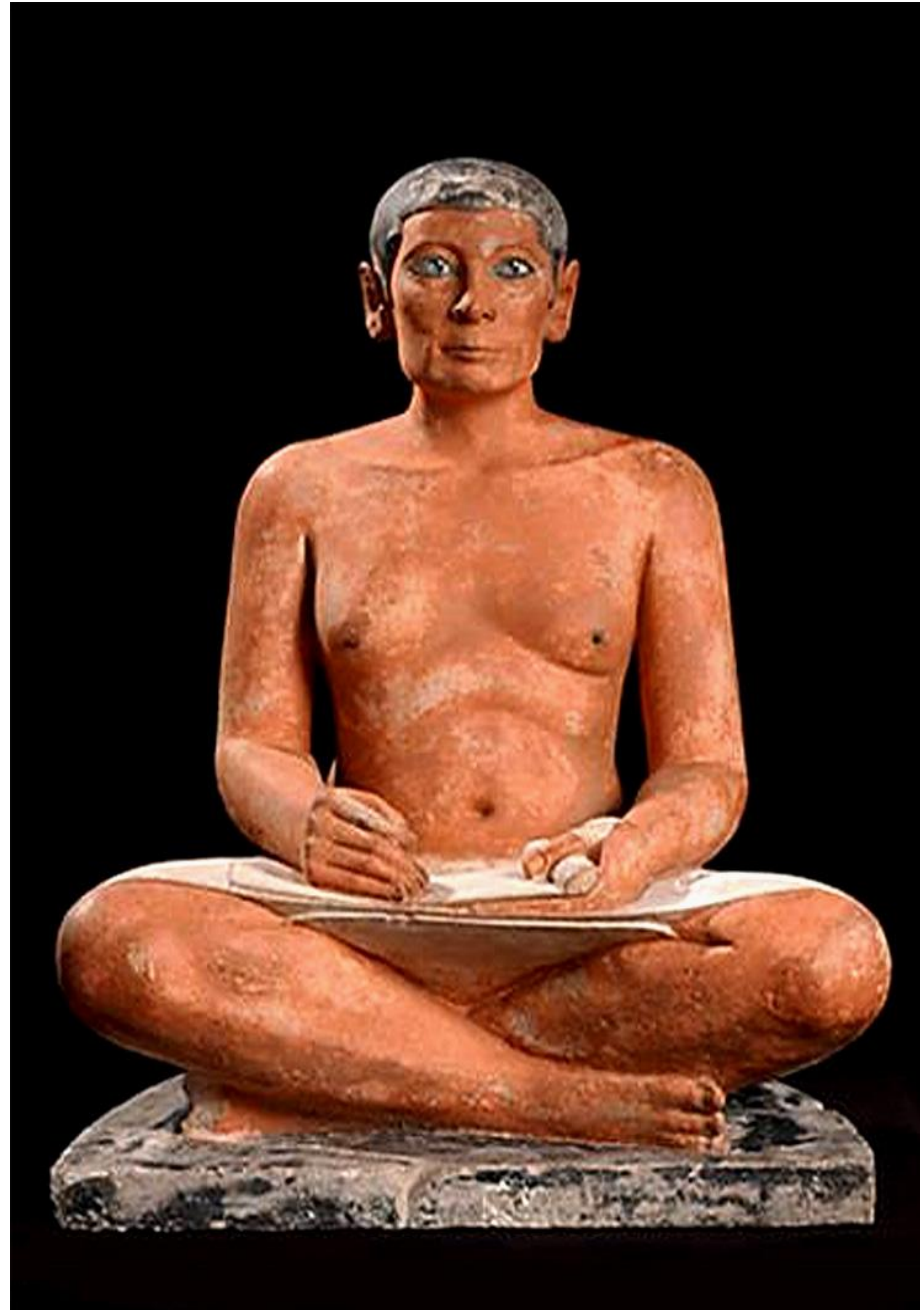
Расшифровка текстов показывает, что написаны они были людьми, строившими Великие пирамиды. Это — счета за продукты, рабочие сметы и распоряжения и т.п. Были описания всех произведённых действий. В документах было указано, что в возведении величественных египетских пирамид принимали участие более двух десятков тысяч человек.

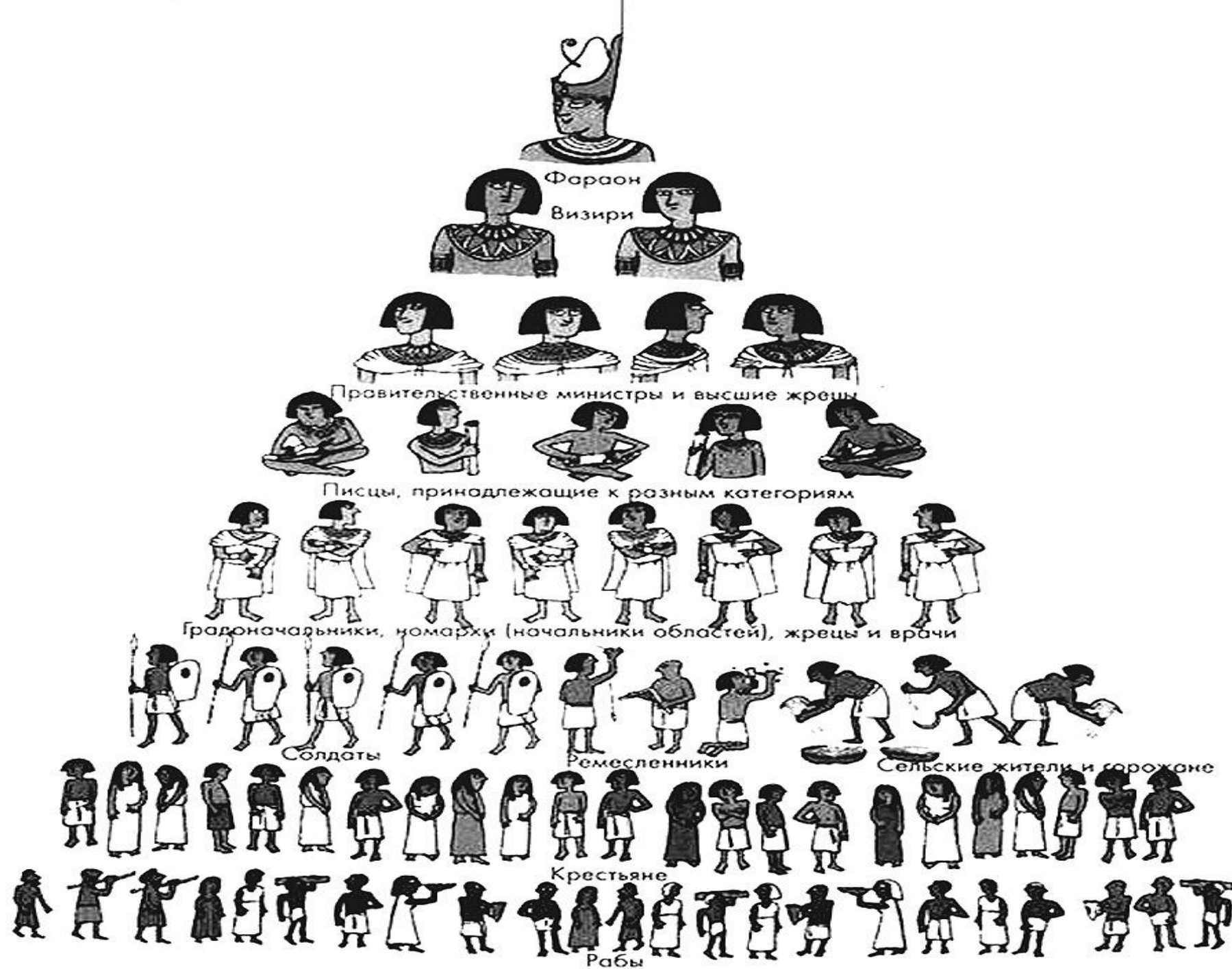


8



## *Для кого предназначались математические папирусы*





В одном из древних папирусов, представляющем собой наставление некоего египтянина Дуау его сыну Пиопи, в красочных выражениях рисуется безотрадная жизнь крестьянина, каменщика, садовника и людей других профессий. Своему же сыну Дуау прочит карьеру писца, о чем пишет так:

*“Обрати свое сердце к книгам... Как в воде, плавай в книгах – ты найдешь там наставление: “если писец находится при дворе, он не будет в нем нищим, но насытится”. Я не знаю другой должности, которая могла бы дать повод к подобному изречению, поэтому внушаю тебе **любить книги, как родную мать**, и излагаю тебе все преимущества знающих их”.*

Писцы + вели в суде записи показаний. Они составляли различные договоры, например завещания, брачные и деловые контракты.

Взятки запрещались, хотя один текст гласит, что для того, чтобы одержать победу в суде, нужно «золото и серебро для писцов в суде и одежды для служителей».

Судьи

Свидетели подвергались перекрестному допросу, и их показания тщательно записывались.

Все свидетели давали клятву. Каждый заподозренный во лжи подвергался телесным наказаниям.



“Я хочу объяснить Тебе, в чем Твоя сущность, когда Ты говоришь: “Я полномочный писец войска”.

Тебе дадут озеро, которое Ты должен выкопать. Тогда Ты приходишь ко мне, чтобы осведомиться насчет провианта для солдат. Ты говоришь: “Вычисли его мне”.

Ты неисправен по своей должности, и то, что я Тебя должен поучать выполнению Твоих обязанностей, обрушится на Твой же затылок.

Иди сюда, я скажу Тебе кое-что в дополнение к тому, что Ты сказал. Я ставлю Тебя в затруднительное положение, когда я [заставляю Тебя представить следующее]: Ты – царский писец, Ты приведен к окну [для аудиенции] для какого-нибудь замечательного дела...

Необходимо сделать укрепление в 730 локтей длины и 55 локтей ширины, состоящее из 120 ящиков, наполненных балками и камышом; в верхней части его высота 60 локтей, в середине 30 локтей с ... в 15 локтей, и его ... имеет 5 локтей. Спрашивают у генералов, сколько для этого укрепления потребно кирпичей, и собрались все писцы, и ни один из них ничего не знает, они все полагаются на Тебя и говорят: “Мой друг, Ты – опытный писец, так реши же быстро для нас”... **Не допусти, чтобы о Тебе сказали: “Есть также и такие вещи, которых и Ты не знаешь”.**

Все правила счета древних египтян основывались на умении складывать, удваивать и дополнять дроби до единицы, а значит, операции умножения и деления им приходилось сводить к операции сложения.

Задача папируса Ринда

**Умножение:**

$$13 \times 12$$

|           |     |
|-----------|-----|
| /1        | 12  |
| 2         | 24  |
| /4        | 48  |
| /8        | 96  |
| С у м м а | 156 |

**Деление** производилось как действие, обратное умножению. В задаче 69 папируса Ринда, в которой требуется разделить 1120 на 80, указание гласит: “Умножай 80, пока не получишь 1120”.

|     |      |
|-----|------|
| 1   | 80   |
| /10 | 800  |
| 2   | 160  |
| /4  | 320  |
|     | 1120 |

С помощью операций **удвоения** и **раздвоения** египетский вычислитель мог разделить два целых числа в том случае, когда деление происходит с остатком, но делитель является какой-то степенью числа 2. Чтобы разделить 19 на 8, потребуется таблица:

|       |    |
|-------|----|
| 1     | 8  |
| / 2   | 16 |
| 1/2   | 4  |
| / 1/4 | 2  |
| / 1/8 | 1  |

**Если же делитель не был степенью числа 2**, то результат не мог быть получен только одним процессом раздвоения. Вычислитель в “подходящий” момент прерывал образование половин и для оставшейся части подыскивал “удобные” аликвотные дроби. **Ответ** в таких случаях вовсе **не обязательно** бывал **однозначным**.

В связи с выполнением операции деления в древнем Египте возникла теоретико-числовая задача **о разложении дроби в сумму аликвотных** – задача, не имеющая единственного решения, которую древние математики пытались решить эмпирически, в несколько этапов.

Она была сведена к составлению **таблицы канонических разложений для дробей  $2/n$**  и именно этой таблицей начинается папирус Ринда. Задачи, связанные с отысканием разложений различных дробей, а также различных соотношений между ними, содержатся в большом количестве и в Кожаном свитке.

**Действия с дробями** представляют самую замечательную **особенность египетской арифметики**, однако, каким образом были получены многие из разложений в упомянутой таблице и почему из нескольких вариантов выбран один единственный, до сих пор остается неясным.

# Таблица разложения дробей $2/n$ из папируса Ринда

|                                      |                                       |                                         |
|--------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------|
| $2/3 = 1/2 + 1/6$                    | $2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296$         | $2/71 = 1/40 + 1/568 + 1/710$           |
| $2/5 = 1/3 + 1/15$                   | $2/39 = 1/26 + 1/78$                  | $2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365$   |
| $2/7 = 1/4 + 1/28$                   | $2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328$         | $2/75 = 1/50 + 1/150$                   |
| $2/9 = 1/6 + 1/18$                   | $2/43 = 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301$  | $2/77 = 1/44 + 1/308$                   |
| $2/11 = 1/6 + 1/66$                  | $2/45 = 1/30 + 1/90$                  | $2/79 = 1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790$   |
| $2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104$          | $2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470$         | $2/81 = 1/54 + 1/162$                   |
| $2/15 = 1/10 + 1/30$                 | $2/49 = 1/28 + 1/196$                 | $2/83 = 1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498$   |
| $2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68$          | $2/51 = 1/34 + 1/102$                 | $2/85 = 1/51 + 1/255$                   |
| $2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114$         | $2/53 = 1/30 + 1/318 + 1/795$         | $2/87 = 1/58 + 1/174$                   |
| $2/21 = 1/14 + 1/42$                 | $2/55 = 1/30 + 1/330$                 | $2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890$   |
| $2/23 = 1/12 + 1/276$                | $2/57 = 1/38 + 1/114$                 | $2/91 = 1/70 + 1/130$                   |
| $2/25 = 1/15 + 1/75$                 | $2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531$         | $2/93 = 1/62 + 1/186$                   |
| $2/27 = 1/18 + 1/54$                 | $2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610$ | $2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570$           |
| $2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232$ | $2/63 = 1/42 + 1/126$                 | $2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776$           |
| $2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155$        | $2/65 = 1/39 + 1/195$                 | $2/99 = 1/66 + 1/198$                   |
| $2/33 = 1/22 + 1/66$                 | $2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536$         | $2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606$ |
| $2/35 = 1/30 + 1/42$                 | $2/69 = 1/46 + 1/138$                 |                                         |

**Пример реконструкции разложения дроби в сумму аликвотных:**

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} =$$

$$= \frac{1}{26} + \frac{1}{26} + \frac{1}{13} =$$

$$= \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{26} + \frac{1}{13} =$$

$$= \frac{1}{104} + \frac{1}{104} + \frac{1}{52} + \frac{1}{26} + \frac{1}{13} =$$

$$= \frac{1}{104} + \frac{1}{52} + \frac{1}{8}$$

**Алгебраические задачи** очень просты и сводятся к линейному уравнению с одним неизвестным.

Задача 33 из папируса Ринда формулируется следующим образом:  
*“Некое количество, его  $\frac{2}{3}$ , его  $\frac{1}{2}$  и его  $\frac{1}{7}$ , сложенные вместе дают 37. Каково это количество?”*

Ответ записан в аликвотных дробях:

$$16 + \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776} .$$

С современной точки зрения в таких задачах решаются уравнения первой степени вида

$$x + ax + bx + cx + \dots = p ,$$

где  $a, b, c, \dots$  — дроби, а  $p$  — целое число. Для неизвестного в таком уравнении существовал специальный иероглиф, обозначавший “кучу” и произносившийся “хау” или “аха”. Поэтому иногда египетскую алгебру называют “хау-исчислением”.

## Метод «ложного положения»

Папирус Ринда, задача 26:

*Куча: ее четвертая часть и ее целое составляют 15.*

- 1. Пусть куча = 4, тогда куча + ее четвертая = 5, а не 15.*
- 2. Какая связь между 5 и 15? 5 умножить на 3 будет 15.*
- 3. Умножим взятое 4 на 3, получим ответ 12.*
- 4. Проверим, что получен правильный ответ:  $12 + \frac{1}{4} 12 = 15$  верно.*

Папирус Ринда, задача 24:

*Куча: ее седьмая часть и ее целое составляют 19.*

*Пусть куча = 7, тогда куча + ее седьмая = 8, а не 19.*

*Поэтому            Ответ:  $(19/8) \times 7$ .*

## Задачи на арифметическую и на геометрическую прогрессии

Задача 79 папируса Ринда: «В каждом из 7 домов есть по 7 кошек, каждая кошка съела 7 мышей, каждая мышь съела 7 колосков ячменя, каждый колос мог дать 7 мер зерна. Спрашивается, сколько всего домов, кошек, мышей, колосьев и мер хлеба?»

В папирусе эта задача задана таблицей:

### Опись домашнего хозяйства

|          |        |        |   |               |
|----------|--------|--------|---|---------------|
| Лестница | дом    | 7      |   |               |
|          | кошка  | 49     | 1 | 2 801         |
|          | мышь   | 343    | 2 | 5 602         |
|          | ячмень | 2 401  | 4 | 11 204        |
|          | мера   | 16 807 |   | Вместе 19 607 |

## Леонардо Пизанский, “Liber abaci” (1202):

*«Семь старух идут в Рим; каждая из них имеет семь посохов; на каждом посохе по семь мешков; в каждом мешке по семь хлебов; в каждом хлебе семь ножичков; у каждого ножичка семь ножен. Ищется сумма всего поименованного».*

## Древнерусская рукопись XVII в.:

*«Идут семь баб; у всякой бабы по семь посохов; на всяком посохе по семи сучков; на всяком сучке по семи кошелей; во всяком кошеле по семи пирогов; во всяком пироге по семи воробьев; во всяком воробье по семи пупков и всего*

$$7 + 49 + 343 + 2\,401 + 16\,807 + 117\,649 + 823\,543 = 960\,799».$$

**Важно:** древние египтяне знали, что предложенные два способа дают одно и то же значение, т.е. знали (???) тождество:

$$7(1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 ,$$

для доказательства которого нужно знакомство с законами алгебраических преобразований!



В Берлинском папирусе есть задача:

«Площадь квадрата в 100 квадратных кубитов равна сумме двух меньших квадратов. Сторона одного из них составляет  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{4}$  стороны другого. Найди длины сторон этих квадратов.»

На современном языке эта задача эквивалентна решению **системы двух уравнений с двумя неизвестными**, для решения которой необходимо сделать подстановку и раскрыть скобки:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)y \end{cases}$$

Значит ли это, что древним египтянам были известны некоторые правила алгебраических преобразований? Ответа дать мы не можем, поскольку никаких объяснений в тексте нет.

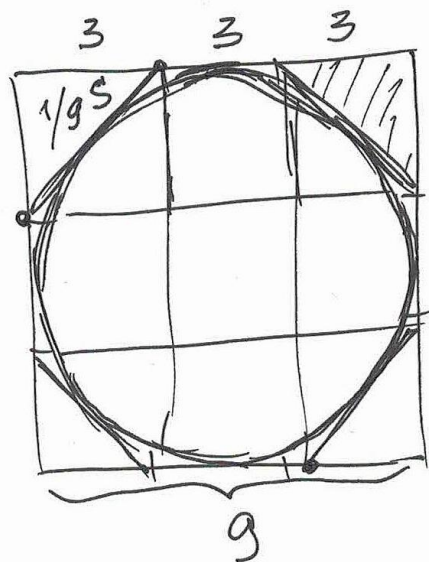
Эта задача интересна для исследователей также и тем, что в ее решении можно усмотреть египетский треугольник (3,4,5), который иногда обнаруживается в самых неожиданных местах. Например, в одном из документов XX в. до н.э., найденном в Кахуне (Эль-Лакхун – древнеегипетский некрополь), используется выражение

$$1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2,$$

и в обсуждаемой задаче после подстановки в первое уравнение мы получаем это же выражение.

## Геометрические знания древних египтян

1. Площади прямоугольника, треугольника, трапеции; приближенная формула площади произвольного четырехугольника.
2. Египетский треугольник (3, 4, 5), НО теоремы Пифагора как таковой нет.
3. Площадь круга через диаметр  $S=(d - d/9)^2$ , откуда значение числа  $\pi = 4(8/9)^2 \approx 3.1605$ . В Московском папирусе есть задача о поверхности корзины неясной формы, в которой то же значение  $\pi$ .
4. Пространственные тела: пирамида; объем куба, параллелепипеда, призмы и цилиндра; объем усеченной пирамиды, в основании которой квадрат и одно из ребер перпендикулярно основанию:  
 $V=h/3(a^2+ab+b^2)$ .



Пусть  $a = 9 = d$

Впишем восьмиугольник в этот квадрат  $\Rightarrow$  его площадь

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$$

$$S_{\text{кв}} = 81$$

$$\Rightarrow S_8 = S_{\text{кв}} - 4S_{\triangle} = -18 + 81 = 63 \approx 8^2$$

$$\Rightarrow S_8 \approx S_{\text{кв}} \text{ на } a=8$$

$$\Rightarrow S_{\text{кр}} \approx S_{\text{кв}} \text{ на } a=8$$

$$\Rightarrow S_{\text{кр}} = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot d^2, \text{ если } d - \text{любой.}$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot r^2$$

$\pi$

**Гипотеза А.Е. Раик:** площадь круга диаметра  $d$  сравнивается с площадью описанного квадрата, из которого по очереди удаляются малые квадраты со сторонами  $1/6 d$  и  $1/9 d$ .

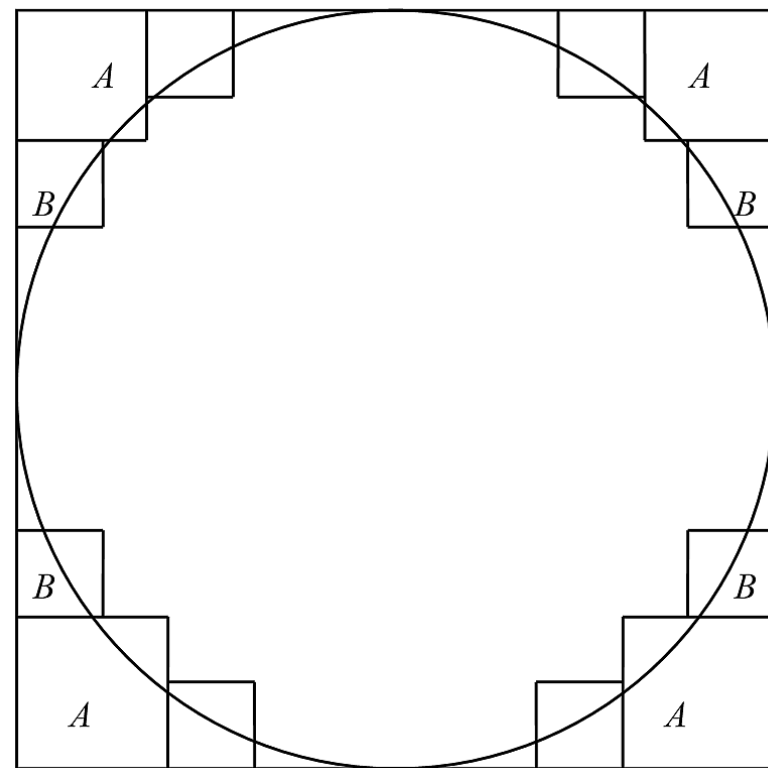
В первом приближении площадь круга  $S$  равна разности между площадью квадрата со стороной, равной диаметру круга  $d$ , и четырьмя квадратами  $A$  со стороной  $\frac{1}{6}d$ :

$$S \approx d^2 - 4\left(\frac{1}{6}d\right)^2 = d^2\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9}d^2.$$

Во втором приближении из полученной площади нужно отнять площадь восьми квадратов  $B$  со стороной  $\frac{1}{9}d$ , и тогда площадь круга будет приближенно равна

$$S \approx \left(1 - \frac{1}{9}\right)d^2 - 8\left(\frac{1}{9}d\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{9}\right)d^2 - \frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)d^2 = \left(1 - \frac{1}{9}\right)d^2 - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right)d^2 = \left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 d^2.$$

В пользу этой гипотезы свидетельствуют аналогичные вычисления в одной из задач Московского папируса, в которой требуется вычислить  $\left(1 - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right)$ .



## **Астрономические знания древних египтян.**

За движением небесных светил, в первую очередь, в древнем Египте следили жрецы, тем не менее и писцам очень часто приходилось не только подсчитывать урожай, провиант, количество материалов, необходимых для строительства и т.п., но и пользоваться календарем — подсчитывать количество дней, необходимых для выполнения той или иной работы, например.

**На основе астрономических наблюдений** египтяне рассчитали **астрономический год**, разделенный на 12 месяцев по 30 дней, сгруппированных в три сельскохозяйственных сезона по 4 месяца в каждом: период разлива, период сева и период жатвы. К 360 дням года они добавляли 5 дней, отвечающих главным праздникам.