МАТЕМАТИКА В XX ВЕКЕ

Математические общества к концу XIX века:

1864 Московское математическое общество

1865 Лондонское математическое общество

1872 Французское математическое общество

1888 Нью-Йоркское

с 1894 г – Американское математическое общество

1891 Немецкое математическое общество

\+ стали выходить **математические журналы**.

Наибольшее влияние – Франция, Англия, Германия, Италия. В 1870 г. в примерно 100 журналах две трети всех статей написаны авторами из этих стран.

1893 – выставка в Чикаго, **первая попытка** создания международной организации – математический конгресс в рамках выставки: примерно 40 человек, несколько европейцев, в их числе Феликс Клейн + доклады.

1897 Цюрих

ПЕРВЫЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНГРЕСС

(по инициативе Г. Кантора)

Приглашено более 2000 человек, участвовало более 200.

Сейчас более 50 стран – члены Международного математического союза и на конгрессы приезжают **более 5000** участников; в 2018 – 28й конгресс в Рио-де-Жанейро.

29й конгресс проходил в режиме онлайн из Хельсинки с 7 по 14 июля 2022 г.

Пленарные заседания:

1. Единодушное признание теории множеств ***Кантор****а*.

2. А. ***Гурвиц*** (1859–1919). О развитии теории аналитических функций.

В. ***Вольтерра*** (1860–1940). Обзор работ.

3. Э. ***Шредер*** (1841–1902) О состоянии математической логики.

Дж. ***Пеано*** (1858–1932). О символике, на которой должна быть изложена математика.

4. А. ***Пуанкаре***. Об отношениях между чистым анализом и математической физике (зачитано).

5. Ф. ***Клейн***. О реорганизации высшего математического образования.

А. Пуанкаре (1854–1912):

«*Чистый математик, который забыл бы о существовании внешнего мира, был бы подобен живописцу, умеющему гармонически сочетать цвета и формы, но лишенному натуры, модели, – его творческая сила быстро иссякла бы».*

1898–1904 Издание большой

«**ЭНЦИКЛОПЕДИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**»

на немецком языке. И снова – **акцент на приложениях, несмотря на возрастающую абстрактность и общность математических понятий и методов**. Это – характерная черта математики конца XIX в.

Проект – международный: авторы – математики из разных стран.

С 1904 г. – перевод на французский язык и т.д., всякий раз статьи дополняются и углубляются.

1900, август. Париж.

ВТОРОЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНГРЕСС

226 участников из 26 стран. Председатель – А. Пуанкаре.

Секции:

1. Арифметики и алгебры
(председатель Д. Гильберт, секретарь Э. Картан).
2. Анализа
(председатель П. Пенлеве, секретарь Ж. Адамар).
3. Геометрии
(председатель Г. Дарбу, секретарь Б. Нивенгловский).
4. Механики и математической физики
(председатель Ж. Лармо, секретарь Т. Леви-Чивита).
5. Истории и библиографии
(председатель принц Ролан Бонапарт, секретарь М. Окань).
6. Преподавания и методологии
(председатель М. Кантор, секретарь Ш. Лезан).

Пленарные заседания:

1. *М.* ***Кантор***. Об историографии математики со времен Ж. Монтюкла и Г. Либри.

   В. ***Вольтерра***. Обзор творчества Э. Бетти, Ф. Бриоски и Ф. Казорати.

2. *Г.* ***Миттаг-Леффлер***. О последних годах К. Вейерштрасса по его письмам к С.В. Ковалевской.

   А. ***Пуанкаре***. О роли интуиции и логики в математике.

Свой знаменитый доклад «**Математические проблемы**» ***Гильберт*** прочитал 8 августа 1900 г. на совместном заседании секций «Истории и библиографии» и «Преподавания и методологии».

Д. Гильберт:

"Кто из нас не хотел бы приоткрыть завесу, за которой скрыто наше будущее, чтобы хоть одним взглядом проникнуть в предстоящие успехи нашего знания и тайны его развития в ближайшие столетия?

Каковы будут те особенные цели, которые поставят себе ведущие математические умы ближайшего поколения?

Какие новые методы и новые факты будут открыты в новом столетии на широком и богатом поле математической мысли?

Чтобы представить себе возможный характер развития математического знания в ближайшем будущем мы должны перебрать в нашем воображении вопросы, которые еще остаются открытыми, обозреть проблемы, которые ставит современная наука и решения которых мы ждем от будущего.

Такой обзор проблем кажется мне сегодня, на рубеже нового столетия, особенно своевременным. Ведь большие даты не только заставляют нас оглянуться на прошедшее, но и направляют нашу мысль в неизвестное будущее".

ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА

(в докладе названо 10, опубликовано 23)

1. **Проблема континуума**: сформулировать арифметически понятие континуума; существует ли кардинальное число между числом, соответствующим счетному множеству, и числом, соответствующим континууму? Можно ли рассматривать континуум как вполне упорядоченное множество?

Не может быть решена методами математической логики и одной общепринятой аксиоматической теорией множеств:

1936 Гедель – не может быть опровергнута;

1963 Коэн – не может быть доказана, т.к. представляет собой утверждение, независимое от системы аксиом Цермело-Френкеля.

2. **Непротиворечивость арифметики**.

1931 Гедель – не может быть доказана финитными средствами как настаивал Гильберт). С привлечением более сильных средств доказали в 1936 Г. Генцен, в 1943 П.С. Новиков.

3. Проблема существования **неравносоставленных тетраэдров** с равными основаниями и высотами. *Решена в 1901 М. Деном. Тем самым доказана невозможность построения стереометрии без применения инфинитезимальных методов.*

4. Определение всех **проективных метрик**. *Решена в 1903 Г. Гамелем.*

5. (*современная формулировка*) Доказать, что всякая **связная локально-евклидова топологическая группа топологически изоморфна некоторой группе Ли**. *Занимались Дж. Фон Нейман 1933), Л.С. Понтрягин 1936), К. Шевалле 1941), А.И. Мальцев 1946). Окончательно – 1952 А. Глисон, Д. Монтгомери и Л. Циппин.*

6. **Аксиоматизация физики и теории вероятностей**. *А.Н. Колмогоров предложил современную аксиоматику теории вероятностей в 1933.*

7. Выяснение **природы чисел вида** $\boldsymbol{\alpha^{\beta}}$ при алгебраическом $\alpha \neq 0,1$ и алгебраическом и иррациональном β. *В 1934 А.О. Гельфонд и Т. Шнейдер доказали трансцендентность чисел такого вида.*

8. Совокупность задач теории простых чисел. ***Проблема нулей дзета-функции Римана, проблема Гольдбаха и проблема Эйлера, проблема близнецов*** до конца до сих пор не решены. *Успехи: 1914 Г. Харди, 1930 Л.Г. Шнирельман, 1937 И.М. Виноградов, 1941 А. Вейль.*

9. **Общий закон взаимности**. *Решена в 1948 И.Р. Шафаревичем до него – Э. Артин, Г. Хассе и др.).*

10. Алгоритмическая **разрешимость диофантовых уравнений** произвольных степеней с любым числом неизвестных. *Решена в 1970 Ю.В. Матиясевичем, показавшим, что не существует алгоритма для определения, существует или нет целочисленное решение полиномиального диофантова уравнения.*

11. Построение **теории квадратичных форм с любым числом переменных** и коэффициентами из произвольного поля алгебраических чисел. *Решена в 1924 Г. Хассе.*

12. **Обобщение теоремы Кронекера-Вебера** на произвольные поля алгебраических чисел. *Окончательное решение в 1961 Г. Шимура и Т. Танияма.*

13. Гипотеза о **невозможности решения алгебраического уравнения 7й степени** в общем случае **посредством суперпозиции непрерывных функций только двух переменных**. *Опровергнута в 1956–57 гг. в работах А.Н. Колмогорова и В.И. Арнольда.*

14. Доказательство **теоремы конечности в теории инвариантов для произвольных алгебраических групп**. *Результаты в этом направлении для различных групп получены Г. Вейлем 1939), М. Нагатой 1964) и В. Хабушем 1975). В общем случае контрпример М. Нагаты 1959) гипотеза неверна.*

15. Обоснование "**исчислительной геометрии**" Г. Шуберта. *В 1930 Б.Л. Ван дер Варден предложил для исчисления над полем комплексных чисел.*

16. Совокупность двух задач.

Первая – **о топологии алгебраических кривых и поверхностей**. *Гильберт высказал гипотезу о взаимном расположении ветвей плоской алгебраической кривой шестого порядка. Вопрос о топологии таких кривых был изучен И.Г. Петровским (1933, 1938). В 1969 Д.А. Гудков опроверг эту гипотезу (построил контрпример). Вопрос о расположении алгебраических поверхностей четвертой степени в трехмерном вещественном пространстве был изучен В.М. Харламовым (1976, 1978, 1984) и В.В. Никулиным (1979).*

Вторая – **о числе предельных циклов дифференциального уравнения** $dy/dx = P(x,y)/Q(x,y)$, где в числителе и знаменателе – многочлены степени n от двух переменных. *До сих пор не решена*.

17. **О представимости рациональной функции** от *n* переменных с рациональными коэффициентами, неотрицательной во всех вещественных точках, **суммой квадратов** рациональных функций с рациональными коэффициентами. *Решена в 1927 Э. Артиным.*

18. **Три** задачи по **теории дискретных групп движений** евклидовых пространств:

– о числе кристаллографических групп в $\boldsymbol{R^n}$. *Решена в 1910 Л. Бибербахом, доказавшим конечность числа таких групп.*

– могут ли полиэдры любого наперед заданного разбиения пространства $\boldsymbol{R^n}$ служить фундаментальными областями некоторой группы движений. *В 1928 К. Рейнгардт дал отрицательный ответ.*

– о плотнейшей упаковке шаров в $\boldsymbol{R^3}$. *1998 T. Hales ???*

19. **Допускает** ли каждое **дифференциальное уравнение Лагранжа в частных производных для** регулярных **вариационных задач** только **аналитические интегралы**, даже если, как в случае задачи Дирихле, граничные значения непрерывные, но не аналитические?

20. Всякая ли регулярная **вариационная задача имеет решение при заданных граничных условиях**?

19-я и 20я проблемы определили основное направление развития ***теории квазилинейных эллиптических дифференциальных уравнений*** *в XX веке. Ее развитием занимались Д. Гильберт и его ученики: Э. Хопф, Л. Ниренберг, Ч. Морри, советские математики С.Н. Бернштейн (первые успехи), И.Г. Петровский, О.А. Ладыженская и др., итальянские математики Л. Тонелли, Э. Де Джорджи, Э. Джусти, М. Миранда и др.*

21. О существовании **системы линейных дифференциальных уравнений с заданной группой монодромии**.

Долгое время считалось, что решение существует (1908 И. Племель, 1913 Г. Биркгоф), но в 1990 А.А. Болибрух построил контрпример.

22. Проблема **униформизации аналитических отношений** посредством автоморфных функций. *Для одномерных комплексных многообразий в 1907 независимо друг от друга П. Кёбе и А. Пуанкаре.*

23. **Развитие методов вариационного исчисления**. *Решение составило содержание целой математической дисциплины.*

На подавляющее большинство получены убедительные ответы, не всегда, правда, те, что предполагал Гильберт (**1,2**).

В ряде случаев (**10, 13, 14, 16, 21**) гипотезы Гильберта не подтвердились.

Без ответа остались вопросы из **8, 16, 18**.

Не все проблемы равноценны и различаются по степени конкретности. Тем не менее, большинство из них – на магистральных путях развития математики. В этом проявилась *<u>гениальность Гильберта</u>*, сила его интуиции, но также и *<u>особенность исторического момента</u>*, т.к. на конец XIX в. приходился отрезок гладкости кривой развития математики и ее дальнейшее развитие можно было предвидеть.

Гильбертовская программа развития математики стала давать сбои в 70е годы XX в., когда в развитии науки произошел крутой поворот и в математику решительно вторгся внешний мир со своими проблемами (физика, информатика и т.д.).

Выдающуюся роль **в математике первой половины XX в.** сыграли:

1) функциональный анализ;

2) топология;

3) теория функций (теория меры).

Международный математический союз

ММС был основан в 1920 г., но распался в сентябре 1932 г., а затем был восстановлен в 1952 г. Были избраны Исполнительный комитет, Президент, учреждены различные комиссии.

Каждые 4 года под эгидой Союза собирается Международный конгресс математиков.

Союз участвует также в отборе кандидатов на Абелевскую премию, Филдсовскую премию, премию Р. Неванлинны (медаль абака).

В составе Союза активно действует Международная комиссия по математическому образованию.

Национальный комитет математиков РФ.

Заседание Московского математического общества (1967 г.)

Первые Международные конгрессы математиков

Первый конгресс Цюрих, 1897

Второй конгресс Париж, 1900

Третий конгресс Гейдельберг, 1904

Четвёртый конгресс Рим, 1908

Пятый конгресс Кембридж, 1912

Конгресс 1920 г. Страсбург

Конгресс 1924 г. Торонто

Конгресс 1928 г. Болонья

Конгресс 1932 г. Цюрих

Конгресс 1936 г. Осло

Конгресс 1950 г. Кембридж (Массачусетс)

Конгресс 1954 г. Амстердам

Конгресс 1958 г. Эдинбург

Конгресс 1962 г. Стокгольм

Конгресс 1966 г. Москва

ДЕЙСТВУЮЩИЕ ЛИЦА

1. **Немецкая математическая школа**

В 1895 г. в Геттинген по приглашению Ф. Клейна (1845–1929) приехал **Давид** **ГИЛЬБЕРТ** (1862–1943).

1892 г. – 90 студентов-математиков,

1914 г. – более 800 + несколько исследовательских институтов по физике, прикладной математике и механике, электротехнологии и геофизике

$\Rightarrow$ интеграция чистой и прикладной математики.

В 1904 г. прибыли **К. Рунге** и **Л. Прандтль**.

Давид Гильберт (1862–1943)

Родился в Велау (близ Кёнигсберга)

1884 – окончил Кёнигсбергский ун-т

1893 – профессор Кёнигсбергского ун-та

1895 –1943 – профессор Гёттингенского университета

1885 –1893 – теория инвариантов

1893 –1898 – алгебраическая геометрия

1898 –1902 – основания геометрии

1904 –1910 – теория интегральных уравнений

1909 – решение проблемы Варинга

1910 –1922 – математическая физика

1922 –1930 – математическая логика и основания математики

Между 1895 и 1914 у Гильберта было более 60 докторантов (курсы, семинары, чаепития, еженедельные прогулки и т.п.) $\Rightarrow$ **<u>школа Гильберта</u>**:

Герман Вейль, преемник Гильберта (с 1930 по 1933),

Арнольд Зоммерфельд,

Константин Каратеодори,

Макс Борн,

Рихард Курант,

Эмми Нетер,

Бартель ван дер Варден,

Эрнст Цермело,

Герман Минковски,

Феликс Хаусдорф и др.

2. **Франция**

Анри Пуанкаре	(1854–1912)
Жак Адамар	(1865–1963)
Эмиль Борель	(1871–1956)
Гастон Дарбу	(1841–1917)
Эли Картан	(1869–1951)
Анри Лебег	(1875–1941)
Эмиль Пикар	(1856–1941)
Поль Леви	(1886–1971)

Эти математики не основали школ и не имели в математических институтах веса, сопоставимого с их математическими талантами.

После Первой мировой войны – смена поколений:

Никола БУРБАКИ

1935 (июль) – пленарное заседание об основании:

Никола БУРБАКИ

Анри Картан
Андре Вейль
Жан Дьедонне
Клод Шевальи
Жан Дельсарт
Жан Куломб
Шарль Эресманн
Шолем Мандельбройт
Рене де Поссель

позже –
Пьер Самюэль
Жан-Пьер Серре
Лоран Шварц
Адриен Дуади
Александр Гротендик
Роже Годеман и др.

Тайное общество.

Возраст – не старше 50 лет.

Объединились в желании **перестроить всю математику на аксиоматической основе**;

Фундамент – теория множеств.

Первый этаж – упорядоченные структуры, алгебра, общая топология, теория меры.

Второй этаж – смешиваются алгебраические и геометрические структуры с топологией, порядком и т.п.

Попытка не завершена, но создан общий язык!

Расцвет – 1950-60е гг.

«Довольно быстро были определены:

*– главная цель трактата: «**дать прочные основания всей современной математики в целом**»;*

*– общие принципы: **единство и полная формализация математики на основе теории множеств**; систематичность; догматизм и самодостаточность; изложение всегда идущее от общего к частному; ключевая роль понятия «структуры»;*

*– общее название всего трактата (**Начала математики**, как у Евклида);*

– оглавление и список ключевых понятий;

– структура трактата, название томов и выпусков.»

Из статьи А.Б. Сосинского «Умер ли Никола Бурбаки?»

Уже **в 1939** в издательстве «Эрманн» стали появляться **первые выпуски**. В годы Второй мировой войны работа не прекращалась.

Первые же послевоенные годы ознаменовались небывалым (а для бурбакистов совсем неожиданным) издательским успехом «***Начал».*** Пошли переводы на основные языки мира, а полунищее и полушутливое «секретное общество» вдруг оказалось всемирно знаменитым и (в меру) богатым.

Сейчас «***Начала***» Бурбаки публикует Шпрингер-Ферлаг: в 2016 г. вышел новый том «Алгебраическая топология»; в 2012 г. – новое издание «Алгебры» (том 8).

Семинар Бурбаки заседает 4 раза в год в Институте математики им. А. Пуанкаре в Париже.

Семейства Канторов, Гильбертов, Нётеров; семейства Картанов, Шевалле, Дьёдонне, Вейлей; семейства Брюа, Диксмье, Самюэлей, Шварцев; семейства Картье, Гротендиков, Мальгранжей, Серров; семейства Демазюров, Дуади, Жиро, Вердье; семейства, фильтрующиеся вправо, семейства точных эпиморфизмов, мадемуазель Адель и мадемуазель Идель с прискорбием сообщают Вам о смерти мсьё ***Николя Бурбаки****, их отца, брата, сына, внука, правнука и кузена соответственно,* ***скончавшегося*** *11 ноября* ***1968*** *в годовщину Победы в Первой мировой войне в своём доме в Нанкаго.*

Кремация состоится в субботу, ***23 ноября 1968*** *в 15 часов на «Кладбище случайных величин», станции метро Марков и Гёдель. Сбор состоится перед баром «У прямых произведений», перекрёсток проективных резольвент, бывшая площадь Кошюля.*

Согласно воле покойного месса состоится в соборе «Богоматери универсальных конструкций», месса будет проведена кардиналом Алефом 1 в присутствии представителей всех классов эквивалентностей и алгебраически замкнутых тел. За минутой молчания будут наблюдать ученики Высшей нормальной школы и классов Чэня.

Поскольку Бог есть компактификация Александрова для Вселенной .

— Евангелие от Гротендика, IV,22

3. Италия	Вито Вольтерра	(1860–1940)
	Туллио Леви-Чивита	(1873–1941)
4. Англия	Готфри Харольд Харди	(1877–1947)
	Джон Литтлвуд	(1885–1977)
	Бертран Рассел	(1872–1970)
5. США	Освальд Веблен	(1880–1960)
	Джордж Дэвид Биркгоф	(1884–1947)
	Соломон Лефшец	(1884–1972)
	Джеймс Уэндалл Александер	(1888–1971)

6. Русские и советские математики.

7. Шведская математическая школа:

	Магнус Густав Миттаг-Лефлер	(1846–1927)
	Эрик Ивар Фредгольм	(1866–1927)