ЕВРОПА

XVI век

Эпоха ВОЗРОЖДЕНИЯ:

1) Проторенессанс	2-ая половина XIII вв. – XIV в. ;
2) Раннее Возрождение	начало XV – конец XV в.;
3) Высокое Возрождение	конец XV – первые 20 лет XVI в.;
4) Позднее Возрождение	середина – конец XVI в.

Рост городов-республик привёл к росту влияния сословий, не участвовавших в феодальных отношениях: мастеров и ремесленников, торговцев, банкиров. Всем им была чужда иерархическая система ценностей, созданная средневековой, во многом церковной культурой, и её аскетичный, смиренный дух. **Отличительная черта эпохи Возрождения** — светский характер культуры, расцвет интереса к античной культуре, «**возрождение»** ее **высоких идеалов гуманизма и антропоцентризма**, рассматривающих человека, его личность, его свободу, его активную, созидающую деятельность как высшую ценность и критерий оценки общественных институтов.

В это время зарождается буржуазия, возникает мануфактурное производство, книгопечатание; в Европе появляется дешевая бумага, порох, компас, часы. Это — эпоха Великих Географических открытий, расширения торговли.

Распространение новых идей проходило медленно.

- Университеты находились под патронажем церковных организаций, старавшихся сохранить существующие представления о мире и противившихся влиянию идей гуманизма.
- Ученые работали в одиночку.
- Латынь – язык науки – была доступна далеко не всем. (*Пачоли, Галилей и Декарт сознательно писали свои работы на разговорных языках*).

Огромное значение для распространения новых знаний имели:

1434 г. – изобретение **книгопечатания**

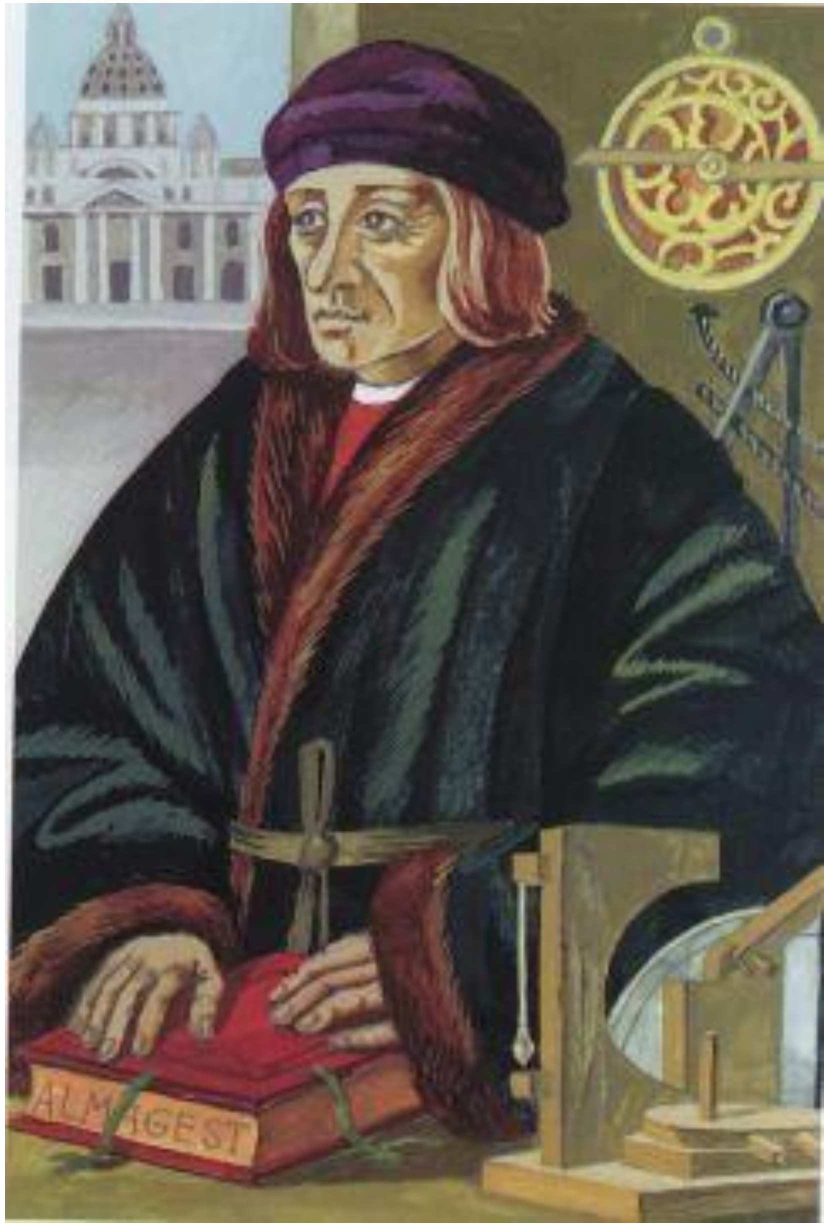
1478 г. Тревизо «Коммерческая арифметика»;

1482 г. Евклид «Начала»;

1494 г. Лука Пачоли «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности».

1453 г. – **падение Византии** и переезд ученых на Запад.

Иоганн Мюллер (РЕГИОМОНТАН) (1436–1476)



выдающийся немецкий астролог, астроном и математик; учился в Лейпцигском и Венском университетах. Основал в Нюрнберге **научную типографию** и одну из первых в Европе обсерваторий.

«***О всех видах треугольников***» (оп. 1533) – первый в Европе труд по **тригонометрии**. Первая книга посвящена решению плоских треугольников. Во второй книге – теорема синусов для плоских треугольников и рассматривается ряд задач, приводящих к квадратным уравнениям. Третья книга излагает основы сферической геометрии. Её содержание в значительной мере совпадает со «Сферикой» Менелая и др. арабских авторов. Центральная теорема четвёртой книги – сферическая теорема синусов. В пятой книге доказывается теорема, эквивалентная сферической теореме косинусов.

Никола ШЮКЕ (ок.**1450** — ок.**1490**) – французский математик, оказавший влияние на развитие алгебры. Наиболее известен вводом в общее употребление названий больших чисел: *биллион, триллион* и т. д.

В его работе «***Наука о числах в трех частях***» (1484), написанной по-французски, изложены правила работы с рациональными и иррациональными числами, а также учение об уравнениях. Шюке сопоставил арифметическую и геометрическую прогрессию: записав их друг под другом, он заметил, что произведению нижних членов (геометрическая прогрессия) соответствует сумма членов, стоящих над ними —предвосхищение свойств логарифмов. Развитие идеи логарифмов продолжил Михаэль Штифель и завершил Джон Непер.

Шюке также первым предложил использовать отрицательные и нулевые показатели степени и обозначать показатели степени неизвестной величины малыми литерами справа вверху. Символика Шюке богаче и ближе к современной, чем обозначения его современника Луки Пачоли.

Лука ПАЧОЛИ (ок. **1445** – ок. **1515**)

- родился в Борго Сан Сельпокро; учился в Болонском университете;

– работал профессором математики в университетах и учебных заведениях Рима, Неаполя, Милана, Флоренции, Болоньи и др.;

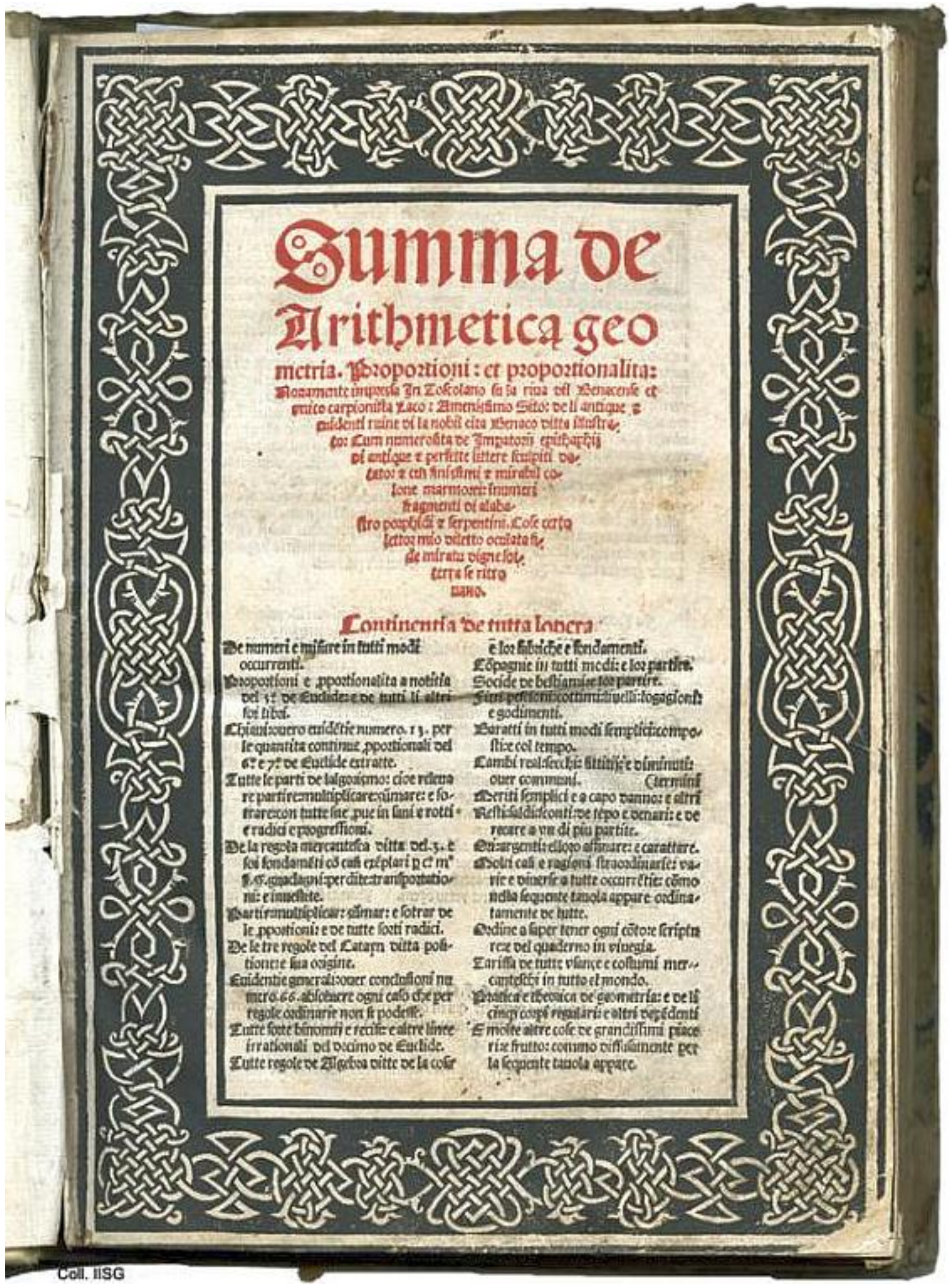
– был дружен с Леонардо да Винчи (1452 – 1519). По его настоянию в 1497 г. написал «О божественной пропорции» (изд. в Венеции в 1509). Изображения многогранников на 59 таблицах сделал Леонардо. Пачоли, в свою очередь, подсчитал для него количество металла, необходимое для статуи всадника.

1487/1494 *“Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita”*

Написанная на <u>*разговорном итальянском языке*</u>, она содержала все, что тогда знали по арифметике, алгебре и тригонометрии. В ней была **полностью воспроизведена “Книга абака”** (1202) и **“Практика геометрии”** (1220) **Леонардо Пизанского**. Отныне **употребление индийско-арабских цифр стало общепринятым**.

Алгебру Пачоли называл «*regula della cosa*» – правило вещи или «*arte maggiore*» – великое искусство.

Отрицательные числа трактуются как «долг». Такой трактовке способствовало и то, что Лука Пачоли стал изобретателем двойной бухгалтерии (дебет, кредит), изложенной им в той же «Сумме».


Summa de Arithmetica geometria. Proportioni: et proportionalita:

Continentia de tutta lopera

Coll. IISG

x^0 R. pª. nº. nũo.

x^1 R. 2ª. co. cosa.

x^2 R. 3ª. ce. censo.

x^3 R. 4ª. cu. cubo.

x^4 R. 5ª. ce. ce. censo decenso.

x^5 R. 6ª. pº. rº. primo relato.

x^6 R. 7ª. ce. cu. censo decubo e anche cubo decenso.

x^7 R. 8ª. 2º. rº. secundo relato.

x^8 R. 9ª. ce. ce. ce. censodecenso de censo.

x^9 R. 10ª. cu. cu. cubo decubo.

x^{10} R. 11ª. ce. pº. rº. censo de primo relato.

x^{11} R. 12ª. 3º. rº. terço relato.

x^{12} R. 13ª. cu. ce. ce. cubodecenso decenso. Quoi dir econuerso.

x^{13} R. 14ª. 4º. rº. quarto relato.

x^{14} R. 15ª. ce. 2º. rº. censo de secundo relato.

x^{15} R. 16ª. cu. pº. rº. cubo de primo relato

x^{16} R. 17ª. ce. ce. ce. ce. censodecẽso decenso decenso.

x^{17} R. 18ª. 5º. rº. quinto relato.

x^{18} R. 19ª. cu. ce. cu. cubo decenso de cubo. Ouer cẽso cubo cubo.

x^{19} R. 20ª. 6º. rº. sexto relato.

x^{20} R. 21ª. ce. ce. pº. rº. censo decẽso de primo relato.

x^{21} R. 22ª. cu. 2º rº. cubo de scõo rº.

x^{22} R. 23ª. ce. 3. rº. censo de terço rº.

x^{23} R. 24ª. 7º rº. septimo relato.

x^{24} R. 25ª. cu. ce. ce. ce. cubo decẽso decenso decẽso. Ouer censo de cubo decenso decẽso. Ouer censo decenso decenso de cubo. Que oĩa idem important.

x^{25} R. 26ª. 8º. rº. octauo relato.

x^{26} R. 27ª. ce. 4º. rº. censo de quarto relato.

x^{27} R. 28ª. cu. cu. cu. cubo decubo decubo.

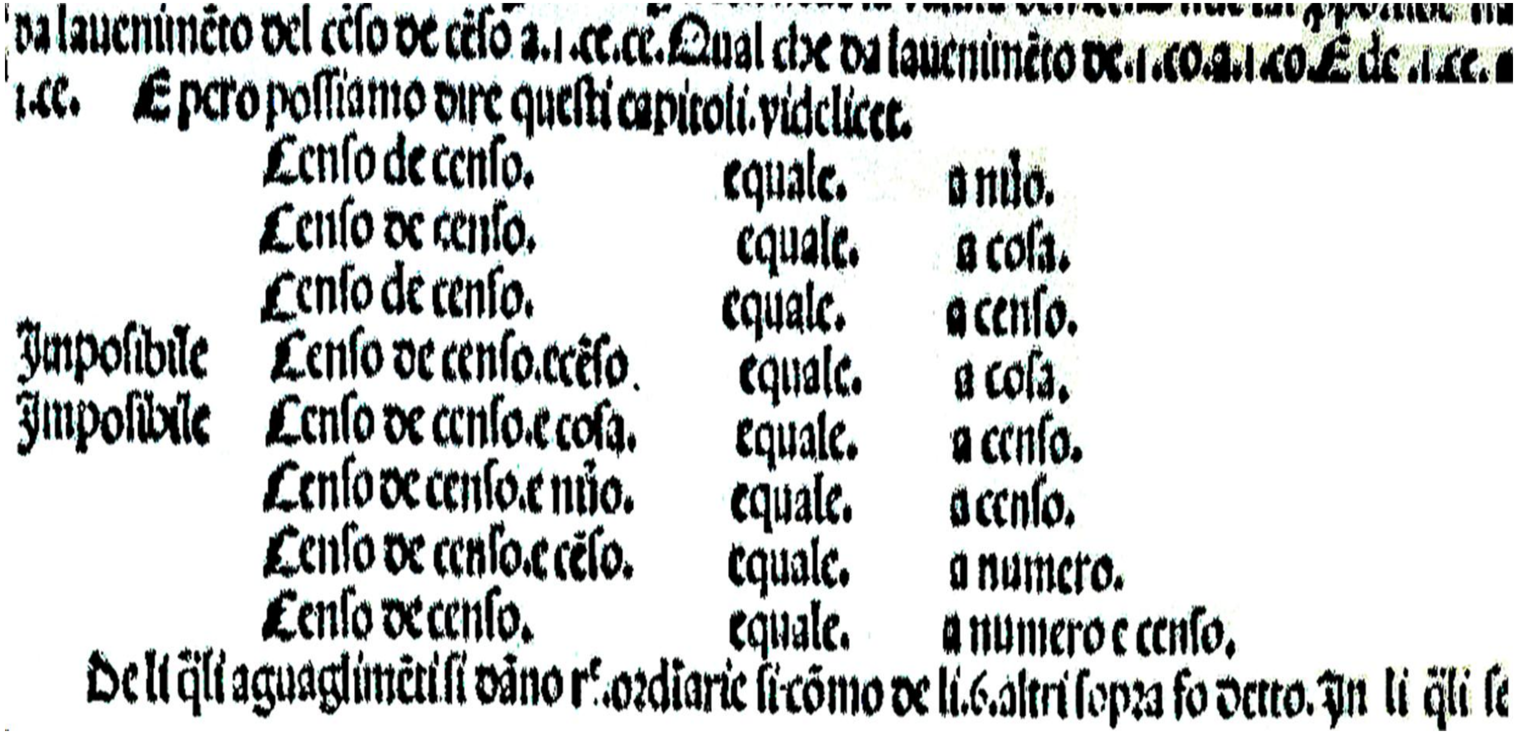
x^{28} R. 29ª. ce. ce. 2º. rº. censo decẽso de secundo relato.

x^{29} R. 30ª. rº. nono relato.

Finis.

Раздел “Суммы”, посвященный решению алгебраических уравнений, Пачоли завершил замечанием о том, что для решения кубических уравнений и “*искусство алгебры еще не дало способа, как не дан способ квадратуры круга*”. Эти слова Пачоли и послужили отправной точкой для дальнейших исследований итальянских алгебраистов XVI в.

Уравнения 4й степени у Луки Пачоли



da lauenimēto del cēso de cēso a.1.ce.ce. Qual che da lauenimēto de.1.co.a.1.co. E de.1.ce.a 1.ce. E pero possiamo dire questi capitoli. videlicet.

	Censo de censo.	equale.	a nūo.
	Censo de censo.	equale.	a cosa.
	Censo de censo.	equale.	a censo.
Jmposibile	Censo de censo.e cēso.	equale.	a cosa.
Jmposibile	Censo de censo.e cosa.	equale.	a censo.
	Censo de censo.e nūo.	equale.	a censo.
	Censo de censo.e cēso.	equale.	a numero.
	Censo de censo.	equale.	a numero e censo.

De li qli aguaglimēti li dāno r.ordiarie si cōmo de li.6.altri sopra fo detto. Jn li qli se

Censo de censo. equale. a nūo. $x^4 = c$

Censo de censo. equale. a cosa. $x^4 = bx$

Censo de censo. equale. a censo. $x^4 = ax^2$

Imposibile

Censo de censo. e cēso. equale. a cosa. $x^4 + ax^2 = bx$

Imposibile

Censo de censo. e cosa. equale. a censo. $x^4 + bx = ax^2$

<u>Косситы</u>: «*coss*» – перевод на немецкий итальянского «*cosa*» (вещь).

Наиболее известные: **Ян Видман** (1460–первая половина XVI в.),
Адам Ризе (1489–1559),
Криштоф Рудольф (XVI в.)

Ян (Иоганн) **ВИДМАН** — уроженец чешского г. Хеб, первый преподавал в Лейпцигском университете алгебру. Его «***Быстрый и красивый счет для всего купечества***» издан в 1489 г. В ней впервые вместо $\tilde{p}$ и $\widetilde{m}$ используются знаки «+» и «–».

Терминология коссистов получила широкое распространение не только в Германии, но и во всей Европе. В частности, Л.Ф. Магницкий (1669–1739, автор первой русской арифметики) называет x^2«зензус», x^3— «кубус», x^4 — «зензизенс», x^5 — «сурдесолидус» и т.д.

Адам РИЗЕ . “COSS” (оп. 1992). Обозначения для степеней неизвестного.

1.	∅	**Драхма** или **число**. — Это просто число, взятое само по себе.
2.	$\mathfrak{R}$	**Радикс** или **косс**. — Корень или вещь, которая оплодотворенная должна нести всякое число.
4.	$\mathfrak{Z}$	**Цензус** или **квадрат**. — Состояние, равное по всем сторонам, возникающее из корня, умноженного на себя.
8.	$\mathfrak{C}$	**Куб**. — Это тело, которое равно по всем сторонам: по глубине, длине и ширине.
16.	$\mathfrak{ZZ}$	**Квадрато-квадрат**. — Это площадь, возникающая из квадрата, умноженного на самого себя.
32.	**ß**	**Sursolidum**. — Это глухое тело, не имеющее ничего общего ни с квадратом, ни с кубом.
64.	$\mathfrak{ZC}$	**Квадрато-куб**. — Это число, содержащее в себе корень квадрата, а также куба.
128.	**biß**	**Bissursolidum**. — Не допускает извлечения ни куба, ни квадрата, но положено в себе.
256.	$\mathfrak{ZZZ}$	**Квадрато-квадрато-квадрат**. – Возникает как произведение квадрато-квадрата на себя.
512.	$\mathfrak{CC}$	**Кубо-куб**. — Возникает от умножения куба на себя кубическим образом

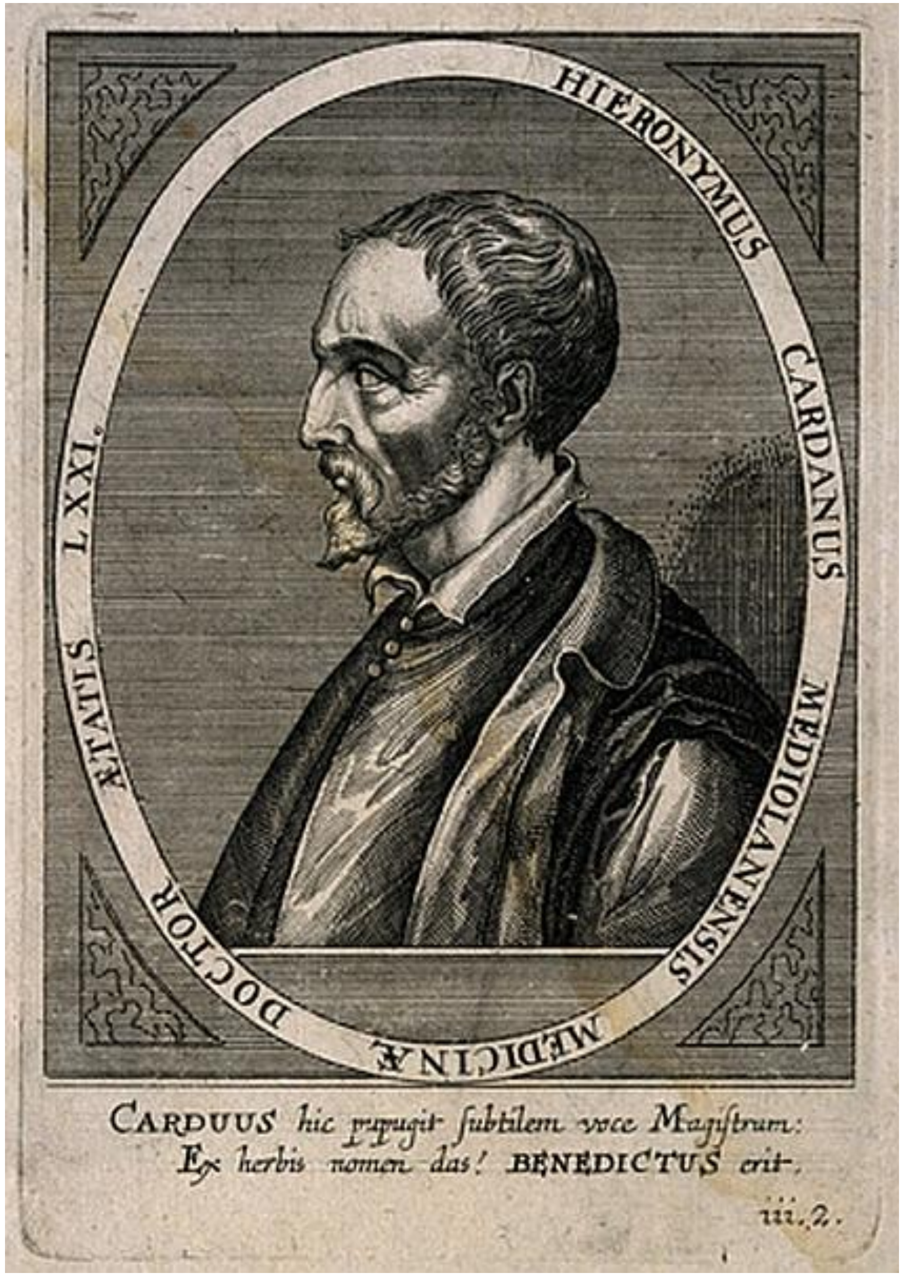
Джироламо КАРДАНО (1501– 1576)

“… Я родился в том веке, когда был открыт весь земной шар, тогда как в древности было известно лишь немногим более одной его трети…

Есть ли что-либо более удивительное, чем пиротехника и человеческая молния (т.е. артиллерия), которая гораздо опаснее молнии небожителей;

не умолчу я и о тебе, великий магнит, о тебе, ведущий нас по безбрежным морям в темноте ночи во время ужаснейших бурь в далекие неведомые края!

Прибавим к этому еще четвертое открытие — изобретение книгопечатания, созданное руками людей, придуманное их гением, оно соперничает с божественными чудесами, ибо чего же еще недостает нам, кроме овладения небом?”



Краткая история открытия правил решения уравнений 3й и 4й степеней.

Сципион дель ФЕРРО (1465–1526) в 1515 г. **нашел** решение одного из трех типов кубического уравнения:

$$x^3 + px = q, \qquad p>0,\ q>0. \qquad (1)$$

Никколо ТАРТАЛЬЯ (1500–1557), в 1535 г. будучи вызванным на поединок Антонио Мариа дель Фьоре, **переоткрыл** правило дель Ферро и даже продвинулся вперед:

$$x^3 + px = q\ , \qquad (1)$$

$$x^3 = px + q, \qquad (2)$$

$$x^3 + q = px, \qquad p>0,\ q>0. \qquad (3)$$

Опубликовал правило **Джироламо КАРДАНО** (1501–1576) в своем знаменитом трактате «***Ars magna sive de regulis algebraicis***» в 1545 г. в том числе потому, что его ученик

Лодовико ФЕРРАРИ (1522–1565) нашел способ решения одного из типов уравнения 4-й степени.

Никколо ТАРТАЛЬЯ

(1500–1557)

Для решения уравнения «*Куб вещи плюс вещь равны числу*» (**1**) сделаем замену

$$\boldsymbol{x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}}.$$

Возведя обе части (1) в куб, получим

$$x^3 = (u - v) - 3\sqrt[3]{uv} \cdot x$$

или $$x^3 + 3\sqrt[3]{uv} \cdot x = u - v.$$

Сравнивая полученное с (1), запишем систему

$$\begin{cases} \sqrt[3]{uv} = \dfrac{p}{3} \\ u - v = q \end{cases},$$

эквивалентную квадратному уравнению $t^2 - qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, корнями которого будут $t_1 = u$, $t_2 = -v$: $t_{1,2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Для решения уравнения «***Куб вещи равен вещи плюс число***» (2) Тарталья сделал замену $\boldsymbol{x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}}$ и получил решение в виде:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

В случае, когда $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, правило «утверждает», что решения нет, однако его нетрудно найти перебором делителей свободного члена:

для уравнения $x^3 = 15x + 4$ существует корень $x = 4$, хотя под квадратным корнем выражение отрицательное. Этот случай был назван «**неприводимым**», и Тарталья не мог опубликовать свои результаты, не объяснив его.

Джироламо КАРДАНО (1501– 1576)

Математик, инженер, философ, врач. Учился в в университетах Павии и Падуе. С 1534 жил и работал в Милане. Путешествовал в Швейцарию, Францию, Англию, Шотландию.

«*Цель, к которой я стремился, заключалась в увековечении моего имени, поскольку я мог бы этого достигнуть, а вовсе не в богатстве или праздности … не в высоких должностях и не во власти*».

Число своих открытий он определил равным 40 000 (среди них такие – «почему восток лучше запада», «что такое судьба и как она действует»).

«*В своих огромных томах он передал памяти потомства кое-что полученное или списанное у других или плохо придуманное своё*».

Уильям Гильберт (1544–1603)

Его достижения: исследования по баллистике, таблицы стрельб, карданный вал, в математике – исследования по теории вероятностей («*Книга об игре в кости*»), по алгебре («*Великое искусство или о правилах алгебры*»,1545; "*Беседа о плюсе и минусе*", 1572).

Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trouan dui altri differenti in esso.

Dapoi terrai questo per consueto
Che'l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto,

El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varra la tua cosa principale.

In el secondo de cotesti atti
Quando che'l cubo restasse lui solo
Tu osseruarai quest'altri contratti,

Del numer farai due tal part'à uolo
Che l'una in l'altra si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stolo

Delle qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi insieme gionti
Et cotal somma sara il tuo concetto.

El terzo poi de questi nostri conti
Se solue col secondo se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.

Questi trouai, & non con passi tardi
Nel mille cinquecente, quatroe trenta
Con fondamenti ben sald'è gagliardi
Nella citta dal mar'intorno centa.

Кардано об открытии «**великого правила**»:

“В наше великое время ***Сципион дель Ферро*** *открыл формулу: ”****Куб вещи плюс вещь равны числу****”.*

Это было поистине прекрасное открытие. Так как подобное искусство превосходит все человеческое остроумие и всю ясность ума смертного, то его нужно рассматривать как подарок небесного происхождения, а также способность силы ума.

Это настолько славное открытие, что от того, кто мог его достигнуть, можно ожидать, что он достигнет всего. Соперничая с ним, ***Никколо Тарталья из Брешии****, наш друг, будучи вызван на состязание учеником дель Ферро по имени* ***Антонио Мария Флоридо****, решил, дабы не быть побежденным, ту же самую проблему и после долгих просьб передал ее мне.*

Я был введен в заблуждение словами Луки Пачоли, который говорил, что нет общего решения такого рода уравнений, и, так как я обладал уже многими, мною самим сделанными открытиями, я не отчаивался найти то, чего я не смел искать.

Однако, когда я получил эту главу и добрался до ее решения, то я увидел, что с ее помощью можно многое еще сделать, и уже с повышенной уверенностью в своих силах я при исследовании открыл дальнейшее, частью сам, частью с ***Лодовико Феррари****, моим бывшим учеником".*

Ученик Кардано **Лодовико ФЕРРАРИ** рассмотрел один из типов уравнения 4й степени: $\boldsymbol{x^4 + ax^2 + bx + c = 0}$, но нигде не отмечается, что любое полное алгебраическое уравнение всегда подстановкой типа $t = x + \alpha$ можно свести к уравнению без слагаемого степени *n – 1.*

$$x^4 = -(ax^2 + bx + c)$$

Затем, чтобы получить полный квадрат в левой части, вводит новую переменную: $x^4 = (x^4 + 2tx^2 + t^2) - t^2 - 2tx^2 = (x^2 + t)^2 - 2tx^2 - t^2$

$$(x^2 + t)^2 = x^2(2t - a) - bx + (t^2 - c)$$

Таким образом, квадратный трехчлен в правой части должен быть полным квадратом, т.е. его дискриминант равен нулю $\Rightarrow$ получено кубическое уравнение на новую переменную, правило решения которого известно. Подробно все типы уравнений 4й степени рассмотрел Бомбелли.

Кардано **размышлял над корнями из отрицательных чисел**, называл их "*софистическими*" числами. В **одном** месте "*Великого искусства*" он написал:

"*Второй вид ложного решения уравнения заключается в корне из минуса. Я приведу пример: если кто-нибудь потребует разделить 10 на две части, которые при перемножении дали бы 30 или 40, то ясно, что этот случай или вопрос невозможен.*

Но мы поступим так: разделим 10 пополам, половина будет 5; умноженная на самое себя она даст 25. Затем вычти из 25 то, что должно получиться при перемножении, скажем, 40, как я объяснял это тебе в главе о действиях в 4й книге; тогда останется –15; если взять из этого корень и прибавить к 5 и вычесть из 5, то получаются части, которые перемноженные между собой, дадут 40.

Таким образом, части эти будут $5\tilde{p}\, R_x\, \tilde{m}15$ *и* $5\tilde{m}\ R_x\, \tilde{m}15$".

В современных обозначениях это $5 \pm \sqrt{-15}$ $5 \pm i\sqrt{15}$.

Рафаэль БОМБЕЛЛИ (ок. 1526–1573)

К 1550 г. составил первый вариант своего сочинения по алгебре. Но в библиотеке Ватикана ему удалось найти *“греческое сочинение по этой дисциплине, составленное неким Диофантом Александрийским ... и, чтобы обогатить мир таким замечательным произведением, взялись мы за перевод и перевели пять книг из семи, которые не были переведены до этого”.* В переработанный вариант включил 143 задачи Диофанта.

Чисто **аксиоматически**, для объяснения неприводимого случая кубического уравнения **ввел** в алгебру **МНИМЫЕ** величины:

Плюс из минуса на плюс из минуса будет минус.
Плюс из минуса на минус из минуса будет плюс.
Минус из минуса на плюс из минуса будет плюс.
Минус из минуса на минус из минуса будет минус.

L ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DIVISA IN TRE LIBRI
DI RAFAEL BOMBELLI
DA BOLOGNA.

Nouamente poſta in luce.

IN BOLOGNA
Nella ſtamperia di Giouanni Roſsi
M D L X X I I.
Con Licentia delli RR. VV. del Veſc. & Inquiſit.

1 издание

L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuiſa in tre Libri.
Con la quale ciaſcuno da ſe potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copioſa delle materie, che in eſſa ſi contengono.
Poſta hora in luce à beneficio delli ſtudioſi di detta profeſſione.

IN BOLOGNA,
Per Giouanni Roſsi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

2 издание

1572 Бомбелли ***"L' Algebra"***

"*<u>Способ нахождения кубической стороны из корней подобного вида</u>*", т.е. вычисление $\sqrt[3]{a+i\sqrt{b}} = x + i\sqrt{y}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$.

Без объяснений Бомбелли утверждает, что

$$\begin{cases} x^3 = a + 3xy \\ x^2 + y = \sqrt[3]{a^2 + b} \end{cases}.$$

Тогда величина *x* удовлетворяет системе неравенств:

$$\begin{cases} x^3 > a \\ x^2 < \sqrt[3]{a^2 + b} \end{cases}$$

Найдя подбором решение этой системы неравенств, Бомбелли из второго уравнения находит *y*.

Франсуа ВИЕТ (1540–1603)

Родился в Фонтене-ле-Конт (60 км от Ла-Рошели). Отец – прокурор, поэтому – юридическое образование в Пуатье, затем, вернувшись, 4 года юридическая практика.

Стал домашним учителем в знатной семье де-Партеней. В это время сумел выразить *sin nx* и *cos nx* в виде многочленов от *sin x* и *cos x*.

1571 Париж – советник Парламента, позже – тайный советник королей Анри III и Анри IV (перерыв с 1584 по 1589, занятия математикой).

1584 – дешифровка испанских писем (шифр из более 500 знаков).

1594 – задача Ван-Роумена

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12\,300x^{39} + 111\,150x^{37} - 740\,259x^{35} + 3\,764\,565x^{33} - 14\,945\,040x^{31} +$$
$$+ 46\,955\,700x^{29} - 117\,679\,100x^{27} + 236\,030\,625x^{25} - 378\,658\,800x^{23} + 483\,841\,800x^{21} -$$
$$- 488\,494\,125x^{19} + 384\,942\,375x^{17} - 232\,676\,280x^{15} + 105\,306\,075x^{13} - 34\,512\,075x^{11} +$$
$$+ 7\,811\,375x^{9} - 1\,138\,500x^{7} + 95\,634x^{5} - 3\,795x^{3} + 45x = \sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}\,.$$

Требовалось найти одно геометрическое решение.

Виет **сразу увидел**, что заданное значение, стоящее в правой части, является выражением для стороны правильного 15-угольника, вписанного в круг радиуса 1, т.е. хорды дуги в 24º, а коэффициенты уравнения показали, что уравнение выражает *sin φ* через *sin(φ/45)*, т.е. должен быть хордой 1/45 этой дуги, иначе говоря – стягивать дугу в (8/15)º: *x = 2 sin (4/15)º.*

Таким образом задача была сразу решена. Но Виет на следующий день указал еще 22 решения (поскольку остальные 22 – отрицательные).

1584 – 1589 отстранение от дел, работа над «***Искусством анализа,*** *или* ***Новой алгеброй***».

Стремился создать новую науку, обладающую строгостью геометрии древних и оперативностью алгебры – «*чтобы не оставалось нерешенных задач*». Свои идеи и принципы новой алгебры Виет изложил во “***Введении в аналитическое искусство***” (*In artem analyticem Isagoge*, Turonis **1591**), которое должно было стать началом его всеобъемлющего трактата по алгебре.

“Искусство, которое я излагаю, ново, или по крайней мере, настолько испорчено временем и искажено влиянием варваров, что я счел нужным придать ему совершенно новый вид... Все математики знали, что ***под их алгеброй и алмукабалой были скрыты несравненные сокровища****, но не умели их найти;* ***задачи,*** *которые они считали наиболее трудными, совершенно легко* ***решаются десятками с помощью нашего искусства****, представляющего поэтому самый верный путь для математических изысканий”.*

Опубликовано после смерти Виета его учениками в 1646 г. в Лейдене.

Создание буквенного исчисления.

1. Делит все величины на **ступени** (их бесконечно много) и определяет арифметические операции с ними.
2. Вводит **обозначения**:

   для неизвестных – гласные *A, E, I, O*…,

   и для известных величин – согласные *B, C, D*…
3. Использует специальные **символы** – коссические знаки **+** и **–** (ввел Ян Видман в 1489); **термины** для операции умножения и деления. С их помощью формулирует **правила**:

   а) $B - (C \pm D) = B - C \mp D$

   б) $B \text{ in } (C \pm D) = B \text{ in } C \pm B \text{ in } D$

   в) операции с дробями
4. **Уравнения**: а) числовые примеры (*logistica numerosa*)

   б) общая алгебра (*logistica speciosa*)

logistica numerosa:

$$x^3 - 3x = 1$$ 1C – 3N aequatur 1

$$x^3 + 30x^2 + 44x = 1560$$ 1C+30Q+44N aequatur 1560

logistica speciosa:

Уравнение $$x^3 + 3bx = 2d$$

с учетом принципа однородности надо переписать как

$$x^3 + 3B^2x = 2D^3,$$

поэтому у Виета:

A *cubus* + B *plano* 3 *in* A *aequatur* D *solido* 2

THEOREMA I.

SI A cubus + B in A quadr. 3 + D plano in A, æquetur B cubo 2 — D plano in B. A quad. + B in A 2, æquabitur B quad. 2 — D plano.

Quoniam enim A quadr. + B in A 2, æquatur B quadr. 2 — D plano. Ductis igitur omnibus in A. A cubus + B in A quad. 2, æquabitur B quad. in A 2 — D plano in A.

Et iisdem ductis in B. B in A quad. + B quadr. in A 2, æquabitur B cubo 2 — D plano in B. Iungatur ducta æqualia æqualibus. A cubus + B in A quad. 3 + B quad. in A 2, æquabitur B quad. in A 2 — D plano in A + B cubo 2 — D plano in B.

Et deleta utrinque adfectione B quad. in A 2, & ad æqualitatis ordinationem, translata per antithesin D plani in A adfectione. A cubus + B in A quadr. 3 + D plano in A, æquabitur B cubo 2 — D plano in B. Quod quidem ita se habet.

1 C + 30 Q + 44 N, *æquatur* 1560. *Igitur* 1 Q + 20 N, *æquabitur* 156. *& fit* 1 N 6.

FIG. 85.—From Vieta's *De emendatione aeqvationvm*, in *Opera mathematica* (1646), p. 154.

- «***Предварительные замечания к видовой логистике***»

  Запас формул:

  $(A \pm B)^n = A^n \pm nA^{n-1}B + \ldots \pm B^n,$ $\quad n = 2, 3, 4, 5$

  $A^n + B^n = (A+B)(A^{n-1} - A^{n-2}B + \ldots + B^{n-1}),$ $\quad n=3,5$

  $A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B - \ldots + B^{n-1}),$ $\quad n=2,3,4,5$

  и др.

- “***Genesis triangulorum***”

  После вывода формулы композиции форм строит исчисление треугольников, в котором можно усмотреть интерпретацию умножения комплексных чисел, в которой просматривается идея тригонометрической формы комплексного числа и формула Муавра.

1591 "***Zetetica***" – решение **<u>неопределенных уравнений</u>**.

По Виету ***зететика*** – часть аналитического искусства, с помощью которой устанавливают уравнения или отношения между искомыми и данными величинами; ***пористика*** – выяснение истинности предложений; ***экзегетика*** – нахождение неизвестных.

"***Zetetica***" состоит из пяти книг. В первых трех решаются определенные уравнения первых двух степеней + задачи на пропорции. Четвертая и пятая книги содержат неопределенные уравнения.

Начинает с задач Диофанта II_8 и II_9, но формулирует их с помощью буквенной алгебры. Излагает два способа решения – метод Леонардо Пизанского (не называя его) и метод Диофанта, и показывает, что полученные выражения для x и y эквивалентны. Для решения добавляет еще и свой метод.

Изложив методы ***в общем виде*** **(!!!)**, приводит числовой пример.

1591 разработал метод **приближенного решения алгебраического уравнения** с числовыми коэффициентами, который применялся до конца XVII в. (до метода Ньютона)

Первое в Европе **чисто аналитическое представление** числа π:

1593 «*Восьмая книга ответов на различные математические вопросы*»:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\ \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot \ldots$$

Оп. в **1615** «***Об анализе и усовершенствовании уравнений***» Виет дает свой способ решения одного кубического уравнения:

$x^3+3bx=2d$

$$A\ cubus + B\ plano\ 3\ in\ A\ aequari\ D\ solido\ 2 \qquad (1)$$

На современном языке мы бы сказали, что Виет предлагает ввести в уравнение новую неизвестную величину t такую, что $b = t(t+x)$ (2)

С ее помощью, с одной стороны, левую часть уравнения (1) можно представить разностью кубов: $(x+t)^3 - t^3 = 2d$.

А с другой стороны, выразив из (2) x через t и подставив это выражение в (1), получим:

$$x = \frac{b}{t} - t \Rightarrow \ \dots\ t^6 + 2dt^3 = b^3$$

– уравнение, квадратное относительно t^3 . Тем самым уравнение (1) будет решено.

В работе «***Дополнение геометрии***» показывает, что *в неприводимом случае кубическое уравнение можно свести к трисекции угла*, а, следовательно, решить ***тригонометрически***. При этом доказывает, что *этот тип уравнений может обладать тремя различными действительными решениями.*

Действительно, пусть дано уравнение $x^3 - px = q$, где $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$.

Запишем его в виде $x^3 - 3r^2x = ar^2$ (3)

Поскольку $\left(\frac{ar^2}{2}\right)^2 < (r^2)^3 \Rightarrow a < 2r$, то положим $a = 2r\sin v$.

Уравнение (3) тогда имеет вид $(x/r)^3 = 3(x/r) + 2\sin v$

и с помощью подстановки $x/r = -y$ Виет приходит к уравнению

$$3y - y^3 = 2\sin v.$$

Сопоставляя его с известным соотношением для синуса тройного аргумента $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\,sin^3\varphi$

или $2\sin 3\varphi = 3(2sin\varphi) - (2sin\varphi)^3$

он получает $y_1 = 2\sin\left(\frac{v}{3}\right)$.

Вторым положительным корнем будет $y_2 = 2\sin\left(\frac{v+2\pi}{3}\right)$. Третий корень отрицателен. Все выражения для корней Виет находит геометрически.

Свой вывод о существовании в неприводимом случае кубического уравнения трех действительных решений Виет не мог сформулировать явно, т.к. признавал только положительные корни. Это было сделано только А. Жираром в его "Новых открытиях в алгебре" (1629).

Идея применения трансцендентных функций к решению алгебраических уравнений получила новое развитие во второй половине XIX в. у Ш. Эрмита и Л. Кронекера (решение уравнения 5-й степени с помощью эллиптических функций).

Первые значительные **успехи в общей теории алгебраических уравнений.**

I. 1. ***Подстановка*** вида $\boldsymbol{x = y + k}$ уничтожает второе слагаемое в произвольном $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$ $(*)$

Позже Чирнгаузен искал подстановку, уничтожающую, два, три и т.д. слагаемых, чтобы получить уравнение типа $\boldsymbol{y^n \pm A = 0}$.

2. ***Подстановка*** вида $\boldsymbol{x = k/y}$ меняет порядок следования слагаемых: "первый – последний".

3. ***Подстановка*** вида $\boldsymbol{x = ky}$ избавляет от дробей в коэффициентах.

и т.п.

II. Для уравнений степени 2, 3, 4, 5 формулирует ***теоремы о связи корней уравнения и коэффициентов*** (тяжеловесная форма!) – первые ростки теории симметрических функций и разложения целых многочленов на множители первой степени (Т. Гарриот, А. Жирар, Р. Декарт, И. Ньютон):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -a_1 && \sigma_1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= a_2 && \sigma_2 \\ &\ldots \\ x_1x_2 \ldots x_n &= (-1)^n a_n && \sigma_n \end{aligned}$$

В общем виде эта теорема была впервые сформулирована А. Жираром в **1629**, который стал рассматривать

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \ (k = 1,2,3,4)$$

и выразил их через a_i:

$$S_1 = -a_1,$$
$$S_2 = a_1^2 - 2a_2,$$
$$S_3 = -a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3,$$
$$S_4 = a_1^4 - 4a_1^2a_2 + 4a_1a_2 + 2a_2^2 - 4a_4.$$

1707 Ньютон "***Всеобщая арифметика***" – конспект лекций по алгебре, которые Ньютон читал в Тринити Колледже.

В начале книги Ньютон поясняет отношение арифметики и алгебры: ***цель алгебры — открыть и исследовать общие законы арифметики***, а также предложить практические методы решения уравнений.

Особое внимание Ньютон уделил решению алгебраических уравнений:

– Одна из первых формулировок **основной теоремы алгебры**: число вещественных корней многочлена не превосходит его степени, а число комплексных корней всегда чётно.

– Обобщение декартова «**правила знаков**» для определения числа корней многочлена.

– Рекуррентные формулы для степенных сумм корней, введенных Жираром, позволившие Ньютону выразить **все** $\boldsymbol{S_k}$ через коэффициенты заданного алгебраического уравнения $(*)$ как целые функции с целыми коэффициентами.

Впоследствии было доказано, что всякая симметрическая функция от корней уравнения есть рациональная функция от элементарных симметрических функций, т.е. от коэффициентов заданного алгебраического уравнения $(*)$.

Ньютон также дает классическое **определение вещественного числа** как отношения результата измерения к единичному эталону:

"*Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой за единицу*."

Это определение уравнивает в правах целые, дробные и иррациональные числа. В отличие от многих математиков того времени, Ньютон отрицательные числа отдельно не рассматривал и показывал их полезность на примерах.