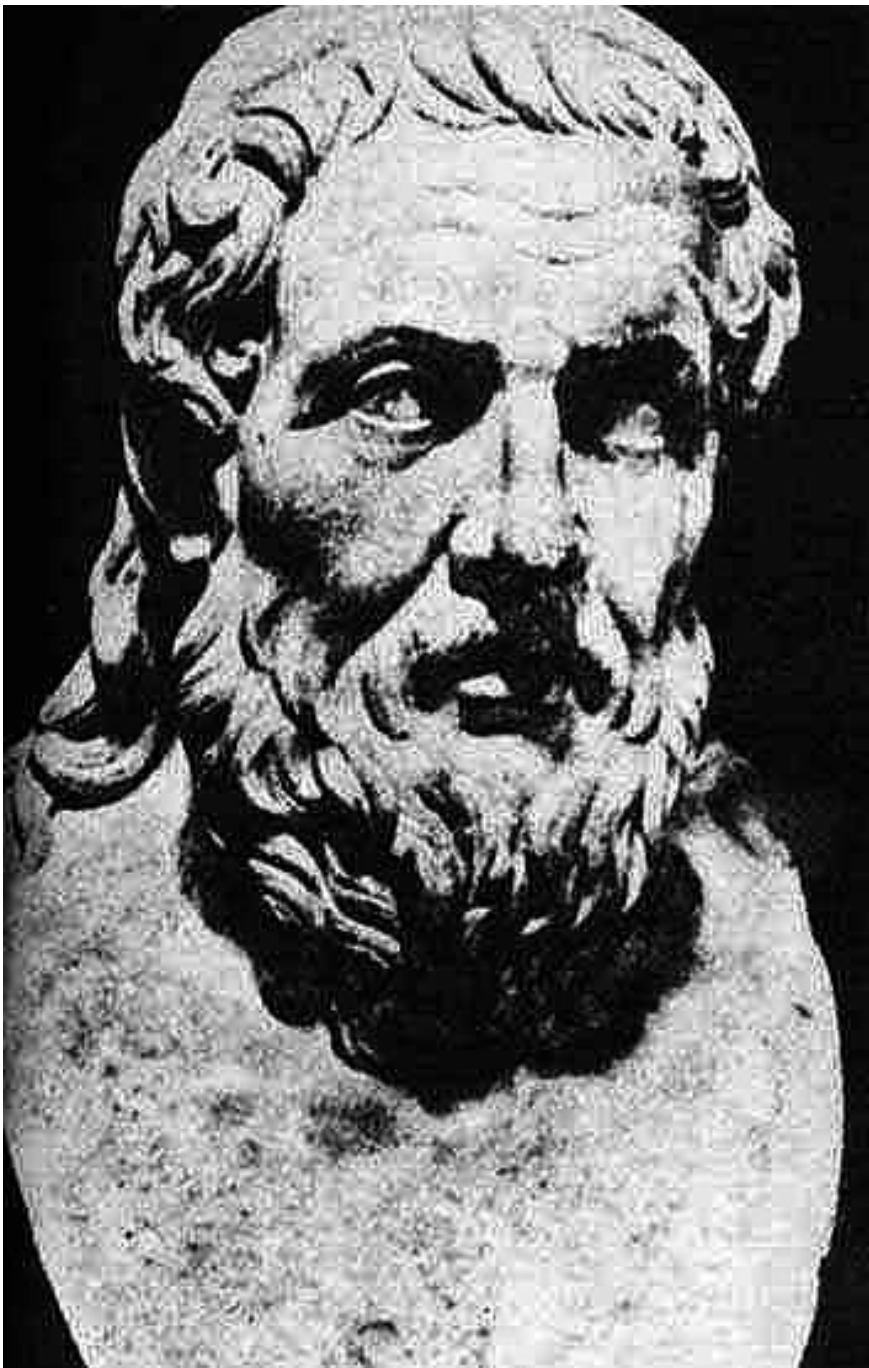


**АПОЛЛОНИЙ ПЕРГСКИЙ**



Родился в Пергах, в Малой Азии. О времени его жизни имеются противоречивые свидетельства.

Некоторые исследователи полагают, что он родился **около 260 г. до н.э.**, другие смещают эту дату на три десятилетия. Однако имеются основания считать, что **около 190 г. до н.э.** он еще был жив.

Около **235–225 до н.э.** учился у Евдема Пергамского в Эфесе, затем – переезд в Александрию, учеба в Мусейоне.

Около **210 до н.э.** – расцвет творчества, преподавание математики в Александрии.

Позже переехал в Пергам, где в городской библиотеке хранилось до 200 тысяч свитков. По количеству рукописей она уступала лишь Александрийской библиотеке.

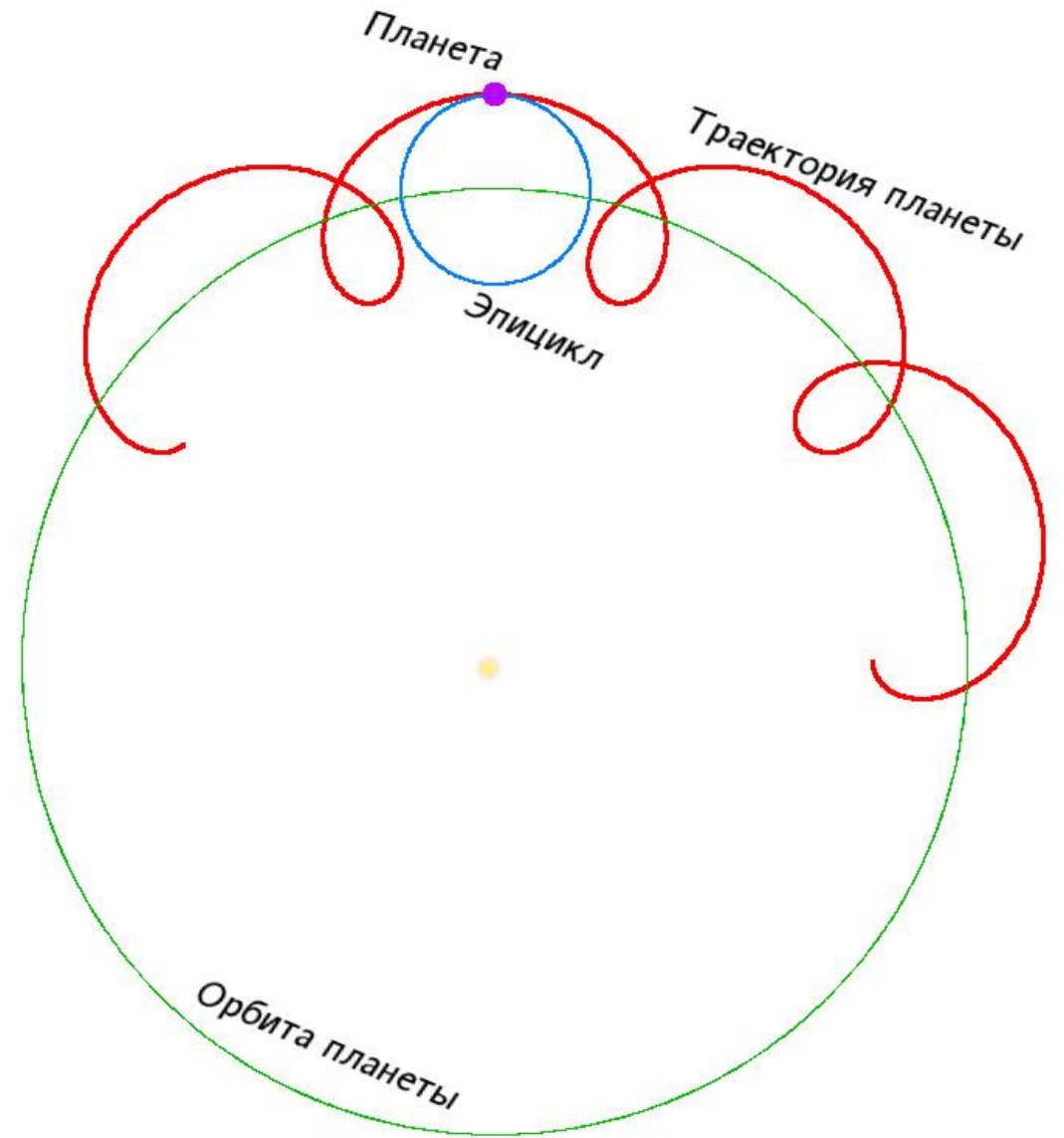
Труды Евклида и Архимеда широко известны, много переводов. Про Аполлония этого сказать нельзя: переводы – крайне редко, чаще – пересказы.

Известно, что в своих **первых** научных работах по астрономии, чтобы представить видимое движение Солнца и планет, Аполлоний ввел *эпициклы и эксцентрические окружности*. На основе этой теории Клавдий Птолемей построил геоцентрическую картину мира. В его «Альмагесте» есть цитата из Аполлония – *единственный сохранившийся фрагмент его астрономического трактата*.

По мнению некоторых историков, первую теорию эпициклов построили ещё пифагорейцы в V веке до н. э.

**Эпицикл** – понятие, используемое позже и в средневековых теориях движения планет. Согласно этой модели, планета равномерно движется по малому кругу, называемому эпициклом, центр которого, в свою очередь, движется по большому кругу, который называется **деферентом**.

**Эксцентрика** в астрономии – вспомогательная окружность в геоцентрической системе мира для представления годового обращения Солнца вокруг Земли с помощью движения по окружности с постоянной угловой скоростью.



**Сочетание движений по эпициклу и деференту, приводящее к движению Солнца по эксцентрическому кругу.**

*Обозначения:*

*T – Земля (центр деферента),*

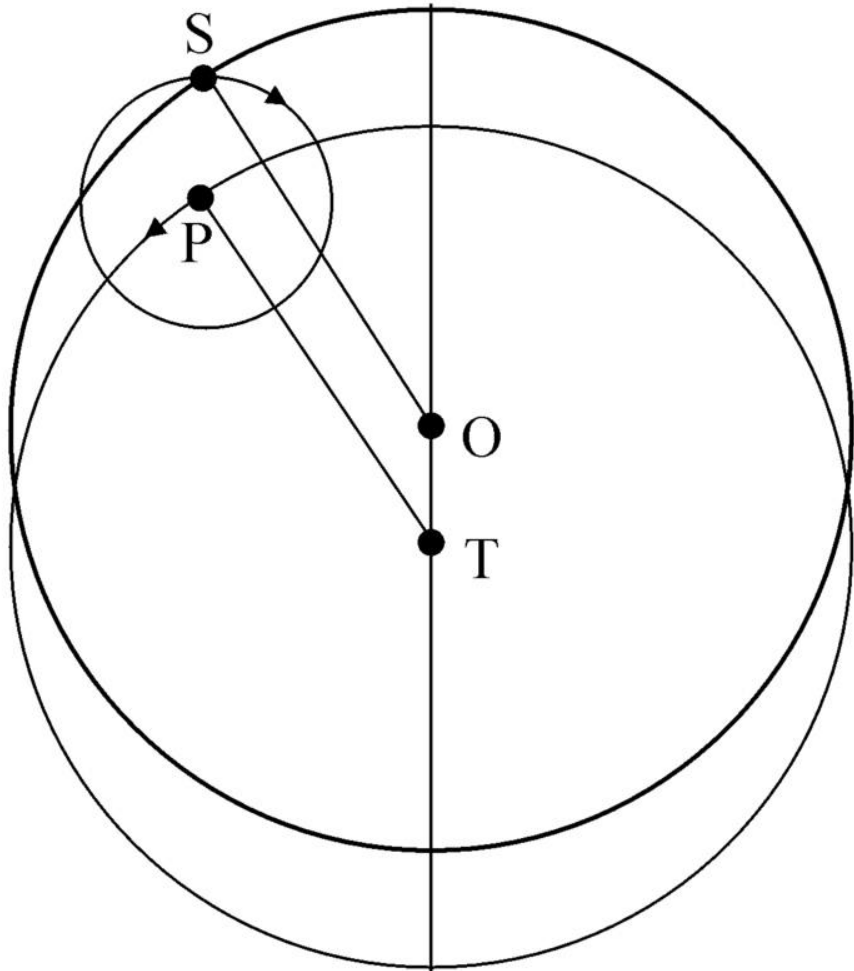
*S – Солнце,*

*P – центр эпицикла,*

*O – центр эксцентрики  
(результатирующей орбиты Солнца).*

*При движении Солнца отрезки SP и OT  
всегда параллельны.*

Неравномерность движения Солнца по **эклиптике** (видимый путь Солнца в течение года) объяснялась тем, что оно движется (равномерно) по эксцентрике, центр которой не совпадает с Землей.



# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ АПОЛЛОНИЯ (упоминает Папп Александрийский IV в. н.э.)

## 1. «Конические сечения»

8 книг

*Единственное* из сочинений Аполлония, *сохранившееся* до наших дней: первые 4 книги – по-гречески, еще три – только в **арабском** переводе, восьмая утеряна.

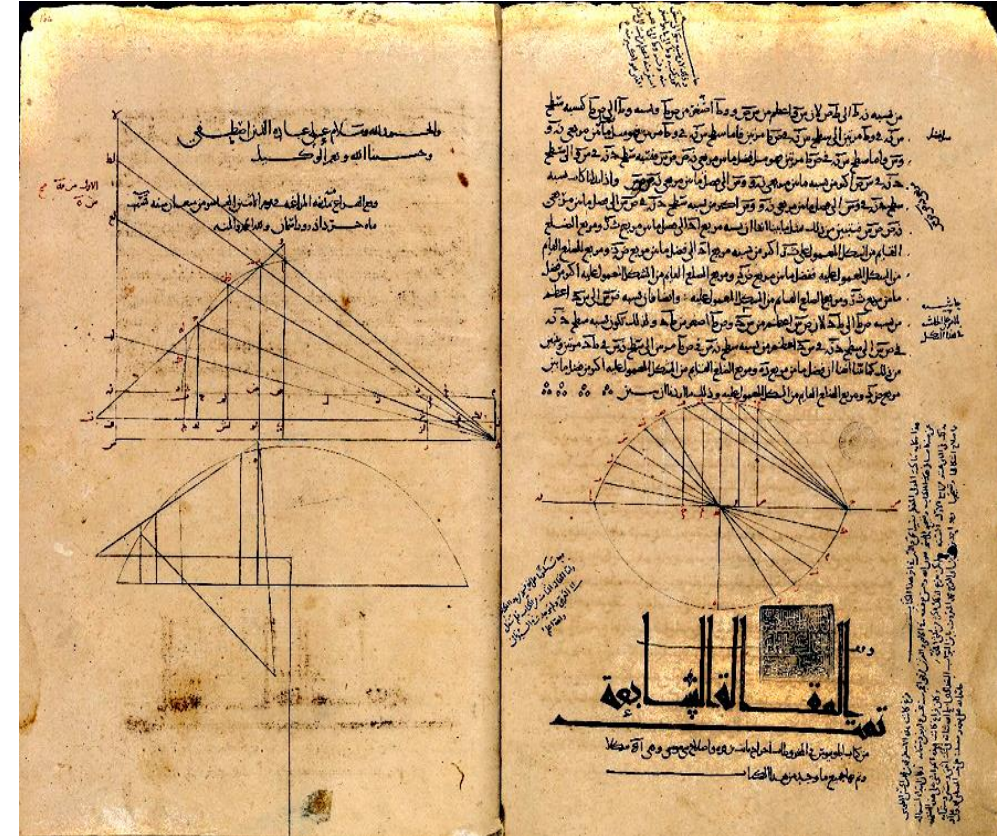
2. «О вставках» (дал свою классификацию задач, решаемых с помощью вставок)

3. «О неупорядоченных иррациональностях»

4. «О спиральных линиях» на поверхности (о ней упоминает Прокл (V в. н.э.))

5. «О касании»: Через данные три точки провести окружность, касающуюся каждой из трех прямых или окружностей.

6. «О плоских геометрических местах» (рассматривал преобразование плоскости в себя, при котором прямые переходят в прямые, окружности – в окружности)  
и др.



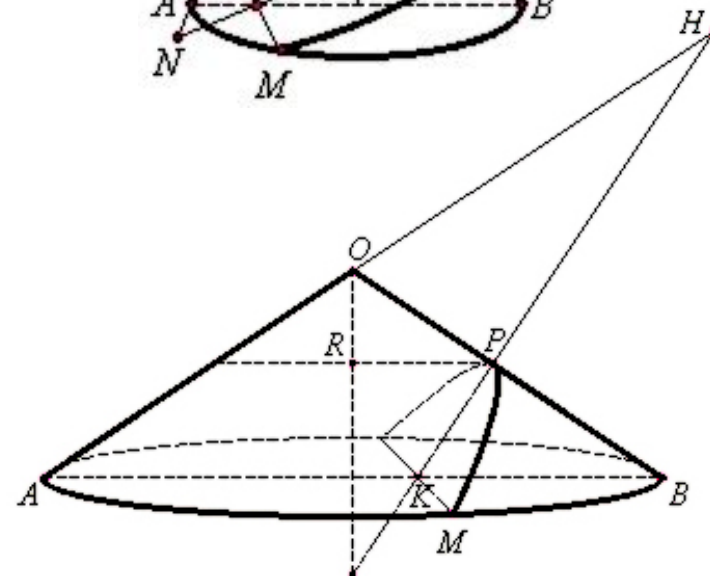
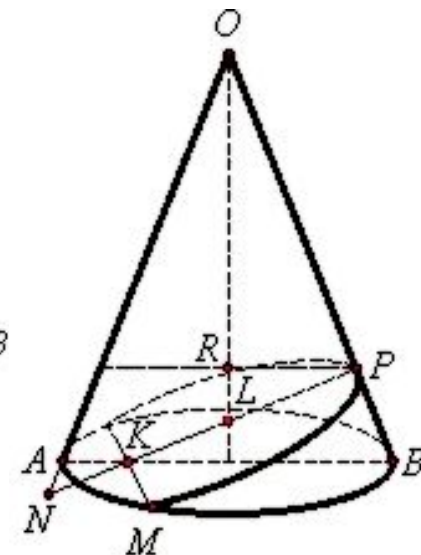
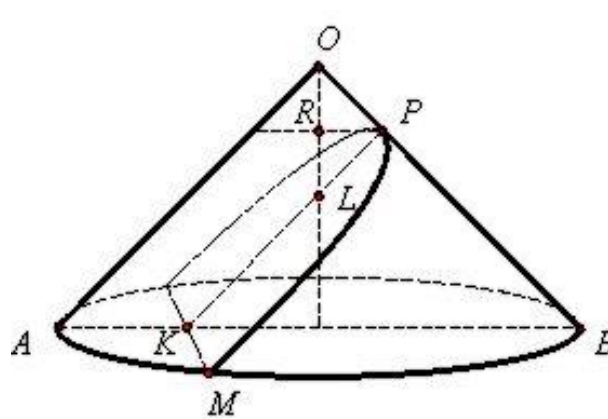
Конические сечения возникли в результате попыток решить задачу удвоения куба.

Ученик Евдокса **Менехм** (IV в. до н.э.) рассмотрел **сечения конусов вращения**. Такое представление гарантирует существование и непрерывность определяемых кривых.

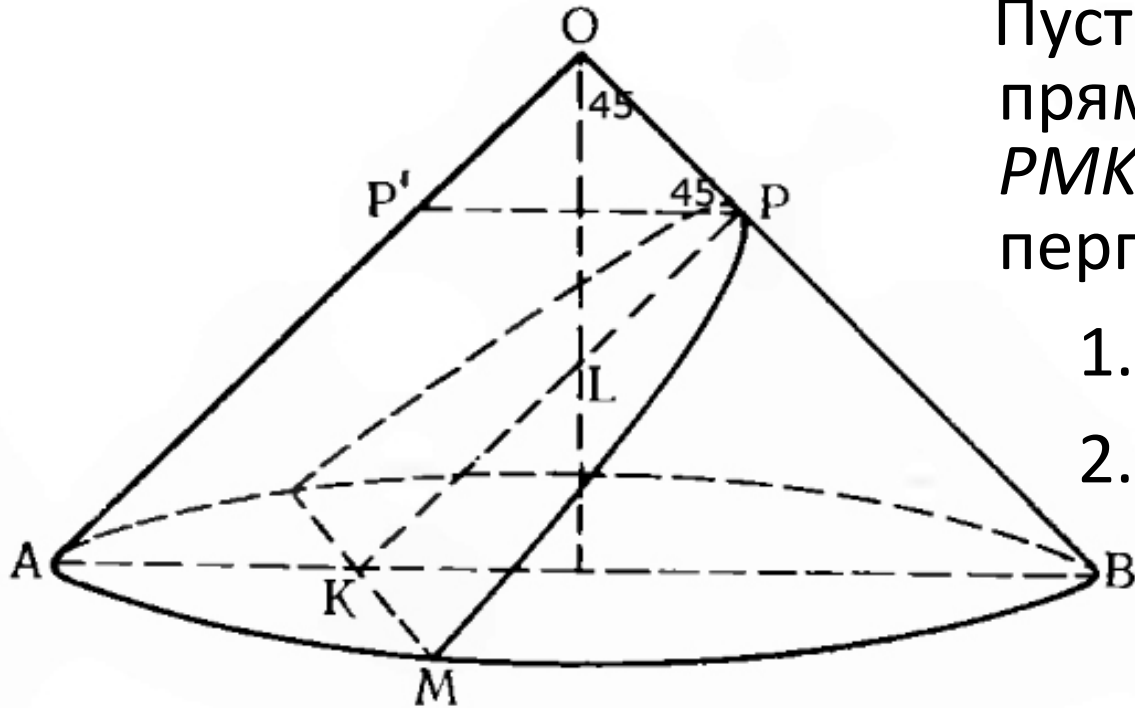
Также он начал строить теорию с помощью **симптомов кривых**, сформулированных в словесно-геометрической форме.

Например, для параболы:  
*«Квадрат на полухорде в каждой точке оси равен прямоугольнику на соответствующем отрезке диаметра и некотором постоянном отрезке».*

В современных обозначениях:  $KM^2 = 2PO \cdot PK$   
или  $x^2 = 2py$ .



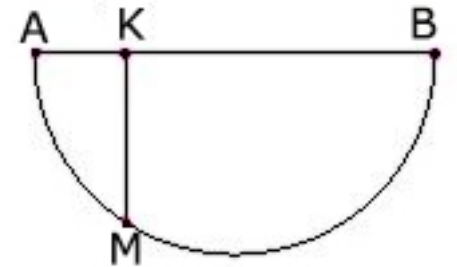
## Вывод симптома параболы у Менехма



Пусть  $ABO$  – тело вращения равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг катета,  $PMK$  – сечение конуса плоскостью, перпендикулярной образующей:  $PK \perp BO$

1. Фиксируем точку  $P$  : пусть  $OP = r$
2. Рассмотрим половину хорды сечения в основании конуса:

$$KM^2 = AK \cdot KB \quad (*)$$



3. Проведем прямую  $PP'$ , параллельную  $BA$ , тогда  $AK = PP' = r\sqrt{2}$  (из  $\triangle POP'$ )

4. Из  $\triangle KPB$  гипотенуза  $KB = KP\sqrt{2}$

5. Подставляя в  $(*)$ , получаем симптом «**сечения прямоугольного конуса вращения**»  $KM^2 = 2PO \cdot PK$ . Обозначив  $KM$  через  $x$  и  $PK$  через  $y$ , получаем уравнение параболы в виде  $x^2 = 2ry$ .



## Предшественники Аполлония

1. После **Менехма** многие геометры занимались коническими сечениями.

По словам Паппа Александрийского (VII книга «Математической коллекции»):

2. Старший современник Евклида **Аристей** написал «Телесные геометрические места» (5 книг);

3. **Евклид** написал 4 книги о конических сечениях, которые вошли в трактат Аполлония.

Исследователи упоминают и других предшественников Аполлония.

## «Конические сечения» Аполлония

– в корне преобразована существовавшая до него теория конических сечений: кривые рассматриваются общим способом в **косоугольной системе координат** (любой диаметр + касательная);

– без алгебраической символики, без нуля и отрицательных величин дана **законченная теория** кривых 2-го порядка;

– классификация кривых алгебраическая: введена общепринятая **терминология** (парабола, гипербола, эллипс и т.п.); для обоснования законности доказывается инвариантность вида уравнения относительно системы координат;

– разработаны новые геометрические методы, относящиеся сейчас к аналитической, аффинной, проективной, конформной и дифференциальной геометрии;

– все доказательства – геометрические! **Высшая точка развития геометрической алгебры**. Перевод на алгебраический язык только в XVII в. (Декарт, Ферма). В «*Математических началах натурфилософии*» Ньютон пользуется геометрическим языком Аполлония, а не Декарта!

Книги I–III посланы Евдему Пергамскому.

Книги IV–VII посланы Атталу, ученику Евдема в Пергаме.

Книга VIII утеряна. Попытались восстановить различные математики:

- **Ибн аль-Хайсам** (965– около 1040);
- **Эдмунд Галлей** (1656–1742) в 1710; →
- безымянный автор первого латинского перевода (книги 1–4 – с греческого, книги 5–7 – с арабской рукописи Сабита ибн Корры).

**Русский перевод** И. Ягодинского 1й книги сделан в **1928** г. и издан в «*Известиях Северо-Кавказского гос. Университета*» + 20 предложений в **2004** г. в книге: *Розенфельд Б.А. Аполлоний Пергский.*

*APOLLONII PERGÆI*  
**C O N I C O R U M**  
LIBRI OCTO,  
ET  
*SERENI ANTISSENSIS*  
DE SECTIONE  
**CYLINDRI & CONI**  
LIBRI DUO.



*OXONIÆ,*  
E THEATRO SHELDONIANO, An. Dom. MDCCX.

**В книге I** приводятся определения и уравнения («симптомы») конических сечений.

В последующем изложении (книги II—IV) выясняются **свойства** особых точек и линий, связанных с исследуемой кривой: **фокусов, асимптот, полюсов и поляр**, перечисляются их свойства, доказывается, что **конические сечения** могут **пересекаться** не более чем в 4 точках, поясняется, как строить **касательные** к этим кривым, определяются **площади** сегментов и др.

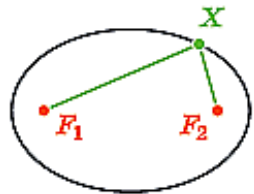
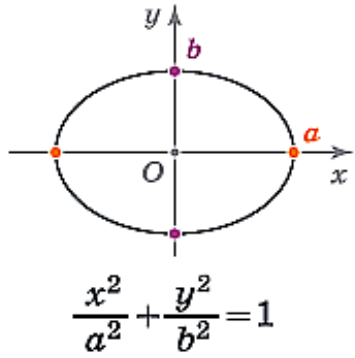
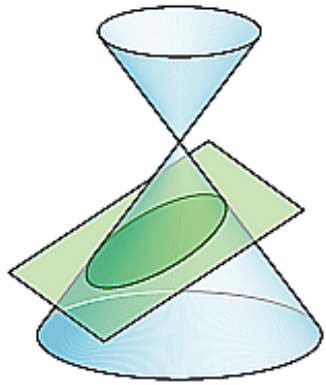
В предисловии Аполлоний сообщает, что, начиная с III книги, бóльшая часть теорем являются новыми. Всего в работе **387** теорем.

**V книга:** теория нормалей и эволют для конических сечений, задачи на максимум и минимум.

**VI книга:** теория подобия конических сечений.

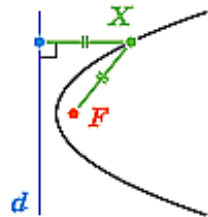
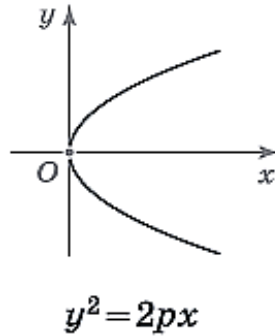
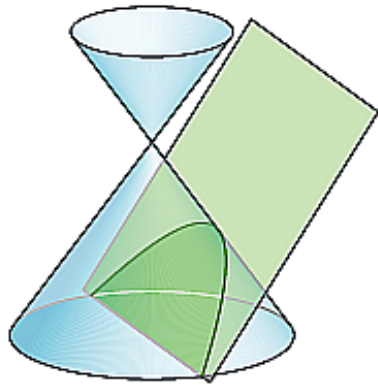
**В VII-й** (и, видимо, **в VIII-й**) книге приводятся знаменитые теоремы Аполлония о сопряжённых диаметрах и разнообразные приложения теории к геометрическим задачам.

Эллипс



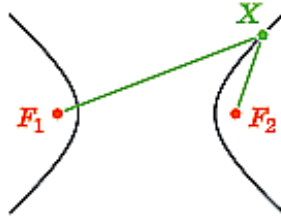
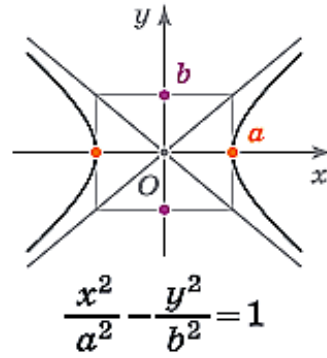
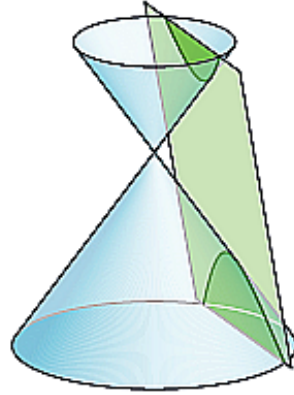
$$XF_1 + XF_2 = 2a$$

Парабола



$$XF = \rho(X, d)$$

Гипербола



$$|XF_1 - XF_2| = 2a$$

Аполлоний дает  
**ОБЩЕЕ**  
**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:**

1. Круговой конус – произвольный.
2. Двухполостной (следовательно, рассматривает две ветви гиперболы).
3. Сечения проводятся под любым углом к образующей.

## **Б.Л. Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука:**

*«Чертежи Аполлония состоят из двух неодинаковых частей: можно было бы даже говорить о чертеже геометрическом и чертеже алгебраическом.*

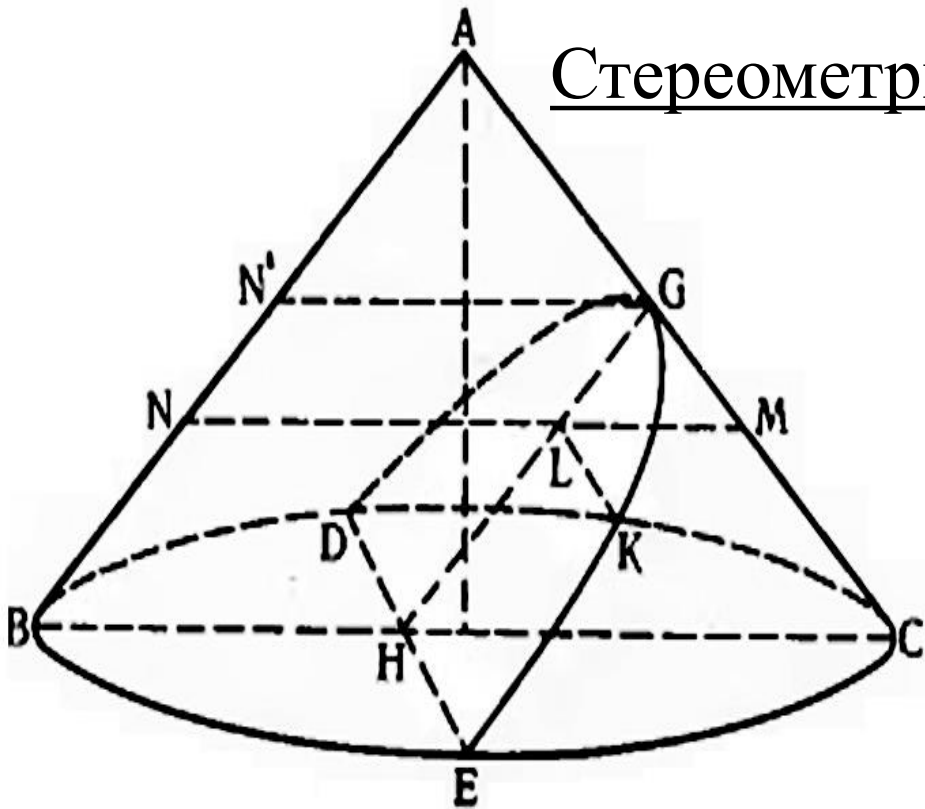
*К геометрическому чертежу относятся: коническое сечение, в котором, собственно говоря, и заключается вся суть, система косоугольных осей, абсцисса  $x$  и ордината  $y$ .*

*Алгебраический чертеж будет уже не косоугольным, а прямоугольным, он дает алгебраическое соотношение между  $a$ ,  $p$ ,  $x$  и  $y$ .*

*Площади, которые в данном случае прикладываются или отнимаются, соответствуют членам уравнения современной аналитической геометрии, а все алгебраические преобразования, которые мы производим над уравнением, доказываются у Аполлония геометрически.*

*При этом ход рассуждений является вполне алгебраическим, и он гораздо более современен, чем можно было бы заключить из запутанной геометрической формулировки».*

## Стереометрическое определение параболы



*«Если конус пересечен плоскостью по оси и пересечен другой плоскостью, которая пересекает основание конуса по прямой, перпендикулярной к основанию треугольника по оси, и если, кроме того, диаметр сечения параллелен той или другой из двух сторон треугольника по оси, **то всякая прямая,** которая проводится от сечения конуса параллельно общему сечению текущей*

*плоскости и основания конуса до диаметра, **взятая в квадрате,** будет **равна прямоугольнику,** заключенному прямо из диаметра, отрезанного от нее до вершины сечения, и некоторой другой прямой, которая имеет к прямой, взятой между углом конуса и вершиной сечения, такое отношение, какое квадрат основания треугольника по оси имеет к прямоугольнику, заключенному между остальными двумя сторонами треугольника. Такое сечение называется **параболой**».*

После стереометрического определения Аполлоний дает вывод симптомов, классифицируя полученные кривые по виду определяющего их уравнения – точка зрения, свойственная аналитической геометрии. В современных обозначениях: пусть  $a$  – длина диаметра,  $2p$  – длина параметра сечения, тогда

**парабола**

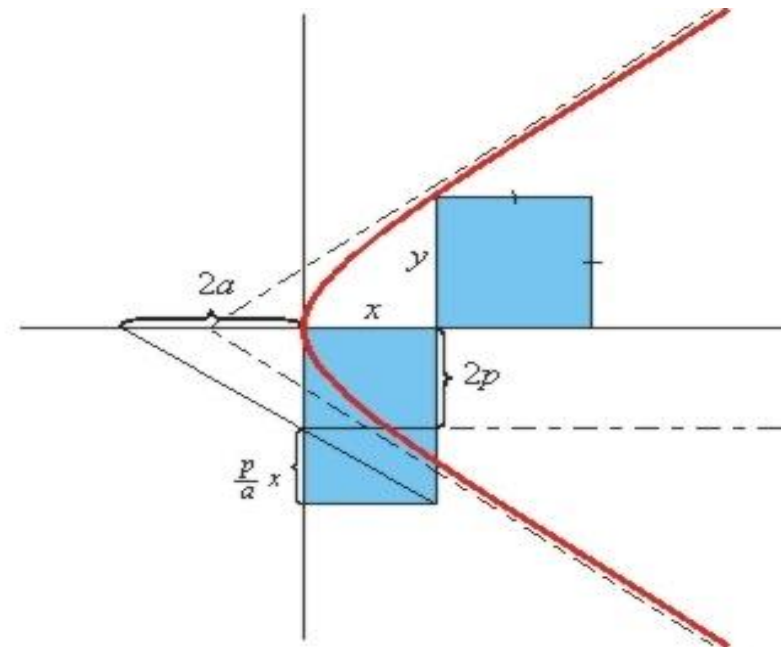
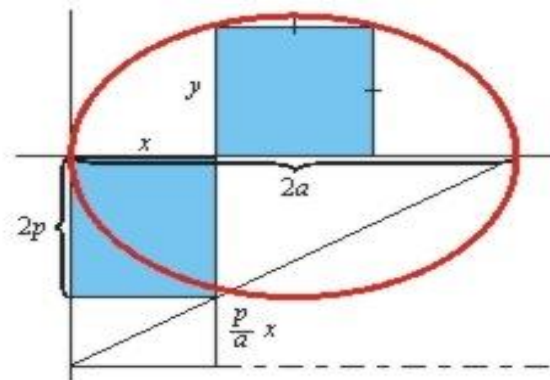
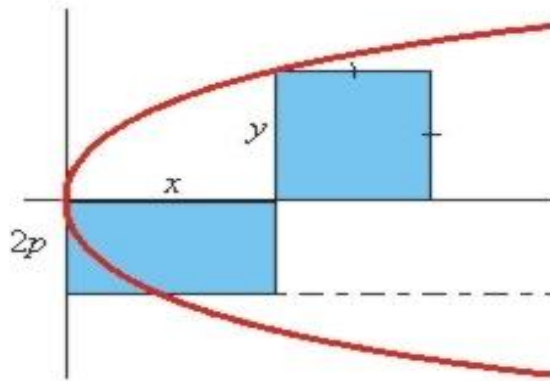
$$y^2 = 2px,$$

**эллипс**

$$y^2 = \frac{p}{a}x(2a - x),$$

**гипербола**

$$y^2 = \frac{p}{a}x(2a + x).$$





В последующих книгах Аполлоний переходит в другие системы координат, даже **косоугольные** (диаметр + касательная). Для обоснования законности предложенной алгебраической классификации кривых Аполлоний доказывает, что **вид уравнения не меняется** при выборе другого диаметра и сопряженной с ним хорды, т.е. **инвариантен** относительно преобразования системы координат. Эту мысль позже развил Ф. Клейн в «Эрлангенской программе» (1872 г.)

Также Аполлоний доказывает, что кривые Менехма – частный случай, когда диаметр перпендикулярен сопряженной хорде.

К сожалению, **методы исследования кривых**, созданные Аполлонием, в древности **не получили развития**, хотя вплоть до начала V в. н.э. его труды изучались и комментировались. Сами конические сечения применялись лишь для решения и исследования кубических уравнений. Геометрическая алгебра к этому времени стала сдерживать развитие математики.

К тому же –

*«Аполлоний виртуозно владеет геометрической алгеброй, но не менее виртуозно умеет скрывать свой первоначальный ход мыслей. Из-за этого-то его книгу и трудно понимать:*

*рассуждения его элегантны и кристально ясны, но что его привело именно к таким рассуждениям, а не к иным каким-нибудь, — об этом можно лишь догадываться.»*

**Б.Л. Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука.**

Методы Аполлония **намного опередили свое время**. Почти 2000 лет они оставались «чистой наукой», которую можно было бы назвать «оторванной от жизни». В них можно найти многочисленные прообразы более поздних достижений различных областей математики — алгебры, аналитической, проективной геометрии и местами даже дифференциальной геометрии.

**Возрождение** идей Аполлония наступило в **XVII в.** в работах Декарта, Ферма, Ньютона. Самое широкое применение теория конических сечений получила в механике и астрономии.

**Иоганн Кеплер** (1571–1630) установил, что планеты нашей солнечной системы движутся по **эллипсам**, в одном из фокусов которых находится Солнце.

**Галилео Галилей** (1564–1642) показал, что камень, брошенный наклонно к горизонту, летит по **параболе**, если не учитывать сопротивления воздуха.

В законе **Бойля-Мариотта** (1662, 1676), согласно которому давление газа обратно пропорционально его объёму при постоянной температуре, графиком этой зависимости является гиперболола.

Непосредственно опираясь на результаты Аполлония, в 80-х годах XVII в. **Исаак Ньютон** создал свои знаменитые “Математические начала натуральной философии”.

О дальнейшем возрастании их роли как в «чистой» науке, так и в приложениях нечего и говорить, но главное всё-таки — это та исключительно важная роль, которую они сыграли в XVII в. при возникновении современных точных наук.

Говоря о Кеплере, знаменитый ученый XX века А. Эйнштейн писал:

*“К восхищению перед этим замечательным человеком добавляется еще одно чувство восхищения и благоговения, но относящееся не к человеку, а **к загадочной гармонии природы**, в которой мы рождены.*

***Еще в древности люди придумали кривые, которые соответствуют простейшим законам. Наряду с прямой и окружностью среди них были эллипс и гипербола.***

*Последние мы видим реализованными в орбитах небесных тел, во всяком случае с хорошим приближением”.*