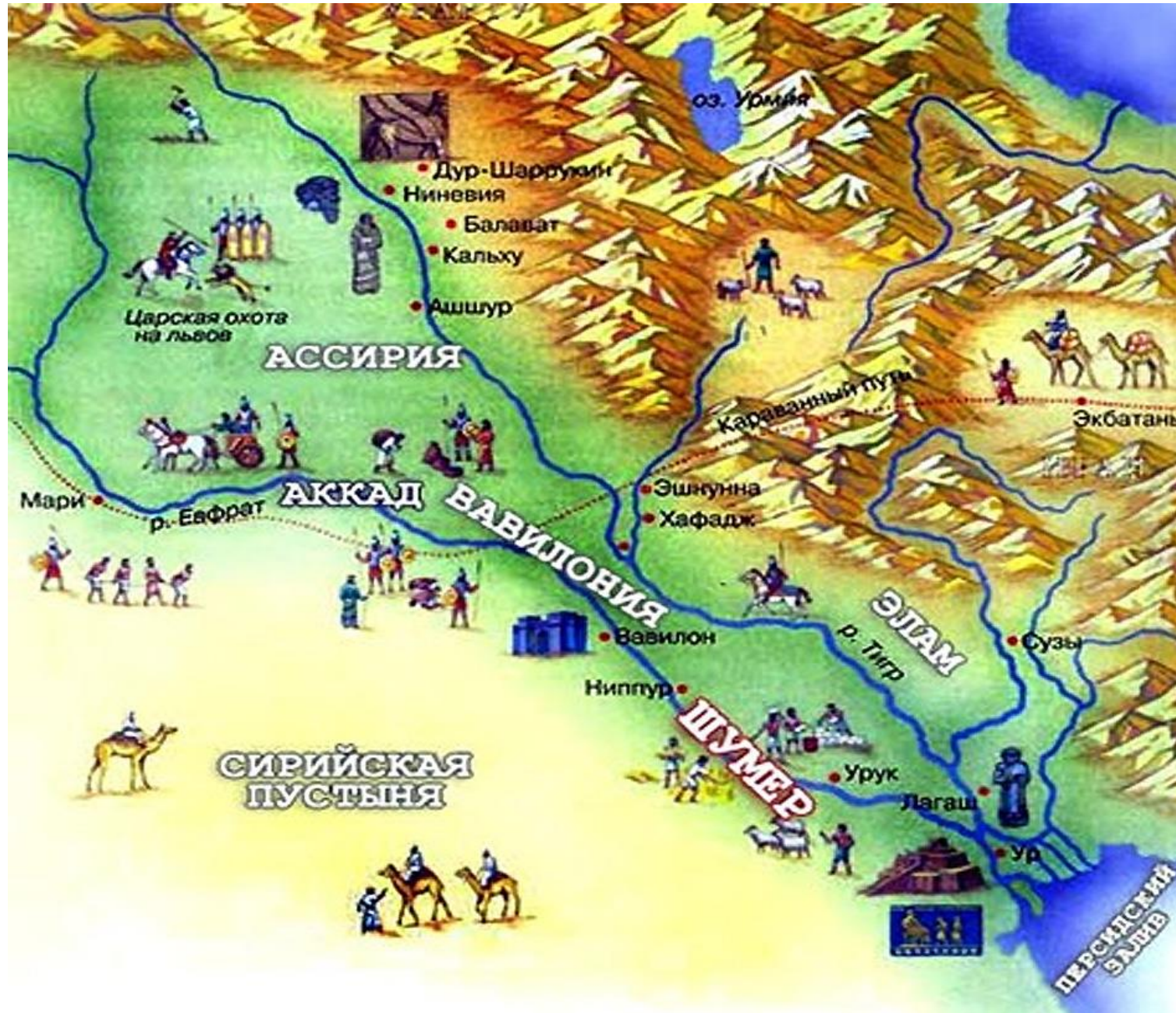


ДРЕВНИЙ ВАВИЛОН



Первоначально культура Древней Месопотамии возникла на берегу Персидского залива. Именно здесь, в дельте Тигра и Евфрата в IV тысячелетии до н.э. жили **шумеры**, построившие города **Ур**, **Урук** (под именем Эрех он упоминается в Библии), **Лагаш** и **Ларса**. Севернее жили семиты-аккадяне, главным городом которых был **Аккад**.

До середины III тысячелетия до н.э. каждый город с его окрестностями был отдельным государством и, естественно, что времена мира и времена войн чередовались.

Уже в середине IV тысячелетия до н.э. в Шумере была **письменность**. Ее памятники по возрасту старше всех других, дошедших до наших дней. Основным материалом для письма служили каменные, а затем глиняные плитки, на которых острым предметом выцарапывались надписи.

Шумеры – древний народ, некогда населявший территорию долины рек Тигра и Евфрата на юге современного государства Ирак (Южная Месопотамия или Южное Двуречье). На юге граница их обитания доходила до берегов Персидского залива, на севере – до широты современного Багдада.

На протяжении целого тысячелетия шумеры были главными действующими лицами на древнем Ближнем Востоке. **Шумерская астрономия и математика были точнейшими на всем Ближнем Востоке.** Мы до сих пор делим год на четыре сезона, двенадцать месяцев и двенадцать знаков зодиака, измеряем углы, минуты и секунды так, как это впервые стали делать шумеры. Идя на прием к врачу, мы все получаем рецепты лекарств или совет психотерапевта, совершенно не задумываясь о том, что и траволечение, и психотерапия впервые развились и достигли высокого уровня именно у шумеров. Получая повестку в суд и рассчитывая на справедливость судей, мы также ничего не знаем об основателях судопроизводства – шумерах, первые законодательные акты которых способствовали развитию правовых отношений во всех частях Древнего мира. Наконец, задумываясь о превратностях судьбы, сетуя на то, что при рождении нас обделили, мы повторяем те же самые слова, которые впервые занесли на глину философствующие шумерские писцы, – но вряд ли даже догадывается об этом.

Шумеры – "черноголовые". Этот народ, появившийся на юге Месопотамии неизвестно откуда, сейчас называют "прародителем современной цивилизации", а ведь **до середины 19-го века никто о нем даже не подозревал...**

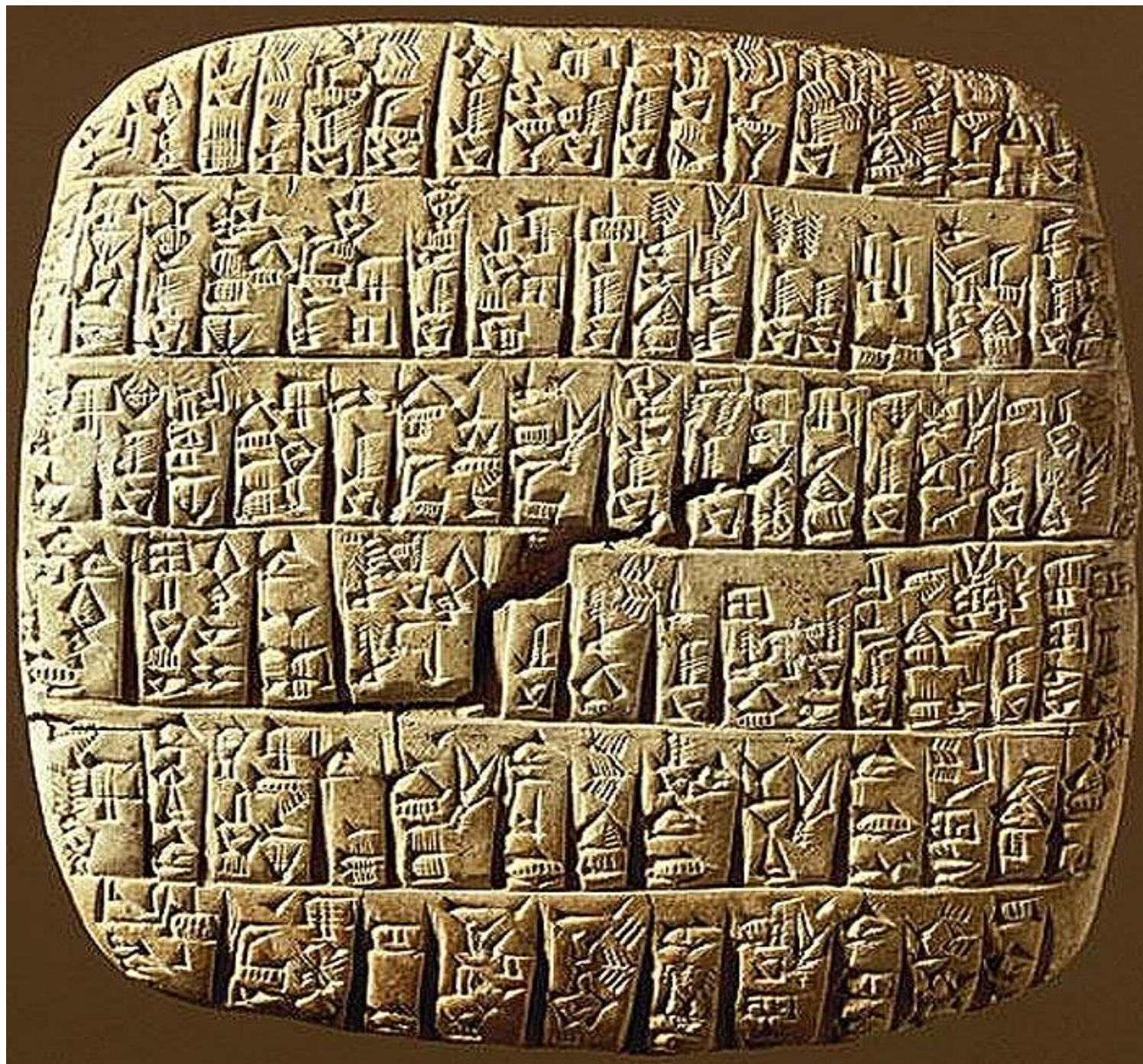


Клинописные глиняные таблички в огромных количествах стали поступать в Европу в результате археологических изысканий в середине XIX века.

Так, в 1849–50 гг. в развалинах древней ассирийской столицы Нина и Семирамиды – города Ниневии археолог Лейярд нашел дворцовую библиотеку, а в 1853 г. Хорзмунд Рассам открыл библиотеку Ашшурбанипала, ассирийского царя, правившего в VII в. до н.э. 20 000 табличек из этих раскопок хранятся сейчас в Британском музее в Лондоне. Всего же глиняных табличек в мире насчитывается около 500 000.

Математические таблички расшифровал и опубликовал впервые в 1935–37 гг. О. Нейгебауер – ученик Д. Гильберта.

V тыс. до н.э.



1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					

Знаки **первой колонки** принадлежат древнейшему периоду развития шумерского письма.

Вскоре после изобретения пиктографического письма шумерские писари сочли удобным разворачивать табличку таким образом, чтобы изображения оказывались в лежащем положении. По мере развития письма эта практика стала обычной, и знаки регулярно поворачивались на 90 градусов.

Вторая колонка таблицы дает пиктографические знаки в их повернутом положении.

Следующая колонка представляет "архаическое" начертание, бытовавшее примерно в 2500 г. до н. э. **Колонка 4** дает формы знаков примерно **1800 г. до н. э.** - так было написано большинство литературных документов.

Упрощенными формами, представленными в **последней колонке**, пользовались царские писцы Ассирии в **1-м тысячелетии до н. э.**

1 — изображение звезды. Соответствует преимущественно шумерскому слову *ан*, «небо». Тот же знак использовался для обозначения слова *дингир*, «бог».

2 — представляет слово *ки*, «земля». Очевидно, имелось в виду изображение земли, хотя трактовка знака до сих пор под сомнением.

3 — вероятно, стилизованное изображение верхней части человеческого тела. Представляет слово *лу*, «человек».

4 — изображение женского полового органа и слова *саль* с соответствующим значением. Тот же знак использовался для передачи слова *мунус*, «женщина».

5 — изображение горы. Соответствует слову *кур*, первое значение которого — «гора».

6 — иллюстрация обходного маневра, разработанного на ранних этапах изобретателями шумерской системы письма для случаев, когда можно было наглядно изобразить слова, для которых обычное пиктографическое изображение представляло определенную сложность.

Знак для слова *геме*, «рабыня», в действительности является комбинацией двух знаков — знака для *мунус*, «женщина» и знака для *кур*, «гора» (4 и 5 в нашей таблице). Таким образом, этот сложный знак буквально выражает идею «женщина гор». А так как своих рабынь шумеры приводили в основном из ближайших горных районов, то этот сложный знак адекватно выражал шумерское слово *геме*, «рабыня».

7 — изображение головы. Соответствует шумерскому слову *саг*, «голова».

8 — это также изображение головы. Вертикальные штрихи указывают на определенную часть головы, а именно рот. Таким образом, этот знак представляет шумерское слово *ка*, «рот». Тот же знак означает слово *дуг*, «говорить».

9 — вероятно, изображение котелка, служившего в первую очередь емкостью для пищи. Соответствует слову *нинда*, «пища».

10 — сложный знак, сочетающий знаки рта и пищи (8 и 9 в нашей таблице). Означает *ку*, «есть, кушать».

Как и в Египте, в Древнем Вавилоне **профессия писца была почетной:**

“Тот, кто в совершенстве владеет искусством писать на табличках, будет сверкать, подобно солнцу.”

Нередко сыновья правителей избирали эту профессию, ведь писцы относились к правящему классу.

Школа или академия, в которой обучались писцы, называлась **“Дом табличек”**.

“Писец должен уметь писать понятно, хорошо знать счет, уметь межевать земли, примирять спорящих”, – так писал один из учеников своему другу.

Математические **таблички**

1. Тексты-таблицы: таблицы умножения;
таблицы квадратов;
таблицы обратных чисел;
таблицы кубов;
таблицы квадратных корней;
таблицы сумм кубов и квадратов...

2. Тексты-задачники.

Система счисления – позиционная, шестидесятиричная, которая сочеталась с более ранней десятичной.

1	┐	11	┐┐	21	┐┐┐	31	┐┐┐┐	41	┐┐┐┐┐	51	┐┐┐┐┐┐
2	┐┐	12	┐┐┐	22	┐┐┐┐	32	┐┐┐┐┐	42	┐┐┐┐┐┐	52	┐┐┐┐┐┐┐
3	┐┐┐	13	┐┐┐┐	23	┐┐┐┐┐	33	┐┐┐┐┐┐	43	┐┐┐┐┐┐┐	53	┐┐┐┐┐┐┐┐
4	┐┐┐┐	14	┐┐┐┐┐	24	┐┐┐┐┐┐	34	┐┐┐┐┐┐┐	44	┐┐┐┐┐┐┐┐	54	┐┐┐┐┐┐┐┐┐
5	┐┐┐┐┐	15	┐┐┐┐┐┐	25	┐┐┐┐┐┐┐	35	┐┐┐┐┐┐┐┐	45	┐┐┐┐┐┐┐┐┐	55	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐
6	┐┐┐┐┐┐	16	┐┐┐┐┐┐┐	26	┐┐┐┐┐┐┐┐	36	┐┐┐┐┐┐┐┐┐	46	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐	56	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐
7	┐┐┐┐┐┐┐	17	┐┐┐┐┐┐┐┐	27	┐┐┐┐┐┐┐┐┐	37	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐	47	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐	57	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐
8	┐┐┐┐┐┐┐┐	18	┐┐┐┐┐┐┐┐┐	28	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐	38	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐	48	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐	58	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐
9	┐┐┐┐┐┐┐┐┐	19	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐	29	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐	39	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐	49	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐	59	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐
10	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐	20	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐	30	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐	40	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐	50	┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐┐		

Вавилонская клинопись





Такая система счисления позволяла вавилонянам записывать не только целые числа, но и дроби!

Но шестидесятиричные конечные дроби поле не образуют \Rightarrow **много приближений** – еще одна особенность вавилонской математики.

Арифметика древних вавилонян

1. Задачи на арифметические и геометрические прогрессии:
 - знали сумму первых членов арифметической прогрессии,
 - знания более развиты, чем у египтян.
2. Много задач на проценты.
3. Формула приближенного вычисления квадратного корня из числа

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2+r} \approx a+r/(2a).$$

Алгебра

1. Квадратные уравнения и системы, к ним сводящиеся:

Большое количество однотипных задач, которые можно назвать каноническими и записать в виде:

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ xy = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

$$ax^2 \pm bx = c.$$

Как правило, x – длина, y – ширина (всегда длина больше ширины), xy – площадь, иногда встречается глубина. Но несмотря на геометрические названия принципа однородности древних греков нет.

Зато существуют и более абстрактные названия неизвестных величин: «множимое» и «обратное к нему».

«Квадрат и сторона 0; 45»

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

1. Возьми 1.

2. Пополам 0;30.

3. $0;30 \times 0;30 = 0;15$.

4. $0;15 + 0;45 = 1$.

5. Что на что надо
умножить, чтобы
получить 1: 1.

6. $1 - 0;30 = 0;30$
– искомая сторона.

$$x^2 + px = q$$

p

$p/2$

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2} = x$$

«Множимое и обратное 2;30»

1. На 0;30 умножь: 1;15

2. 1;15 на 1;15 умножь:
1;33,45

3. 1 вычти отсюда

4. Что на что надо
умножить, чтобы 0;33,45
получить: 0;45

5. 0;45 к 1;15 прибавь: 2
– множимое

6. 0;45 от 1;15 вычти:
0;30 – обратное

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

$$(a/2)^2$$

$$(a/2)^2 - b$$

$$\sqrt{(a/2)^2 - b}$$

$$\frac{a}{2} + \sqrt{(a/2)^2 - b} = x$$

$$\frac{a}{2} - \sqrt{(a/2)^2 - b} = y$$

Мы видим последовательность решения квадратного уравнения, эквивалентного заданной системе. Никаких пояснений нет, но дается большое число однотипных задач.

Как получен алгоритм решения? Существуют различные гипотезы на этот счет. Одна из них:

Пусть множимое и обратное ему различны, тогда в качестве вспомогательной величины можно взять величину, на которую множимое и обратное отличаются

от половины их суммы:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + t \\ y = \frac{a}{2} - t \end{cases}$$

Тогда второе уравнение заданной системы дает простейшее квадратное уравнение

$$t^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b,$$

которое решается извлечением квадратного корня.

Анализ гипотезы позволяет сделать вывод, что вавилоняне:

- **знали подстановки;**
- **умели раскрывать скобки;**
- **знали формулу квадрата двучлена.**

(существуют примеры неканонических задач, подтверждающих это утверждение.)

Все только в числах \Rightarrow речь идет о **ЧИСЛОВОЙ** алгебре.

Как возникли квадратные уравнения?

\Rightarrow Обращение задач.

Встречаются несколько задач об объемах, которые **мы** могли бы свести к решению частного случая **кубического уравнения**, но утверждать, что вавилоняне именно это имели в виду, нельзя. Решалась конкретная задача без какого-либо теоретического объяснения.

2. Неопределенные уравнения

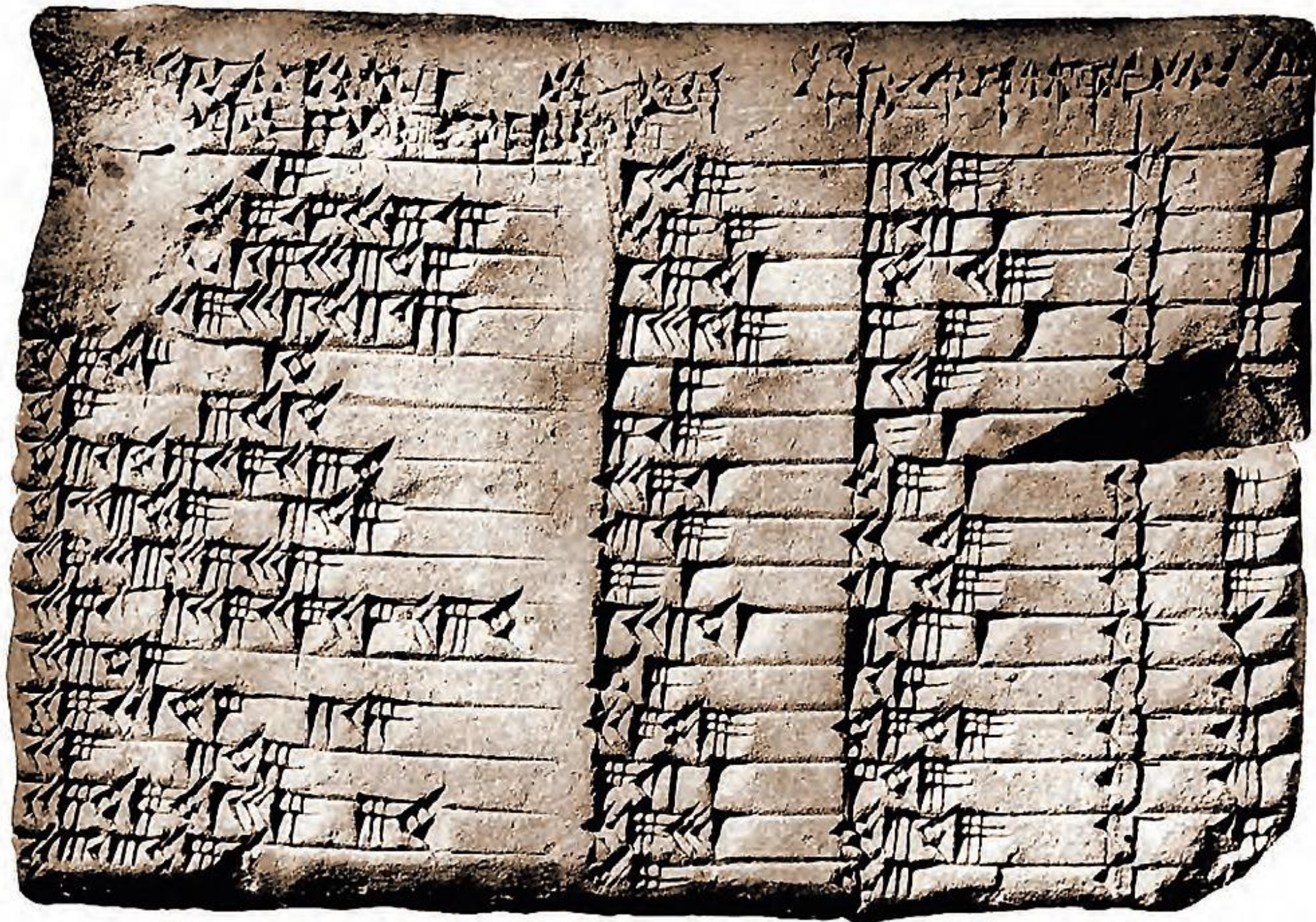
I. Самым древним и самым знаменитым примером неопределенного уравнения является уравнение, выражающее зависимость между сторонами прямоугольного треугольника:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Это утверждение всем известно как “теорема Пифагора”, хотя никаких доказательств, что именно Пифагор или кто-то из его учеников первым доказал его, нет.

Поскольку существует бесконечное множество прямоугольных треугольников, то существует и бесконечное число решений этого уравнения. Задача состоит в том, чтобы найти **все** целые (или рациональные) решения, которые позже были названы **пифагоровыми тройками**.

Плимптон 322



строка 11 →





В оригинале в таблице пять столбцов. В крайнем правом указан номер строки, во втором слева – меньший из катетов, в третьем – гипотенуза (оригинальное название столбца – *диагональ*), в первом (самое загадочное! зачем???) – **квадрат отношения гипотенузы ко второму катету** (косеканс??? в квадрате).

В 2017 австралийские исследователи Мансфилд и Уайлдбергер (в *Historia Mathematica*) выдвинули **гипотезу о** существовании в древнем Вавилоне своеобразной **тригонометрии**.

Египетский треугольник на предыдущем слайде и на следующем находится в строке 11 в виде (45; 75; 60).

На следующем слайде – изображения чисел с помощью арабских цифр в шестидесятеричной системе счисления, дополненные столбцом, содержащим величину второго катета.

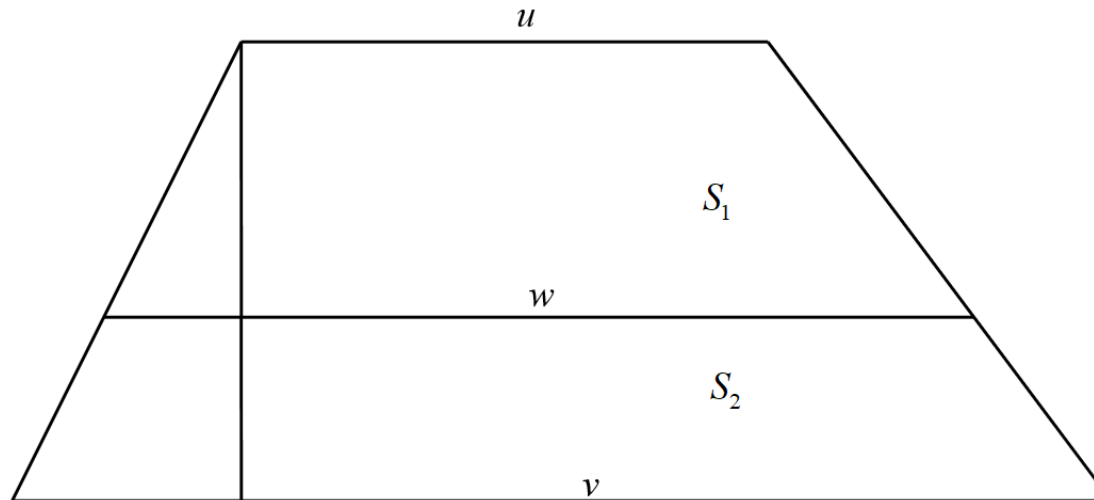
I.	II. <i>b</i>	III. <i>d</i>	IV.	<i>l</i>
(1) 59 00 15	1 59	2 49	1	2 00
(1) 56 56 58 14 50 06 15	56 07	3 12 1 [1 20 25]	2	57 36
(1) 55 07 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3	1 20 00
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4	3 45 00
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	5	1 12
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	6	6 00
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7	45 00
(1) 41 33 59 03 45	13 19	20 49	8	16 00
(1) 38 33 36 36	9 01 [8 01]	12 49	9	10
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10	1 48 00
(1) 33 45	45	1 15	11	1 00
(1) 29 21 54 02 15	27 59	48 49	12	40 00
(1) 27 00 03 45	7 12 1 [2 41]	4 49	13	4 00
(1) 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14	45 00
(1) 23 13 46 40	56	53 [1 46]	15	1 30

Номер строки	<i>l</i>	<i>b</i>	<i>d</i>
1	120	119	169
2	3456	3367	4825
3	4800	4601	6649
4	13500	12709	18541
5	72	65	97
6	360	319	481
7	2700	2291	3541
8	960	799	1249
9	600	481	769
10	6480	4961	8161
11	60	45	75
12	2400	1679	2929
13	240	161	289
14	2700	1771	3229
15	90	56	106

Это – современное изображение 15 пифагорейских троек, которые находятся в таблице. Считается, что вавилоняне знали 38 таких троек.

II. Задача, решения которой называются «**вавилонскими тройками**», также имеет геометрическую природу: расечь данную трапецию на две равновеликие части прямой, параллельной основаниям.

Обозначив параллельные отрезки через u , v и w , получим
$$u^2 + v^2 = 2w^2 .$$



Существует табличка, в которой рядом изображены пифагорейские и вавилонские тройки (след. слайд), следовательно, можно утверждать, что вавилоняне знали связь между ними.

3	4	5	7	1	5	\Rightarrow знали связь $\begin{cases} u = x + y \\ v = y - x \\ w = z \end{cases}$
5	12	13	17	7	13	
7	24	25	31	17	25	
...						

Более того, они умели, опираясь на одно решение вавилонского уравнения с помощью формулы (?!) композиции форм (?!!) находить два других!!!

Формула композиции форм

$$\begin{aligned}
 (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) &= (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 \\
 &= (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2.
 \end{aligned}$$

Геометрия

древних вавилонян развита меньше, чем алгебра.

1. Умели находить площади прямоугольника, треугольника, трапеции, произвольного четырехугольника (как и в Египте) + площади некоторых правильных многоугольников, сегмент круга. Для площади круга (приближение числа π) и длины окружности было простое выражение, где $\pi = 3$.
2. Для объема усеченной пирамиды использовалась как точная формула (есть и у Герона I в.н.э.), так и приближенная. Встречается изучение усеченного конуса.
3. В одной из задач $\pi = 25/8$ (т.е. 3,125).
4. Теорема Пифагора содержится в таблицах эпохи Хаммурапи (XVIII до н.э.)

Астрономические вычисления древних вавилонян

Вавилоняне первыми проводили систематические наблюдения звездного неба. Были найдены тысячи глиняных табличек, содержащих сотни астрономических терминов. В некоторых из этих табличек содержались математические формулы и астрономические таблицы, при помощи которых шумеры могли **предсказывать солнечные затмения, различные фазы Луны и траектории движения планет**. Изучение древней астрономии обнаружило замечательную точность этих таблиц (известных под названием *эфемерид*). Никто не знает, каким образом они были рассчитаны, но мы можем задаться вопросом — зачем это было нужно?

Шумеры измеряли восход и закат видимых планет и звезд относительно земного горизонта, пользуясь той же **гелиоцентрической системой**, которая применяется сейчас. Мы переняли от них деление небесной сферы на три сегмента — северный, центральный и южный.

В сущности, **все современные понятия сферической астрономии**, включая полную сферическую окружность в 360 градусов, зенит, горизонт, оси небесной сферы, полюса, эклиптику, равноденствие и пр., внезапно возникли в Шумере.

Познания шумеров относительно движения Солнца и Земли были объединены в первом в мире **солнечно-лунном календаре**, созданном в городе Ниппуре, начинавшемся в 3760 году до Р.Х.

Шумеры считали 12 лунных месяцев, составивших приблизительно 354 дня, а затем прибавляли еще 11 дополнительных дней, чтобы получить полный солнечный год. Эта процедура, называемая *интеркаляцией*, проделывалась ежегодно, пока (через 19 лет) солнечный и лунный календарь не совмещались. Удивительно то, что такая развитая астрономическая наука совсем не была необходима этому обществу.

Эти астрономические знания перешли впоследствии к грекам, а от них к европейским математикам, и использовались вплоть до XV–XVI вв., когда появились десятичные дроби, которые стали вытеснять шестидесятеричные.

Заключение.

Математика в древнем Вавилоне находилась на более **высоком уровне**, чем в древнем Египте. В ней существовали новые направления. Однако, так же как и египетской, математике вавилонян был присущ **догматический характер** изложения.

Была создана **позиционная система счисления**, и в результате **техника вычислений** вавилонян оказалась даже выше, чем у греков.

Была разработана **числовая алгебра** линейных и квадратных **уравнений** и рассмотрены первые неопределенные уравнения.

Тесная связь задач геометрии с алгеброй и теорией чисел.

Теорема Пифагора.