

# ИНТЕГРАЛЫ 2

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

Высокий  
логарифм

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a}) + C$$

Длинный  
логарифм

Выделение полного квадрата.

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$\textcircled{1} \quad x^2 + 4x - 5 = x^2 + \underbrace{2 \cdot 2x}_{4x} + 2^2 - 2^2 - 5 =$$
$$= (x+2)^2 - 9$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2 + 4x - 5} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 - \underbrace{9}_{3^2}} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+2-3}{x+2+3} \right| + C$$

$$= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{x+5} \right| + C$$

$$\textcircled{2} \quad 2x^2 - 4x + 5 = 2\left(x^2 - 2x + \frac{5}{2}\right) = 2\left(x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{5}{2}\right)$$

$$= 2\left((x-1)^2 + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 3/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3/2})} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{3/2}}$$

$$+ C = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \frac{2(x-1)}{\sqrt{6}} + C$$

Разложение правильной дроби в сумму  
простейших.

①  $\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)} = \int$

$$1. \frac{1}{(x-3)(x+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4} = \frac{Ax+4A+Bx-3B}{(x+4)(x-3)}$$
$$= \frac{(A+B) \cdot x + (4A-3B)}{(x-3)(x+4)}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^1: 0 = A+B \\ x^0: 1 = 4A-3B \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -B \\ 1 = -7B \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{7} \quad A = \frac{1}{7}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad Y &= \frac{1}{7} \cdot \int \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{7} \int \frac{dx}{x+4} = \\ &= \frac{1}{7} \ln|x-3| - \frac{1}{7} \ln|x+4| + C = \\ &= \frac{1}{7} \ln \left| \frac{x-3}{x+4} \right| + C \end{aligned}$$

Разложение правильной дроби в  
сумму простейших

$$\textcircled{2} \quad \int \frac{x dx}{x^4 + 6x^2 - 7} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ x dx = \frac{1}{2} d(x^2) \end{array} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2 + 6x^2 - 7} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ t = x^2 \end{array} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 7}$$

$$1) \quad t^2 + 6t - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{4} = 9 + 7 = 16 > 0$$

$$\Rightarrow \exists t_{1,2} = -3 \pm 4 = \{-7; 1\}$$

$$\Rightarrow t^2 + 6t - 7 = (t + 7)(t - 1)$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \frac{1}{(t+7)(t-1)} &= \frac{A}{t+7} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + B(t+7)}{(t+7)(t-1)} = \\
 &= \frac{(A+B)t + (-A+7B)}{(t+7) \cdot (t-1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+7B=1 \end{cases} \\
 &\Rightarrow B = \frac{1}{8} \quad A = -\frac{1}{8} \qquad \qquad \qquad \underline{8B=1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad y &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{8} \int \frac{dt}{t+7} + \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t-1} \right) = \\
 &= \frac{1}{16} (\ln|t-1| - \ln|t+7|) + C = \\
 &= \frac{1}{16} \ln \left| \frac{t-1}{t+7} \right| + C = \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2+7} \right| + C
 \end{aligned}$$

## Интегрирование по частям

Знаем:  $(uv)' = u'v + v'u$

В дифференциальном виде:

$$d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv$$

$$\Rightarrow u dv = d(uv) - v \cdot du$$

$$\Rightarrow \boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Примеры: ①  $\int \ln x dx = ?$  об  $y$

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ v = \int dx = x \end{cases} \Rightarrow \boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

$$\begin{aligned} y &= x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = \\ &= x \ln x - x + C - \text{Ответ} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int (2x+3)e^x dx \stackrel{\text{од } Y}{=} \int$$

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

$$\text{I. } \begin{cases} u = 2x+3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow Y = (2x+3) \cdot e^x -$$

$$- \int e^x \cdot 2 dx = (2x+3) \cdot e^x - 2e^x + C =$$

$$= (2x+1)e^x + C \quad \text{— Ответ.}$$

$$\text{II. } \begin{cases} u = e^x \\ dv = (2x+3) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = x^2 + 3x \end{cases} \Rightarrow$$

$$Y = e^x(x^2 + 3x) - \int (x^2 + 3x) \cdot e^x dx \Rightarrow Y - Y - Y!!!$$

$$\textcircled{3} \int x^2 \ln x \, dx \stackrel{\text{oder}}{=} Y$$

$$\text{I. } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \ln x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x \, dx \\ v = \int \ln x \, dx = \underline{\underline{Y - Y - Y!!!}} \end{cases}$$

$$\text{II. } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$Y = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C \text{ oder}}}$$

$$\text{III. } \begin{cases} u = x^2 \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x \ln x + x) \, dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow$$

$$Y = x^3 \ln x - \int x (2x \ln x + x) \, dx = Y - Y - Y!!!$$

$$① = x \ln x - x$$

$$\Rightarrow y = x^2 (x \ln x - x) - \int (x \ln x - x) \cdot 2x dx$$

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

$$2 \underbrace{\left( \int x^2 \ln x dx \right)}_{\text{обозн. } y} - 2 \int x^2 dx$$

$\Rightarrow$  ищем

$$y = x^3 (\ln x - 1) - \left( 2y - 2 \left( \int x^2 dx \right) \right)$$

$x^3/3 + C_1$

$$\Rightarrow 3y = x^3 (\ln x - 1) + \frac{2}{3} x^3 + C_1$$

$$y = \frac{x^3}{3} (\ln x - 1) + \frac{2}{9} x^3 + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C - \text{Ответ.}$$

$$\textcircled{4} \int e^{\arccos x} dx \stackrel{os}{=} y$$

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

$$1. \begin{cases} u = e^{\arccos x} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^{\arccos x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = x e^{\arccos x} - \int x \cdot \frac{-e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \textcircled{\star}$$

$$2. \int \frac{x e^{\arccos x} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int e^{\arccos x} \cdot \frac{\overset{\curvearrowright}{x dx}}{\sqrt{1-x^2}} \overset{\frac{1}{2}d(x^2)}{=} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^{+\arccos x} \frac{d(x^2 \cdot (-1) + 1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^{\arccos x} \cdot 2d(\sqrt{1-x^2}) =$$

$$= - \int e^{\arccos x} \cdot d(\sqrt{1-x^2}) \stackrel{\text{од } M}{=} \int_1$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= \int t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$= 2 \cdot t^{\frac{1}{2}} + C$$

$$3. \begin{cases} u_1 = e^{\arccos x} \\ dv_1 = d(\sqrt{1-x^2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = \frac{-e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ v_1 = \sqrt{1-x^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_1 = - \left( \sqrt{1-x^2} \cdot e^{\arccos x} + \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)$$

$$= -\sqrt{1-x^2} \cdot e^{\arccos x} - \underbrace{\int e^{\arccos x} dx}_{\text{доп. } y}$$

$$\Rightarrow \star: y = x e^{\arccos x} + y_1 = x e^{\arccos x} - \sqrt{1-x^2} e^{\arccos x} - y$$

$$\Rightarrow 2y = e^{\arccos x} (x - \sqrt{1-x^2}) + 2C \Rightarrow \underbrace{y = \frac{1}{2} e^{\arccos x} (x - \sqrt{1-x^2})}_{\text{реш.}} + C$$

Определенный интеграл  
вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ где}$$

1)  $\langle a; b \rangle \equiv$  отрезок

2)  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$

3)  $F'(x) = f(x)$

Примеры:

①  $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1} dx = F(9) - F(2)$

1)  $\int (x-1)^{1/3} dx = \int (x-1)^{1/3} d(x-1) = \frac{3(x-1)^{4/3}}{4} + C$

2)  $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1} dx = \frac{3}{4} (x-1)^{4/3} \Big|_2^9 = \frac{3}{4} \left( 8^{4/3} - 1^{4/3} \right) =$

$= \frac{3}{4} (16 - 1) = \left( \frac{45}{4} \right) \underline{\underline{\text{Ответ.}}}$

$$\textcircled{2} \int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2} dx$$

$$1) \int \frac{x^2+3}{x-2} dx = \int \frac{x^2+3-4+4}{x-2} dx = \int (x+2) dx + 4 \int \frac{dx}{x-2}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{2} + 4 \ln|x-2| + C$$

$$2) \int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2} dx = \left( \frac{(x+2)^2}{2} + 4 \ln|x-2| \right) \Big|_3^4 = \text{Orber.}$$

$$= \left( 18 - \frac{25}{2} + 4 \ln 2 - 4 \underbrace{\ln 1}_0 \right) = \left( \frac{11}{2} + 4 \ln 2 \right)$$

## Замена переменной в определённом интеграле

$$\int\limits_a^b f(x) dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt, \text{ где}$$

- 1)  $\langle a; b \rangle$  и  $\langle \alpha; \beta \rangle \equiv$  отрезки
  - 2)  $f(x)$  непрерывна на  $\langle a; b \rangle$ ;
- $x = \varphi(t)$  непрерывна на  $\langle \alpha; \beta \rangle$ ,  
 $\exists$  производная  $\varphi'(t)$  и она тоже непрерывна,  
при этом  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ .

Примеры: (1)  $\int_1^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x-2}} = y$

1) пусть  $\sqrt{3x-2} = t$ , тогда: а)  $x = \frac{1}{3}(t^2 + 2)$   
 б)  $dx = \frac{2}{3}t dt$

б)  $\begin{cases} b = 6 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 4 \\ A = 1 \end{cases}$

Other:

$$\boxed{\frac{2}{3} \left( 3 + \ln \frac{2}{5} \right)}$$

2)  $y = \frac{2}{3} \int_1^4 \frac{t dt}{1+t} = \frac{2}{3} \left( t - \ln|t+1| \right) \Big|_1^4 = \frac{2}{3} \left( 4 - \ln 5 - (-1 + \ln 2) \right)$

т.к.  $\int \frac{t+1-1}{1+t} dt = \int dt - \int \frac{dt+1}{t+1} = t - \ln|t+1| + c$

$$\textcircled{2} \int_2^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx = y$$

1. Пусть  $\sqrt{x^2-4} = t$ , тогда  $\left. \begin{array}{l} 1) x = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ x = 2 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right\}$

2)  $x^2 = t^2 + 4 \Rightarrow x = \sqrt{t^2 + 4}$

3)  $dx = \frac{2t}{2\sqrt{t^2+4}} dt$

$$\Rightarrow y = \int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{t \cdot t dt}{\sqrt{t^2+4} \cdot \sqrt{t^2+4}} = \int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{t^2+4}$$

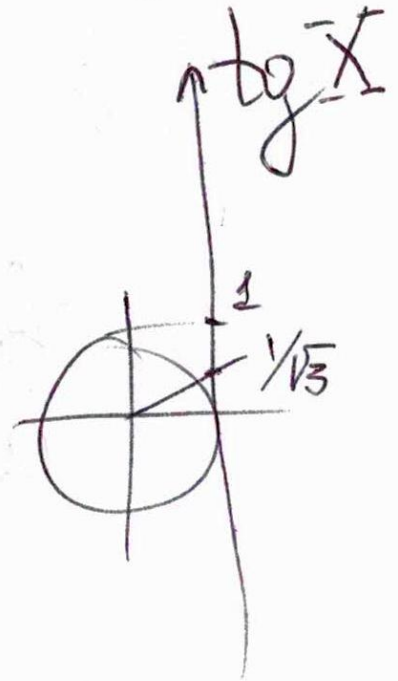
$$2. \int \frac{t^2 + 4 - 4}{t^2 + 4} dt = \int dt - 4 \int \frac{dt}{t^2 + 4} =$$

$$= t - 4 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C$$

$$3. \Rightarrow \int = \left( t - 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2/\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} - 2 \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - 0 + \operatorname{arctg} 0$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3} \quad \underline{\underline{\text{Отв.}}}$$



Домаш: 1. 6.162 + ①  $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 4}$

②  $\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 3}$

2. 6.124, 6.125, 6.126, 6.129, 6.130, 6.134

3. 6.335, 6.341, 6.346, 6.349, 6.350, 6.351