

ИНТЕГРАЛЫ

Процесс вычисления производной ф-ции $y = f(x)$ называется дифференцированием.

Обратное действие — интегрирование.

Если обозначить множество всех ф-ций $F(x)$, то можно рассматривать дифференцирование и интегрирование как линейные операторы:

$$D: F(x) \longrightarrow F(x)$$
$$f(x) \xrightarrow{d} f'(x) \stackrel{\text{об}}{=} g(x)$$

$$I: F(x) \longrightarrow F(x)$$
$$g(x) \longrightarrow f(x) + C$$

$\Rightarrow$ чтобы научиться интегрировать, нужно выучить ТАБЛИЦУ интегралов, которая получается из таблицы производных, и ПРАВИЛА интегрирования.

Интегралы бывают РАЗНЫЕ:

I. Неопределенные: $\equiv$ множество первообразных

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ где } F'(x) = f(x)$$

II. Определенные: $\equiv$ число конечное ("площадь криволинейной трапеции")

$\int_a^b f(x) dx \equiv$ предел интегр. сумм, если

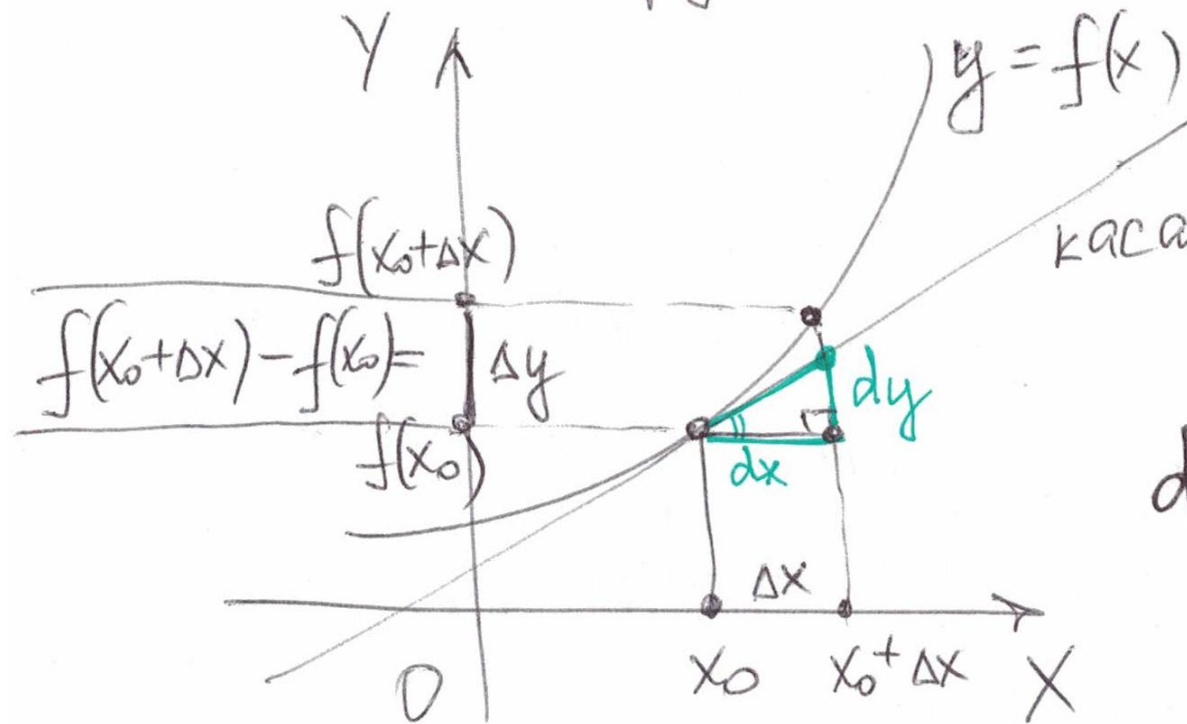
{ 1) $\langle a, b \rangle \equiv$ отрезок

{ 2) $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$

III. Несобственные

появляются, когда нарушаются эти требования.

Геометрический смысл дифференциала
функции в точке x_0 :



касательная $y = kx + b$,
 где $k = f'(x_0)$

differentio $\equiv$ разность

$$dx = \Delta x$$

$$dy \neq \Delta y, \text{ а}$$

$$\boxed{\Delta y = dy + o(\Delta x)}, \text{ но}$$

можно доказать: $\star$ $dy = y'(x)dx$ и все
свойства производных перенести в дифферен-
циальном виде. В том числе таблицу произ-
водных:

$$d(x^2) = 2x dx$$

$$d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$$

$$d(\sin x) = \cos x dx \quad \dots$$

$$x^n dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1})$$

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$$

$$x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3)$$

$$a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot d(a^x)$$

$$\sin x dx = -d(\cos x)$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$$

$$e^x dx = d(e^x)$$

$$\cos x dx = d(\sin x)$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$$

$$\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C,$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1),$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0),$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C,$$

Свойства интегралов неопределенных:

I. (связь с обратным характером по отношению к дифференцированию)

$$\int df(x) = f(x) + C$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

II. Свойства линейности интегралов:

$$1) \int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$$

$$2) \int k f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

Примеры:

$$1. \int \frac{2x+3}{x^4} dx = 2 \int \frac{dx}{x^3} + 3 \int \frac{dx}{x^4} =$$
$$= 2 \cdot \int x^{-3} dx + 3 \cdot \int x^{-4} dx = 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + 3 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} + C$$
$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + C$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \int 2^x (1 + 3x^2 \cdot 2^{-x}) dx &= \int 2^x dx + 3 \int x^2 dx = \\
 &= \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3x^3}{3} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \\
 &= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C
 \end{aligned}$$

Подведение под знак дифференциала

$$1. \int \sin 2x \cdot dx \neq -\cos 2x + C$$

$$\int \sin t dt = -\cos t + C$$

$\Rightarrow$ Хотя будем $d(2x) = ?$

Но $\textcircled{*} d(2x) = 2 \cdot dx \Rightarrow$ из dx всегда можно
сделать $d(kx) \div dx = \frac{1}{k} \cdot d(kx)$

$$\Rightarrow \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$$

$$2. \int \sqrt{3+x} dx = \int \sqrt{3+x} d(x+3) =$$

$$\int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C$$

$$\text{т.к. } d(x+k) = (x+k)' \cdot dx = dx$$

$$= \frac{2}{3} (x+3)^{3/2} + C$$

$$x^n dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1})$$

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$$

$$x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3)$$

$$a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot d(a^x)$$

$$\sin x dx = -d(\cos x)$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$$

$$e^x dx = d(e^x)$$

$$\cos x dx = d(\sin x)$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$$

$$3. \int (3 - 4\sin x)^{1/3} \underbrace{\cos x dx}_{d(\sin x)} = \frac{1}{-4} \int (3 - 4\sin x)^{1/3} d(\sin x \cdot (-4))$$

$$= -\frac{1}{4} \int (3 - 4\sin x)^{1/3} d(3 - 4\sin x) =$$

$$\int t^{1/3} dt = \frac{3}{4} t^{4/3} + C$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} (3 - 4\sin x)^{4/3} + C$$

$$4. \int \sin \ln x \cdot \left(\frac{dx}{x} \right)_{d(\ln x)} = \int \sin \ln x d(\ln x) = -\cos \ln x + C$$

cm. n. 1
(Bewe)

В таблице интегралов есть $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$

Вычислим и выучим:

$$\textcircled{1} \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\frac{x^2}{4}+1} = \frac{1 \cdot 2}{4} \int \frac{d(x/2)}{(\frac{x}{2})^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

Аналогично:

$$\textcircled{2} \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{3 \cdot d(x/3)}{\sqrt{1-(x/3)^2}} =$$

$$= \arcsin \frac{x}{3} + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

③ Сначала выведем $\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} =$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1}$$

т.к. $\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{-1}{2(x+1)}$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{d(x+1)}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \frac{1}{2} (\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2 \cdot a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

"высокий"
логарифм

7 смѣ и "низкий".

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1. \quad 9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \quad 10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \quad 11. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \text{ не учить}$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C. \quad 12. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \text{ не учить}$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C. \quad 13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C. \quad 14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$$

$$7. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C \quad 15. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$8. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C. \quad 16. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

Замена переменной в неопределённом интеграле.

$$1. \int x(5x-1)^{19} dx \stackrel{\text{обм}}{=} J$$

Пусть $t = 5x - 1$, тогда 1) $x = \frac{1}{5}(t+1)$

2) $dx = \frac{1}{5} t' dt = \frac{1}{5} dt$

$$\Rightarrow J = \int \frac{1}{5}(t+1) \cdot t^{19} \cdot \frac{1}{5} dt =$$

$$= \frac{1}{25} \left(\int t^{20} dt + \int t^{19} dt \right) = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{21} t^{21} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{20} t^{20} + C$$

$$= \frac{1}{25} \left(\frac{(5x-1)^{21}}{21} + \frac{(5x-1)^{20}}{20} \right) + C$$

$$2. \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^3}} \stackrel{?}{=} \int$$

Положим $\sqrt{1-x^3} = t$, тогда 1) $1-x^3 = t^2 \Rightarrow$

$$x = \sqrt[3]{1-t^2}; \quad 2) dx = \left(\sqrt[3]{1-t^2} \right)' dt =$$

$$= \frac{-2t}{3(1-t^2)^{2/3}} dt$$

$$\Rightarrow \int = \int \frac{-2t dt}{\sqrt[3]{1-t^2} \cdot t \cdot \sqrt[3]{(1-t^2)^2}} = -\frac{2}{3} \int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1} \right| + C$$

Домашнее задание:

- 1) 6.22, 6.26, 6.28, 6.29а, 6.34, 6.36, 6.37, 6.43;
- 2) 6.48, 6.51, 6.53, 6.56, 6.59, 6.61, 6.65, 6.71, 6.77, 6.78;
- 3) 6.115, 6.117, 6.120, 6.122.