15 апреля Катерина из Анчьяно и Маргарита Бруккер из Сент-Жакоби подарили своим возлюбленным сыновей, а человечеству гениев двух эпох — **Леонардо да Винчи** (**1452**) эпохи Возрождения и **Леонарда Эйлера** (**1707**) эпохи Просвещения.

Великий живописец, скульптор, архитектор, ученый и инженер и — спустя 255 лет великий математик.

Их гениальность в сочетании с работоспособностью и трудолюбием оставила яркий след в истории развития человечества.

Леонард ЭЙЛЕР (1707–1783)

Родился в Базеле (Швейцария).

1720–1724 Учеба в университете Базеля.

1727–1741 СПб АН свыше **50** работ опубликовано и около **80** подготовлено.

1736 Механика 2 тома

1738 географические карты России

1741–1766 Берлинская АН около **260** работ

1744 Трактат о вариационном исчислении

1748 Введение в анализ бесконечных (2 тома)

1755 Дифференциальное исчисление

1765 Механика

В последующие два года юный Эйлер написал несколько научных работ.

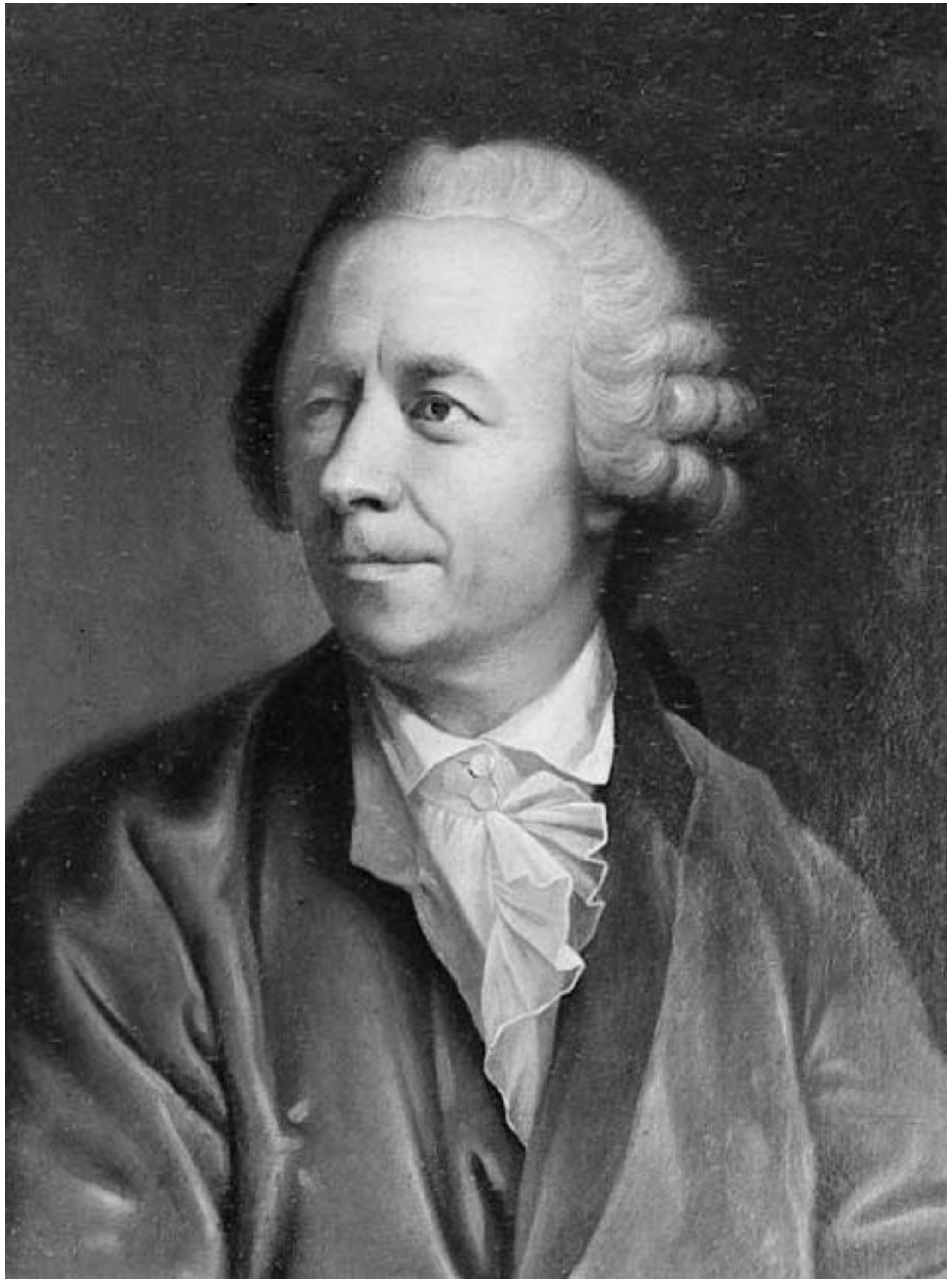
Одна из них, «Диссертация по физике о звуке», была представлена на конкурс для замещения неожиданно освободившейся в Базельском университете должности профессора физики (1725).

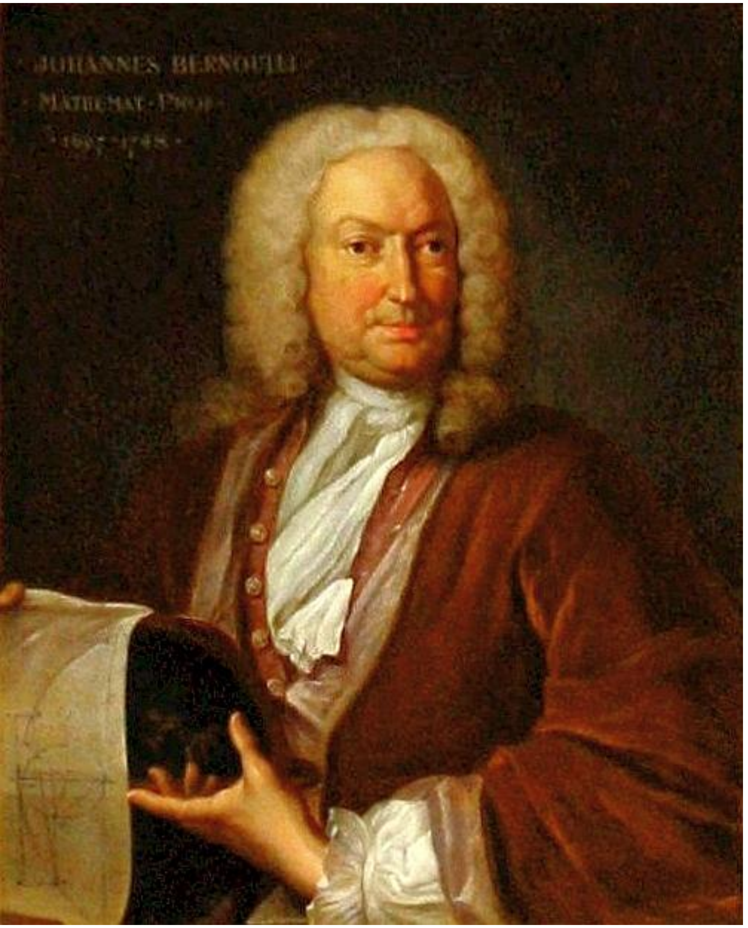
Несмотря на положительный отзыв, 19-летнего Эйлера сочли слишком юным, чтобы включить в число кандидатов на профессорскую кафедру.

Слева: Эйлер Иоганн Альбрехт (1734–1800) – старший сын Леонарда Эйлера.

В 1735 г. Академия получила задание выполнить срочное и очень громоздкое **астрономическое вычисление**. Группа академиков просила на эту работу три месяца, а Эйлер взялся выполнить работу за 3 дня — и справился самостоятельно. **Перенапряжение в работе с вычислениями и географическими картами** не прошло бесследно: он заболел и потерял зрение на правый глаз.

Однако учёный отнёсся к несчастью с величайшим спокойствием: “***Теперь я меньше буду отвлекаться от занятий математикой***” , — философски заметил он.





Обращение Иоганна Бернулли к Леонарду Эйлеру:

1728: «*ученейшему и даровитейшему юному мужу Леонарду Эйлеру*»

1731: «*славнейшему и ученейшему господину профессору, дражайшему другу*»

1741: «*знаменитейшему и превосходнейшему мужу*»

1746: «*главе математиков Леонарду Эйлеру*».

1725–1744	15% всех сочинений Эйлера
1745–1764	35%
1765–1783	50%

В **1762 г**. на русский престол вступила Екатерина II, которая была готова на все, чтобы вернуть Эйлера в Россию: предложила управление математическим классом, звание конференц-секретаря Академии и оклад **1800** рублей в год.

«А если не понравится, – *говорилось в ее письме, –* ***благоволит сообщить свои условия, лишь бы не медлил приездом в Петербург***».

В июле 1766 г. 60-летний Эйлер, его семья и домочадцы (всего 18 человек) прибыли в российскую столицу теперь уже навсегда.

Императрица встретила его как мировую знаменитость и осыпала милостями: пожаловала **8000** рублей на покупку дома на Васильевском острове, предоставила на первое время одного из своих поваров и поручила подготовить соображения о реорганизации Академии.

1766–1783 **Возвращение в Россию**, в Санкт-Петербург

еще **416** книг и статей *(под диктовку)*

1768–1770 **Интегральное исчисление** (3 тома) (в 1794 г. издан 4й том, посмертно)

1768–1769 Трактат по алгебре (2 тома)

1768–1772 Трактат по натурфилософии (3 тома) –

«Письма о разных физических и философических материях, писанные к некоторой немецкой принцессе», на франц. языке

12 франц. изданий, 9 англ., 6 нем., 4 русск., 2 голл., 2 швед., 1 итал., 1 исп., 1 дат.

1768–1772 Диоптрика (3 тома)

1772 Новая теория исчисления лунной орбиты

1778 Теория кораблестроения и навигации

1909 – принято решение об издании ПСС из 72 томов;

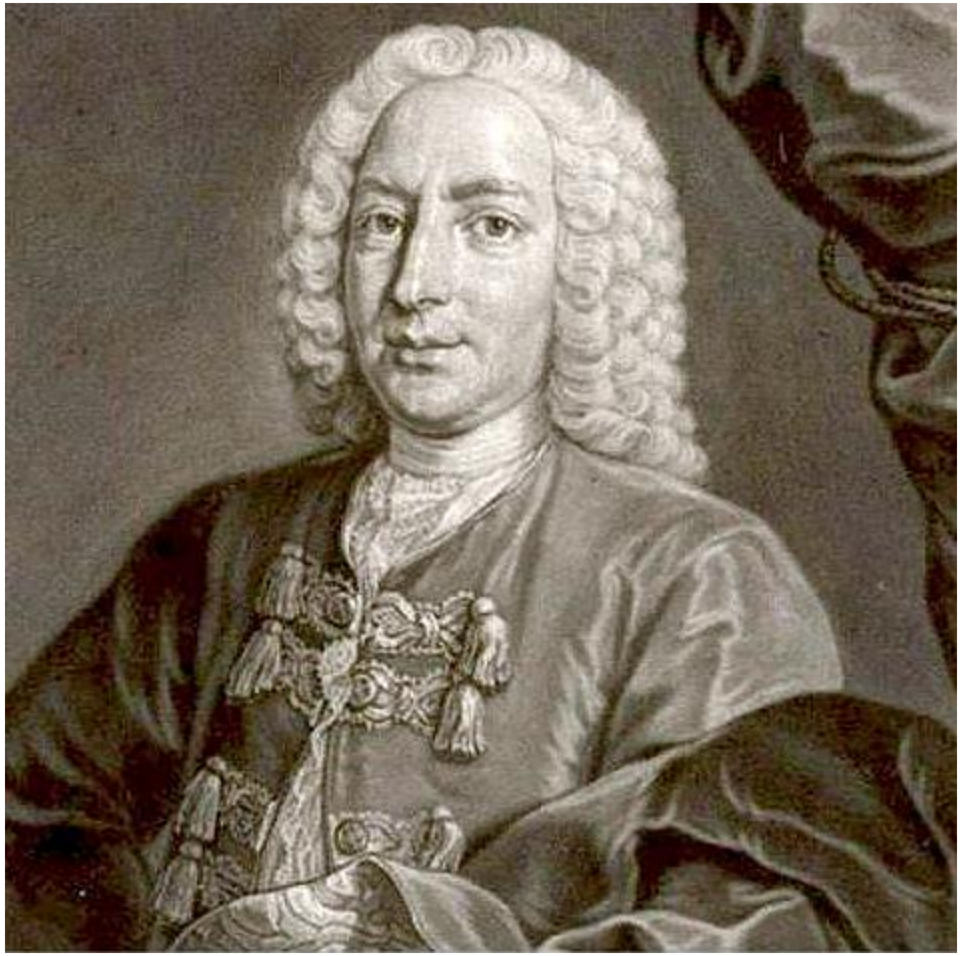
в сентябре **2022** – «***Opera omnia***»: 29 томов по математике, 31 – по механике, 12 – по физике, 9 – переписка. Таким образом сейчас ПСС насчитывает **81** том, из которых опубликовано 80 (последний том переписки готовится к публикации). В сентябре 2022 она стала доступна он-лайн (ссылки в английской Википедии).

В процентном отношении работы по математике распределяются так: анализ – 60%, геометрия – 17%, теория чисел – 13%, алгебра – 7%, теория вероятностей – 3 %.

Внутри анализа особенно большое место занимают работы по интегральному исчислению – 33 %; дифференциальным уравнениям посвящено 25%, рядам – 22% и вариационному исчислению – 11%. В остальные 9% входят «Дифференциальное исчисление» и «Введение в анализ бесконечно малых».

Научная деятельность Эйлера носила *алгоритмический* характер: от конкретных прикладных задач (около 40 % всех работ) к общей теории.

В задачах физики и техники с великим искусством выделял собственно математическое содержание и переходил к разработке приемов в возможно более общей и широкой форме.



Д. Бернулли прежде всего – физик, обращался к математике в меру необходимости, часто ограничиваясь лишь физическими соображениями, не развивая найденные аналитические приемы.

Д. Бернулли о занятиях Эйлера теорией чисел:

«… дань чрезмерной утонченности вкусов XVIII столетия».

Идеи Эйлера на будущее:

- предварил исследования Гаусса по внутренней геометрии поверхностей;
- в топологии – впервые сформулирована теорема о топологической характеристике многогранников;
- впервые в теории чисел применены методы анализа – создание аналитической теории чисел.

Множество переоткрытий: например, в задаче о колебании круглой мембраны мы используем **уравнение Бесселя** (1784–1846) – линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами, которое **Эйлер** получил в 1766 и решил с помощью бесконечного ряда, выражающего цилиндрические функции 1-го рода и любого порядка.

УЧЕНИЕ О ФУНКЦИИ

Центром математических исследования XVIII века стал **математический анализ**, рассматриваемый как **мощное орудие миропознания**. Лейбниц в сентябре **1691** писал Х. Гюйгенсу:

«*Я хочу, чтобы мы могли* ***еще в этом веке довести до завершения анализ чисел и линий*** *(то есть математический анализ – sic!), по крайней мере, в главном, дабы избавить от этой заботы человеческий род,* ***чтобы отныне вся проницательность человеческого разума обратилась к физике***».

Но довольно скоро стало ясно, что надежды на столь быстрое построение анализа (даже только в главном) оказались преждевременными. В **1708** тот же Лейбниц предупреждал:

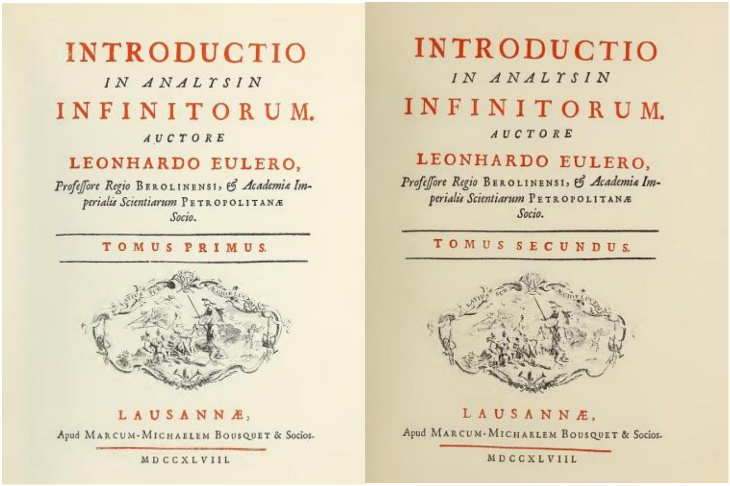
«*Не следует удивляться, что анализ бесконечно малых делает только первые шаги и что* ***мы совсем не хозяева положения*** *ни в квадратурах, ни еще менее в обратной задаче касательных и, в еще меньшей мере, при решении дифференциальных уравнений…*».

Математический анализ в 18 веке:

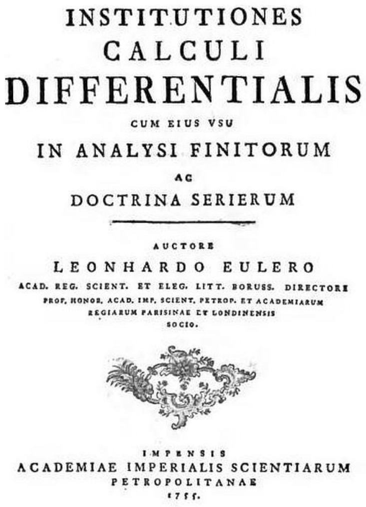
в начале века – исчисление со множеством приложений,
в конце века – совокупность достаточно разработанных дисциплин.

Классическая трилогия Эйлера:

1748 Введение в анализ бесконечных (2 тома, второй том посвящен аналитической геометрии)

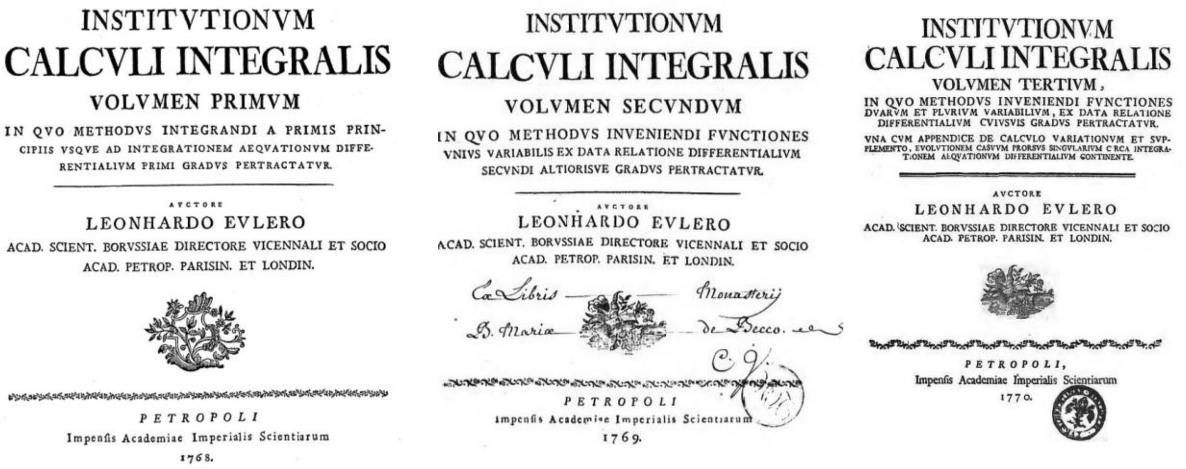

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & Academiae Imperialis Scientiarum PETROPOLITANAE Socio.
TOMUS PRIMUS.
LAUSANNAE,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & Academiae Imperialis Scientiarum PETROPOLITANAE Socio.
TOMUS SECUNDUS.
LAUSANNAE,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.


INSTITUTIONES
CALCULI
DIFFERENTIALIS
CUM EIUS VSU
IN ANALYSI FINITORUM
AC
DOCTRINA SERIERUM
AUCTORE
LEONHARDO EULERO
ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP. ET ACADEMIARUM
REGIARUM PARISINAE ET LONDINENSIS
SOCIO.
IMPENSIS
ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM
PETROPOLITANAE
1755.

1755 Дифференциальное исчисление

1768–1770
Интегральное исчисление
(3 тома)


INSTITVTIONVM
CALCVLI INTEGRALIS
VOLVMEN PRIMVM
IN QVO METHODVS INTEGRANDI A PRIMIS PRINCIPIIS VSQVE AD INTEGRATIONEM AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM PRIMI GRADVS PERTRACTATVR.
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO
ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.
PETROPOLI
Impensis Academiae Imperialis Scientiarum
1768.

INSTITVTIONVM
CALCVLI INTEGRALIS
VOLVMEN SECVNDVM
IN QVO METHODVS INVENIENDI FVNCTIONES VNIVS VARIABILIS EX DATA RELATIONE DIFFERENTIALIVM SECVNDI ALTIORISVE GRADVS PERTRACTATVR.
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO
ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.
Ex Libris Monasterii B. Mariae de Becco
PETROPOLI
Impensis Academiae Imperialis Scientiarum
1769.

INSTITVTIONVM
CALCVLI INTEGRALIS
VOLVMEN TERTIVM,
IN QVO METHODVS INVENIENDI FVNCTIONES DVARVM ET PLVRIVM VARIABILIVM, EX DATA RELATIONE DIFFERENTIALIVM CVIVSVIS GRADVS PERTRACTATVR.
VNA CVM APPENDICE DE CALCVLO VARIATIONVM ET SVPPLEMENTO, EVOLVTIONEM CASVVM PRORSVS SINGVLARIVM CIRCA INTEGRATIONEM AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM CONTINENTE.
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO
ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.
PETROPOLI,
Impensis Academiae Imperialis Scientiarum
1770.

У Эйлера анализ – **единая система, объединенная концепцией функции**: «***Весь анализ бесконечно малых вращается вокруг переменных величин и их функций***».

«*До Эйлера математический анализ был лишь системой методов, служивших для решения вопросов, системой слабой, без прочной внутренней связи – самостоятельного абстрактного объекта.*

Эйлер нашел такой объект в понятии функции – великой идее Лейбница и Бернулли *– и тем положил основание математического анализа как отдельной книги*». И.Ю. Тимченко (1862–1939)

Математический язык и система обозначений близки к современным. Изложение чисто аналитическое, независимое от геометрии и механики.

Еще при жизни Ньютона и Лейбница стало очевидно, что созданное исчисление – лишь преддверие новой области математики, ее элементарная часть. Самой главной трудностью стала **необходимость такого представления функциональной зависимости, которое позволяет применять операции нового исчисления**. Поэтому первейшей задачей анализа бесконечно малых стала **задача создания теории функций**.

1637 Рене **Декарт**: ***Функция*** – это ***уравнение*** ⇒ ограничивал лишь *алгебраическими выражениями*.

1668 Николай **Меркатор** открыл разложение в ***бесконечные ряды***:

Логарифм – это площадь под гиперболой:

т.к. $\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$, то $\boldsymbol{ln\,(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots}$

1668 Джеймс **Грегори**, Джон **Валлис**: $ln\frac{1+x}{1-x}$, $ln\frac{1}{1-x}$.

1670е Исаак **Ньютон**:

Функция – это ***ряд***, но **необязательно по целым степеням** неизвестной (бином Ньютона): 1) нашел ряд для $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{p/q}$;

2) исследовал обратные тригонометрические функции и нашел их ряды;

3) обращением рядов получил ряды для e^x, $\sin x$, $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ **,** для дуг эллипса и др.**;**

⟹ разрабатывал методы и приемы оперирования с бесконечными рядами (спец. аппарат). Таким образом открыты и изучены новые трансцендентные функции.

Лучшее определение функции в то время: Дж. **Грегори 1667**

Функция *– это величина, полученная из других величин с помощью последовательности алгебраических операций или «**любой мыслимой операции**».*

Впервые термин «**функция**» появился у **Лейбница** в **1673** в неизданной работе «Обратный метод касательной или рассуждения по поводу функций»:

*«Я называю **функциями** всякие части прямых линий, которые получают, проводя бесконечные прямые, соответствующие неподвижной точке и точкам кривой, каковы: абсцисса, ордината, хорда, касательная или нормаль, подкасательная или поднормаль… и бесконечное множество других, какие можно себе представить и построение которых более сложно…»*

$\Longrightarrow$ геометрический подход, кривая как синоним «*одновременного изменения*».

В математику вошла задача поиска неизвестных законов изменения.

Жак Адамар: «***Число перестало быть главным математическим объектом, им стал закон изменения, функция***».

1718 Иоганн **Бернулли**:

«***Функцией переменной величины*** *называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных*». Обозначил φx.

Леонард **ЭЙЛЕР** понимал функцию **в двух смыслах**: узком и широком.

1748 «**Введение в анализ бесконечных**»

– первый трактат, в котором в основу положено понятие функции;

– порывает с геометрическими кривыми: «весь анализ бесконечных вращается вокруг переменных количеств и их функций»;

– в узком смысле: «*Функция переменного количества есть* ***аналитическое выражение****, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств*».

«*Основное* ***различие*** *функций состоит* ***в способе составления*** *их из переменного количества и количеств постоянных»* $\Longrightarrow$

Классификация функций по Эйлеру:

ФУНКЦИИ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ
(алгебраические операции +
+ общее решение уравнений)

РАЦИОНАЛЬНЫЕ
$\pm; \times; :$

ЦЕЛЫЕ
Многочлены

ДРОБНЫЕ

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ
$\pm; \times; :; \sqrt[n]{\ldots}$

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ
(связаны с другими, неалгебраическими операциями и бесконечное число раз повторенными – доказано Эйнштейном и Гейне в XX в.)

e^z, $\ln z$, $\sin z$, $\cos z$, $x^{\sqrt{\cdots}}$, некоторые интегралы (Гамма, Бетта), дзетта-функция Римана, цилиндрические функции и др.

Эта классификация распространяется и на теорию функций комплексного переменного: целые функции – не имеют особых точек в конечной части плоскости, дробно-рациональные – имеют только полюса, иррациональные алгебраические – помимо полюсов имеют точки ветвления конечного порядка.

У Эйлера **все** функции представлены **числовыми степенными рядами**: $$\mathbf{A}z^{\alpha} + \mathbf{B}z^{\beta} + \mathbf{C}z^{\gamma} + \mathbf{D}z^{\delta} + \cdots ,$$

где для большей общности $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ – любые числа.

На этой основе строит теорию элементарных функций, изучает их свойства с помощью алгебры, оперирует с бесконечными (!) выражениями, **не заботясь об их сходимости** (степенные ряды, бесконечные произведения, непрерывные дроби).

Для того, чтобы продемонстрировать **общность** выводов, рассматривает не только действительные, но и **комплексные числа**.

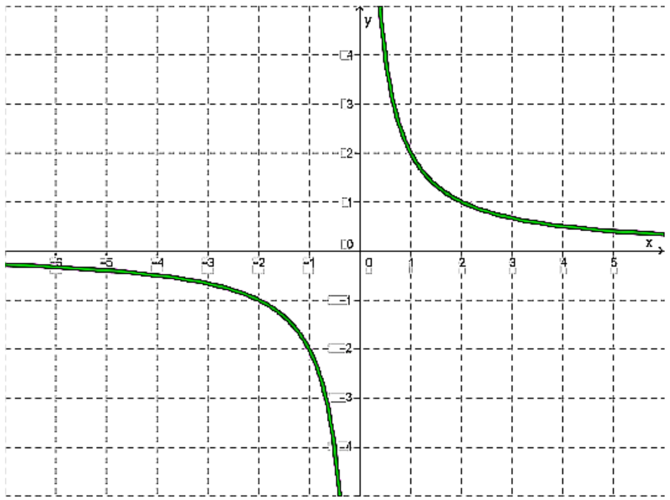
Свою классификацию Эйлер дополняет **свойства**ми: однозначность-неоднозначность; четность-нечетность.

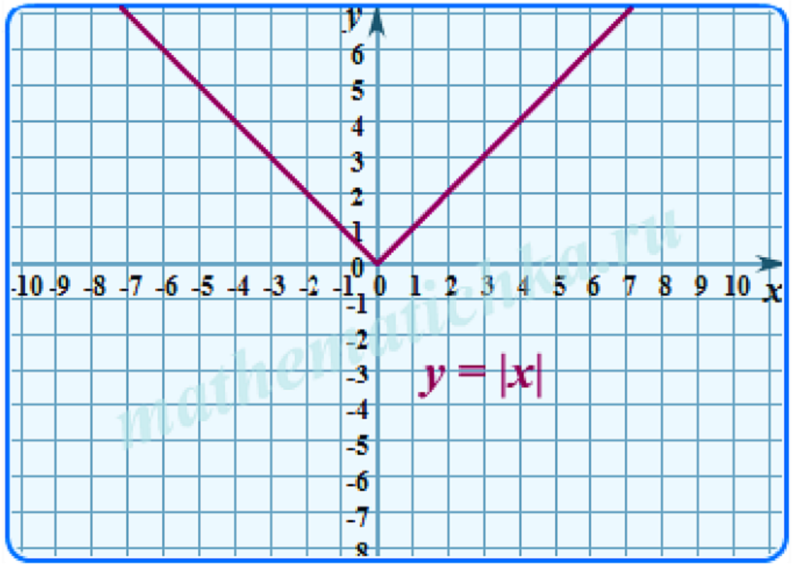
Рассматривает **многозначную неявную функцию** *y*: если дано алгебраическое уравнение *f(x,y) = 0*, где *f* – многочлен степени *n* по *y* , то, разрешив его относительно *y*, получим явную функцию. И «***лишь недостаточное развитие алгебры не позволяет нам сделать это сейчас***...»

Поскольку все функции у Эйлера аналитические, то **сначала** определение **непрерывности** у Эйлера своеобразное:

«*Из вышеизложенного представления о кривых линиях тотчас же следует их деление на* ***непрерывные*** *и* ***прерывные*** *или* ***смешанные****. А именно,* ***непрерывная*** *линия строится так, что ее природа выражается с помощью одной определенной функции от x. Но если кривая линия построена таким образом, что различные ее части… выражаются с помощью различных функций…, то этого рода кривые линии мы будем называть прерывными или* ***смешанными*** *и* ***неправильными****, т.к. они не образуются на основе единого неизменного закона, а составляются из частей различных непрерывных кривых*».

Так, функция $y = \frac{1}{x}$ считалась непрерывной,





в то время как функция $y = |x|$ рассматривалась как разрывная, так как на различных участках области определения задавалась разными аналитическими выражениями, то есть задавалась разными «законами». Наша непрерывность у Эйлера называлась **связностью**.

НО вскоре Эйлер вышел за рамки своей классификации и **обобщил** понятие функции (идея рассматривать функции, начертанные «свободным движением руки», **даже если они не задаются степенным рядом**).

Уже при печатании «Введения в анализ бесконечных» Эйлер утверждал, что одних аналитических функций для построения анализа недостаточно.

Особенно ясно необходимость расширения определения функции как аналитического выражения стала после знаменитого спора о звучащей струне.

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ У ЭЙЛЕРА

1. Впервые вводит и разъясняет понятие **логарифма** так, как это делаем мы сейчас.

Затем выводит экспоненту и определяет **натуральный** логарифм, в том числе для комплексного аргумента.

Экскурс: **1729** Д. Бернулли в письме к Гольдбаху обсуждает задачу:

При каком x достигается максимум $x^{\frac{1}{x}}$?

Ответ Бернулли: $x_{max} = \left(\frac{A+1}{A}\right)^A, \ A \equiv \infty.$

И здесь же: $x_{max} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$

1731 Эйлер ввел символ ***e*** и

в **1743** показал $e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$. Здесь (у Эйлера) ***i*** – символ для бесконечности.

2. <u>Тригонометрические функции</u> Эйлер называет «*трансцендентными количествами, получающимися из круга*». Вводит их аналитически и исследует их свойства:

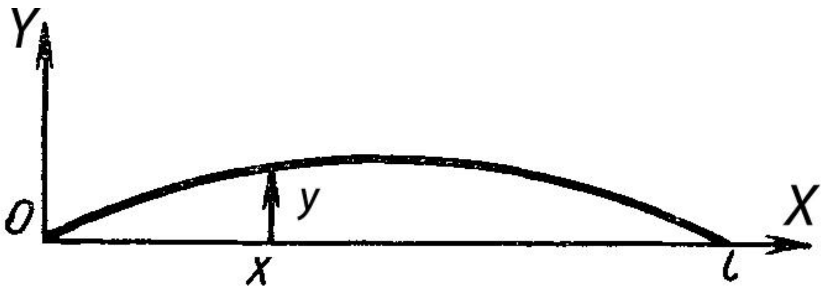
1) окончательная ясность в вопросах о знаках с помощью формул приведения;
2) рассматривает эти функции как безразмерные числовые количества;
3) из теорем о синусе-косинусе суммы или разности выводит формулы Муавра для натуральных *n*.

4) из полученных формул выводит разложения синуса и косинуса в ряд (не так, как Ньютон!).

1748 тождество Эйлера: «*синусы, косинусы и дуги выводятся из самих логарифмов и показательных величин, когда те содержат мнимые количества*».

Владел этим уже около 10 лет, т.к. это есть в статье **1739** в "Комментариях СПб АН" и в статье 1743 в "Докладах Берлинской АН".

СПОР О ЗВУЧАЩЕЙ СТРУНЕ



1715 **Тейлор** «***Methodus incrementorum directa et inversa***»: свел задачу к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -b^2y, \ \frac{d^2y}{dt^2} = -(ab)^2y$$

и предложил свой способ решения.

1747 (оп. 1749) **Даламбер** свел задачу к привычному нам уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

исследовал его и получил **решение** в виде: $y = f(\alpha t + x) - f(\alpha t - x)$,

где f – произвольная, **периодическая** функция, определяемая только начальными условиями: $y|_{x=0} = y|_{x=l} = 0$.

Работа написана без использования существовавшей символики, исключительно словесно, для каждой производной вводится свой символ. Произвела большое впечатление на Эйлера.

1748 (оп. 1750) **Эйлер** «*О колебании струны*» :

Предложил свой метод интегрирования уравнения и в конце:

т.к. положение струны определяется ее начальными условиями и начальным распределением скоростей, то *даламберову функцию можно выразить через две других*:

t=0 $\Longrightarrow\ f(x) - f(-x) = \varphi(x)$

$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \ \Longrightarrow\ f(x) + f(-x) = \frac{1}{\alpha}\int \psi(x)dx$

$$f(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \frac{1}{\alpha}\int \psi\,(x)dx)$$

Поскольку струна сплошная, то для существования решения достаточно потребовать, чтобы $\varphi(x)$и $\psi(x)$ были связными, т.е. $\boldsymbol{f(x)}$ **не обязательно непрерывна в соответствии с предложенным** (узким) **определением непрерывности**. Поэтому нужно рассматривать **любые** кривые, «***начертанные свободным движением руки***», даже если они и являются «разрывными».

Даламбер НЕ согласен: **1750 (оп. 1752)**

Действия исчисления применимы только к функциям «непрерывным» в старом смысле, каковыми и должны быть начальные условия, поэтому решения уравнений в частных производных должны быть ограничены более узким классом функций:

«*Во всех других случаях проблема не может быть разрешена, по крайней мере, моим методом, и я не знаю также, не превосходит ли она силы известного анализа*».

Полемика продолжалась более 50 лет. Практически все знаменитые математики принимали в ней участие. По ходу дискуссии **Даламбер** уточнял свою позицию – от требования «непрерывности» начальной функции до условия, что она должна быть дважды непрерывно дифференцируема, что является необходимым требованием для существования **классического** решения.

Эйлер же по сути ведет речь об **обобщенном** решении дифференциального уравнения, но никак его не определяет. Таким образом, говоря о решении уравнения колебания струны, Даламбер и Эйлер понимают под этим, с нашей точки зрения, разное.

Понять правильно идеи каждого мешала свойственная математике того времени **неотделимость в сознании** исследователя **физического феномена от его математической интерпретации**, а также отсутствие разработанного понятийного аппарата анализа, смутные представления о его основаниях. Поэтому в качестве аргументов в споре использовались как чисто математические соображения, так и идеи, вытекающие из анализа физической реальности.

Решение уравнения колебания струны (т.е. **математическая модель** процесса колебания) **и физическая реальность** колеблющейся реальной струны **не различались**. Решение уравнения колебания струны не нуждается в специальном определении – оно реализуется в единственном наблюдаемом нами процессе. Потому увидеть, что **Даламбер и Эйлер говорят о разных решениях** (классическом и обобщённом) даже не приходит в голову – решение только одно, т.к. реальная колеблющаяся струна одна.

Не приходит в голову ни им самим, никому из их гениального окружения – ни Лагранжу, ни Монжу, ни Лапласу.

Понимая резонность возражений Даламбера, Лагранж и Лаплас пытались спасти конструкцию Эйлера:

J. Lagrange – Misc. Taurinensia 1759, 1760-61, 1762-65;

P. Laplace – Mem. Acad. Sci. Paris 1779(82).

Первым, кому удалось обойти трудности в случае, когда начальная форма струны имеет угловые точки был, по-видимому, ученик Дирихле **Элвин Бруно КРИСТОФФЕЛЬ (1829–1900)**, который в своих лекциях, опубликованных в **1877**, заменил дифференциальное уравнение физической проблемы соответствующим интегральным уравнением.

Построение теории обобщённых решений было делом уже XX столетия (К. Фридрихс, С.Л. Соболев).

У спора о звучащей струне был ещё один аспект – теоретико-функциональный, который обнаружился в связи с решением **Д. Бернулли**:

1753 (оп.1755) ***Звук струны слагается из основного тона и бесконечного множества обертонов***:

$$y = \alpha \cdot sin\frac{\pi x}{l} + \beta \cdot sin\frac{2\pi x}{l} + \gamma \cdot sin\frac{3\pi x}{l} + \cdots,$$

где $\alpha = \alpha(t), \beta = \beta(t), \gamma = \gamma(t) \ldots$ – функции времени,

т.е. для **любой** гладкой функции всегда можно подобрать такой **тригонометрический** ряд.

Против позиции Бернулли выступили и Даламбер, и Эйлер, и Лагранж.

Ясность внес **Ж.Б. ФУРЬЕ**
1807 (оп.1822)

«***Аналитическая теория тепла***»

Доказал, что многие функции, разрывные по Эйлеру, могут быть представлены на всем отрезке единым тригонометрическим рядом:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

После этого встал вопрос об **условиях разложимости** в тригонометрический ряд, оказавший огромное влияние на все последующее развитие теории функций (Лежен-Дирихле, Лобачевский, Риман, Кантор, Лебег, Лузин, Меньшов и др.).

Интересно, что в разное время разные математики вычисляли коэффициенты тригонометрического ряда, не подозревая друг о друге: 1759 **Клеро**, 1777(оп. 1798) **Эйлер**, 1807(оп. 1822) **Фурье**.

ИТАК:

1. Эйлер ошибался в определении непрерывности: функции, заданные в разных местах разными степенными рядами, могут быть выражены одной формулой на всей своей области определения.

2. Эйлер прав, настаивая на необходимости расширения понятия функции, т.к. не всегда «начертанная свободным движением руки» функция представима *степенным* рядом (существуют функции непрерывные и дифференцируемые, но не аналитические).

⇒ **1755 ЭЙЛЕР «Дифференциальное исчисление»** дает **новое определение функции** в широком смысле, **как соответствия**:

«Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых.

Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других.

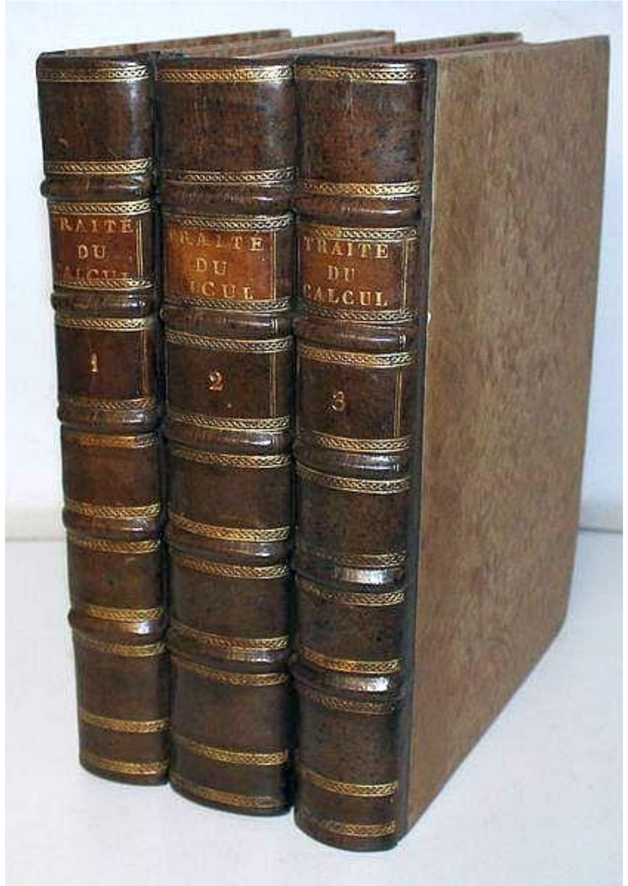
Итак, … все ***количества, которые как-либо зависят от*** *x, т.е. определяются им, называются его функциями».*

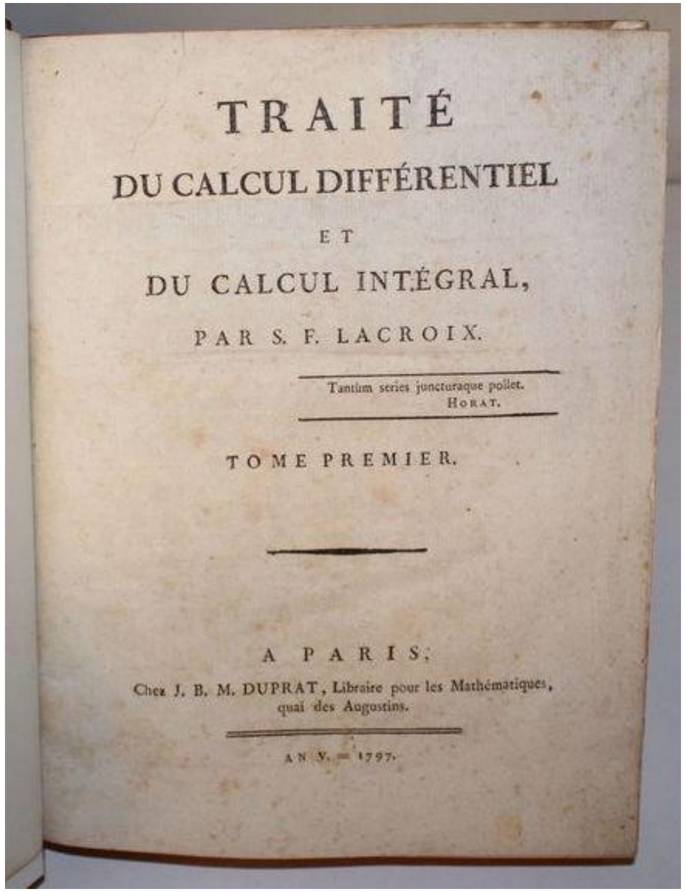
Это определение было охотно воспринято, т.к. все чаще встречались функции, аналитическое выражение которых оставалось неизвестным.

С.Ф. Лакруа 1797

«***Трактат дифференциального и интегрального исчисления***»:

«***Величина, как-либо зависящая от другой****, называется ее функцией независимо от того, известны или неизвестны действия, позволяющие вычислять функцию по ее аргументу».*





TRAITÉ
DU CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DU CALCUL INTÉGRAL,
PAR S. F. LACROIX.

Tantùm series juncturaque pollet.
HORAT.

TOME PREMIER.

A PARIS;
Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN V. — 1797.

К определению Эйлера 1755 г. восходят определения функции

О.-Л. Коши 1821,

Ж.Б. Фурье 1822,

Н.И. Лобачевского 1834,

Г. Лежен-Дирихле 1837.

Определение функции у Лобачевского (1834):

«*Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется.* ***Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной****…*

Кажется, нельзя сомневаться ни в истине того, что все в мире может быть представлено числами; ни в справедливости того, что всякая в нем перемена и отношение выражается аналитической функцией. Между тем обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одни с другими в связи, принимать как бы данными вместе».

На основе нового определения понятия функции в «**Дифференциальном исчислении**» (1755) Эйлер излагает начала теории конечных разностей, приемы дифференцирования функций одного и нескольких переменных, а также приложения дифференциального исчисления, в том числе к изучению поведения функций – необходимые и достаточные условия экстремума и др.

В основе всего – «**исчисление нулей**»: Эйлер предлагает считать, что отношение нулей имеет смысл: $\frac{0}{0}$ может быть любым числом *n*, так как *n*×0=0. Дифференциалы *dx* и *dy* он рассматривает как нули: *dx* = *dy* = 0, но их отношение, вообще говоря, не является неопределенным.

Например, пусть *y* = 5*x*. Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{d(5x)}{dx} = \frac{5dx}{dx} = 5$.

Эйлер выписывает правила раскрытия таких неопределенностей либо в форме отбрасывания бесконечно малых, либо в форме, соответствующей переходу к пределу: $a \pm ndx = a$ и $\frac{a \pm ndx}{a} = 1$,

а также при *n* > *m* $adx^m \pm bdx^n = adx^m$ и $\frac{adx^m \pm bdx^n}{adx^m} = 1$.

В «**Интегральном исчислении**» Эйлера (1768–1770, три тома) содержится не только собственно интегральное исчисление, но и теория обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с частными производными, а также вариационное исчисление.

Вывод: Формальная и **алгебраическая** концепция функции, долгое время стимулировавшая развитие анализа, в XVIII в. превратилась в тормозящий фактор.

Новый подъем анализа совершило следующее поколение математиков, в работах которых на первый план выходят:

1) новый уровень математической строгости;
2) задачи физики и вопросы представимости функций тригонометрическими рядами.