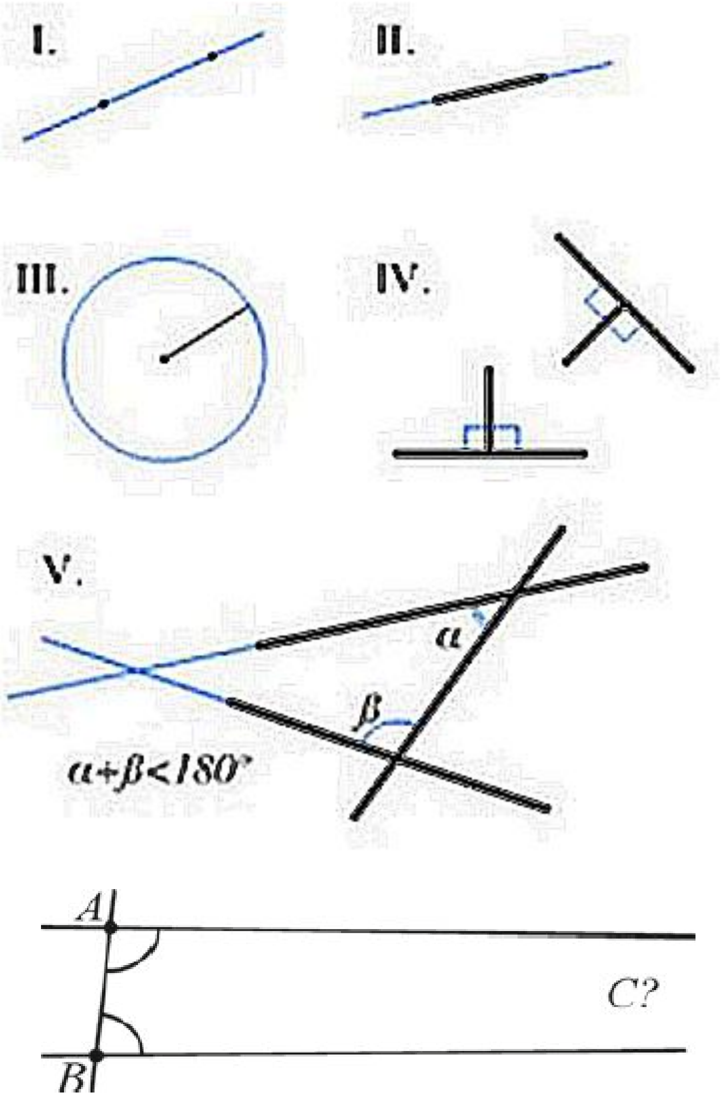
Неевклидова геометрия

АКСИОМЫ В "НАЧАЛАХ" ЕВКЛИДА

1. Две величины, порознь равные третьей, равны между собой.
2. Если к равным прибавить равные, то суммы будут равны.
3. Если от равных отнять равные, то разности будут равны.
4. Если величины могут быть совмещены, то они равны.
5. Целое больше своей части.



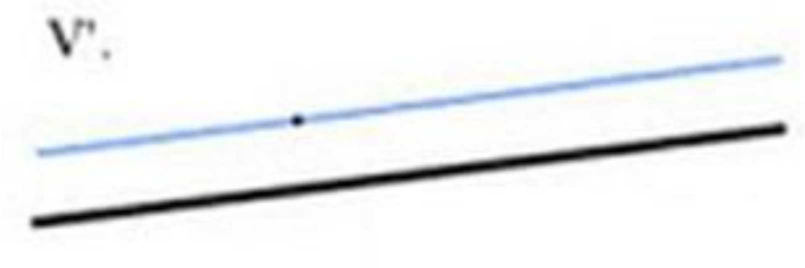
ПОСТУЛАТЫ ЕВКЛИДА

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра всяким раствором может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. **Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.**

РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ V ПОСТУЛАТА

Прокл (V в. н.э.)

Через точку, лежащую вне прямой, в плоскости, определенной этой точкой и этой прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающую заданной.



Плейфер (1748–1819)

Через точку С, лежащую вне прямой АВ, в плоскости АВС проходит единственная прямая, не встречающая АВ.

А.М. Лежандр (1752–1833)

Перпендикуляр и наклонная к общей секущей (в одной плоскости) необходимо встречаются.

Незнакомые формулировки постулата о параллельных

Ал-Джаухари (IX в.)

Теорема: Через точку внутри угла можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла.

Дж. Валлис (1616–1703)

Существует два подобных, но не равных, треугольника.

Johann Friedrich Lorenz (1737–1807)

Всякая прямая, проходящая через точку внутри угла, пересекает по крайней мере одну его сторону.

Фаркаш Бойяи (1775–1856)

Через всякие три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность.

М.В. Остроградский (1801–1862)

Если l параллельна l' и l' параллельна l'', то и l параллельна l''.

Постулат о параллельных носит совершенно своеобразный характер:

– он сложнее других и требует ряд сведений;

– применяется достаточно поздно и расщепляет геометрию на две части: абсолютную геометрию и собственно евклидову геометрию.

Возникло два направления исследований:

– заменить более простой формулировкой;

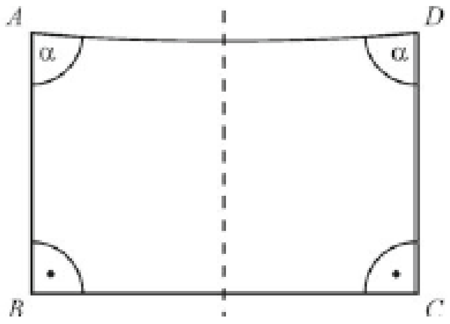
– вывести из предыдущих

(Архимед, Птолемей, ал-Джаухари, Сабит ибн Корра, ибн ал-Хайсам, Омар Хайям, Насир ад-Дин ат-Туси, ал-Магриби, аш-Ширази и др.).

Теория параллельных в странах арабского Востока.

Доказательство **ал-Джаухари**, ученика ал-Хорезми (IX век), неявно подразумевало: если при пересечении двух прямых какой-либо третьей накрест-лежащие углы равны, то то же имеет место при пересечении тех же двух прямых любой другой. И это допущение равносильно V постулату.

Сабит ибн Курра (IX век) дал два доказательства. В первом он опирается на предположение: если две прямые удаляются друг от друга с одной стороны, они обязательно приближаются с другой стороны, и в этом рассмотрении у него впервые в математике появляется четырехугольник Саккери. Во втором он исходит из существования равноотстоящих прямых, причём этот факт ибн Курра пытается вывести из



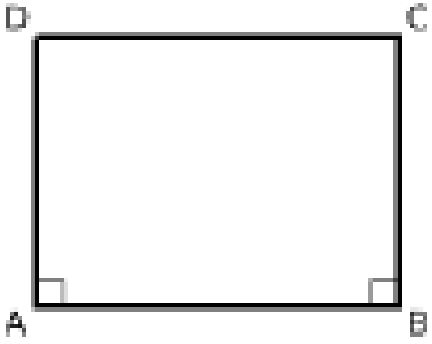
представления о «простом движении», т. е. о равномерном движении на фиксированном расстоянии от прямой (ему представляется очевидным, что траектория такого движения – тоже прямая). Каждое из двух упомянутых утверждений Ибн Курры равносильно V постулату.

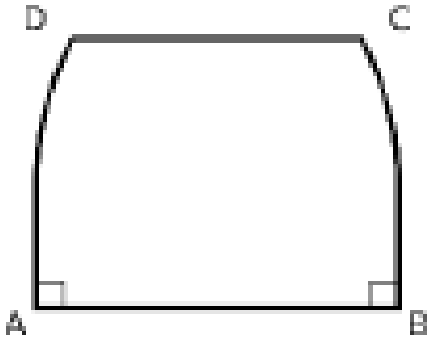
Аналогичную ошибку сделал **ибн ал-Хайсам.** Он впервые рассмотрел четырёхугольник Ламберта и сформулировал три возможных варианта для четвёртого угла: острый, прямой, тупой.

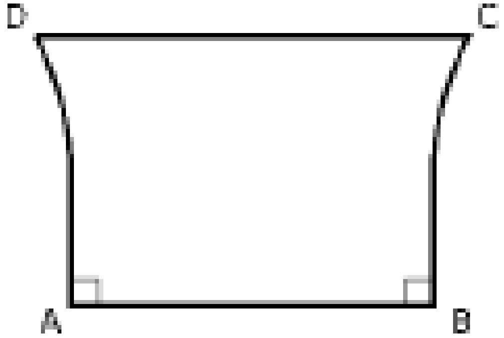
Поэт и математик **Омар Хайям** подверг критике попытки ввести в геометрию механическое движение. Он предложил заменить V постулат на другой, более простой: две сходящиеся прямые пересекаются, и невозможно, чтобы две сходящиеся прямые расходились в направлении схождения. Каждая из двух частей этого утверждения равносильна постулату Евклида.

Ал-Абхари предложил доказательство, сходное с доказательством ал-Джаухари. Это доказательство приводит в своей книге ас-Самарканди, и поэтому ряд исследователей считал автором самого ас-Самарканди. Доказательство исходит из верного в абсолютной геометрии утверждения о том, что для всякой прямой, пересекающей стороны данного угла, может быть построена ещё одна прямая, пересекающая стороны этого же угла и отстоящая от его вершины дальше, чем первая. Но из этого утверждения автор делает логически необоснованный вывод о том, что через всякую точку внутри данного угла можно провести прямую, пересекающую обе стороны этого угла, – и основывает на этом последнем утверждении, равносильном V постулату, всё дальнейшее доказательство.

Насир ад-Дин ат-Туси предложил построение, аналогичное построению Омара Хайяма. Отметим, что сочинения ат-Туси стали известны Джону Валлису, и тем самым сыграли роль в развёртывании исследований по неевклидовой геометрии в Европе.







Иероним САККЕРИ (1667–1733)

1733 *«Евклид, освобожденный от всех пятен, или опыт, устанавливающий самые первые принципы универсальной геометрии»*

«…Гипотеза острого угла совершенно ложна, ибо противоречит природе прямой линии.

… На этом я мог бы спокойно остановиться, но я не хочу отказаться от попытки доказать, что эта упорная гипотеза острого угла, которую я вырвал уже с корнем, противоречит самой себе».

Георг Симон **КЛЮГЕЛЬ** (1739–1812)

1763 Диссертация, в которой сделан историко-критический обзор около тридцати известных ему попыток доказательства пятого постулата.

На основании этого исследования Клюгель делает вывод: ***доказать пятый постулат*** только с помощью других аксиом и постулатов «Начал» Евклида ***невозможно***.

Иоганн Генрих ЛАМБЕРТ (1728–1777)

1766 (оп. 1786) "*ТЕОРИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ*"

«Я склонен даже думать, что ***третья гипотеза справедлива на какой-нибудь мнимой сфере****. Должна же быть причина, по которой она на плоскости далеко не поддается опровержению, как это может быть легко сделано со второй гипотезой…*

Доказательства евклидова постулата могут быть доведены столь далеко, что остается, по-видимому, ничтожная мелочь. Но при тщательном анализе оказывается, что в этой кажущейся мелочи и заключается вся суть вопроса; обыкновенно она содержит либо доказываемое предложение, либо равносильный ему постулат...

В этом есть нечто восхитительное, что вызывает даже желание, чтобы третья гипотеза была справедлива!

И все же я желал бы, несмотря на это преимущество, чтобы это было не так, потому что это было бы сопряжено с целым рядом других неудобств. ***Тригонометрические таблицы стали бы бесконечно пространными; подобие и пропорциональность фигур не существовали бы вовсе****; ни одна фигура не могла бы быть представлена иначе, как в абсолютной своей величине, и астрономии пришлось бы плохо».*

XIX век – **СОЗДАНИЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ**.

До этого трехмерная евклидова геометрия была исключительно ***прикладной*** наукой. Ее теоремы, леммы и следствия суть идеальные отражения реальных свойств и поэтому верны.

И. **Кант**: *«Пространство абсолютно, и его идея вложена в наше сознание ДО всякого опыта»*.

Первым, кто признал за неевклидовой геометрией право представлять физическое пространство в той же мере, что и евклидова геометрия, был

Карл Фридрих ГАУСС (1777–1855).

Из переписки с Шумахером (от 26.11.1846, след. слайд):

– интересовался с 15 лет (с 1792);

– уже в 1813 разработал эту «странную геометрию, совсем отличную от нашей, но совершенно последовательную в себе самой». **Ничего не публиковал**.

Из письма Гаусса к Шумахеру от 26 ноября 1846 г.

«Недавно я имел случай вновь просмотреть книжку Лобачевского… ***Она содержит основы той геометрии, которая должна бы иметь место и была бы строго последовательной, если бы евклидова геометрия не была истинной…***

Вы знаете, что ***я уже 54 года*** *(****с 1792 г****. – Г.С.)* ***имею то же убеждение*** *(с некоторым позднейшим расширением, на котором не хочу здесь останавливаться);* ***по материалу я*** *таким образом* ***в сочинении Лобачевского не нашел для себя ничего нового; но в его развитии автор следует другому пути, отличному от того, которым я шел сам; оно выполнено Лобачевским с мастерством, в чисто геометрическом духе.*** *Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на эту книгу, которая наверное доставит Вам совершенно исключительное наслаждение».*

В январе 1829 Гаусс писал Бесселю:

«Вероятно, я еще не скоро смогу обработать свои пространные исследования по этому вопросу, чтобы их можно было опубликовать. Возможно даже что я не решусь на это во всю свою жизнь, потому что ***я боюсь крика беотийцев****, который поднимется, когда я выскажу свои воззрения целиком».*

Лобачевский в это время уже публикует свой первый мемуар «О началах геометрии».

Сохранились наброски исследований Гаусса – незначительные по сравнению с творениями Лобачевского.

Янош Бойяи (**Больяи**, *Иоанн Больэ*):

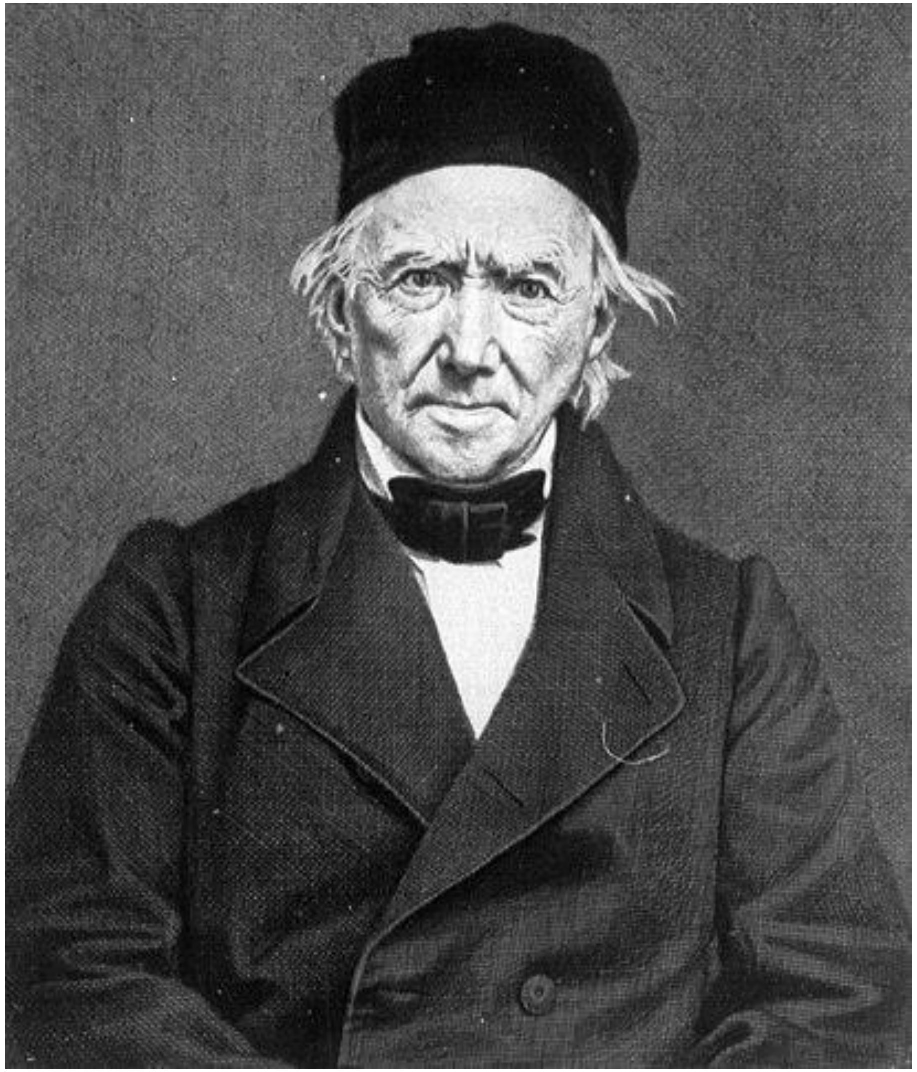
«Для идей, как и для растений, наступает определенная пора, когда они созревают, и в такое время они одновременно появляются в различных местах подобно тому, как фиалки весной произрастают всюду, где светит солнце».

Возможно первый человек признавший возможность отсутствия противоречия в неевклидовой геометрии –

Кристиан Людвиг ГЕРЛИНГ (1788–1864) – бывший ученик и друг Гаусса.

В **1816** г., перерабатывая учебник математики Лоренца (1761), встретил препятствия в изложении учения о параллельных линиях и написал об этом и своих мыслях Гауссу.

В ответ: «…***осы, гнездо которых Вы разрушаете, подымутся над Вашей головой***».



Письмо-ответ Гаусса – первое дошедшее до нас письмо с подобным утверждением. В письме подразумевается, что идею непротиворечивости неевклидовой геометрии высказал сам Герлинг.

Фердинанд Карл **ШВЕЙКАРТ**
(1780–1857)

профессор юриспруденции; работал в Марбурге, Кенигсберге.

В 1812–16 гг. работал в Харьковском университете, читал работы С.Е. Гурьева по неевклидовой геометрии.

Вернувшись в Марбург, написал заметку (**1817**) о существовании двух геометрий – геометрии Евклида и **астральной** геометрии.

Получил хороший отзыв Гаусса, но сам недостаточно хорошо владел математикой, чтобы развить учение дальше.

С **1824** г. **Франц Адольф ТАУРИНУС** – племянник Швейкарта, изучал право, но заинтересовался исследованиями дяди и послал свои результаты о сфере мнимого радиуса и геометрии на ней Гауссу (до нас не дошли).

Ответ Гаусса в целом положительный, но «*публиковать не нужно*», еще рано, не поймут…

Тауринус все же опубликовал (1825, 1826):

– фактически решает ряд задач неевклидовой геометрии;

– методы тяжеловесны, изложение сжато и маловразумительно;

– пожелание Гауссу опубликовать свои взгляды.

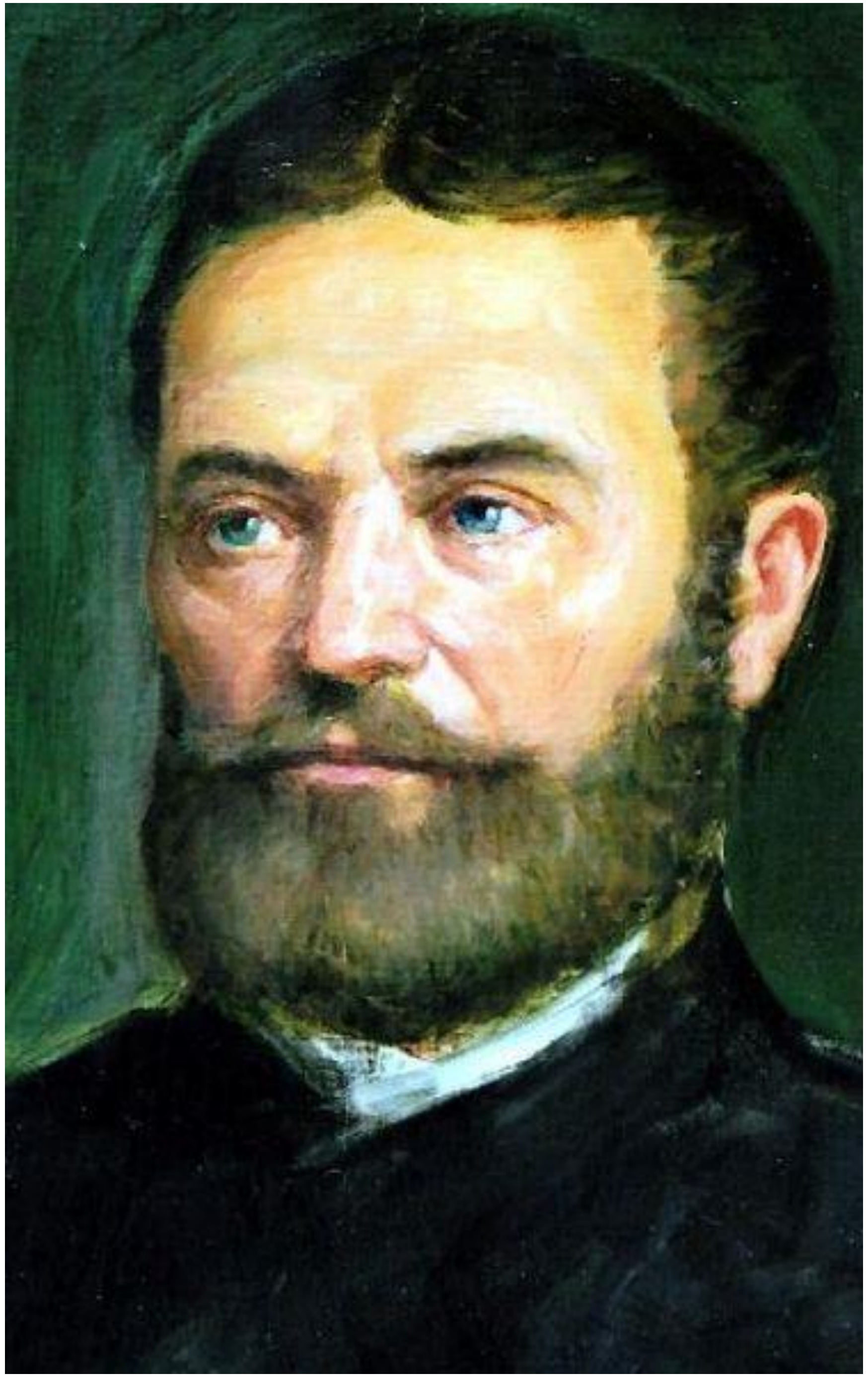
Гаусс перестал отвечать Тауринусу. Тауринус расстроился и постарался уничтожить весь тираж своих публикаций, а к работе над этой тематикой больше не возвращался.

Янош **<u>БОЙЯИ</u>** (1802–1860)

Отец – Фаркаш Бойяи, учился вместе с Гауссом, стал профессором математики в Марош-Васаргели.

1832 Учебное руководство «***Опыт введения учащегося юношества в начала чистой математики***»,

в качестве приложения – работа Яноша Бойяи *на латыни*, содержащая схематичное и сжатое изложение основ неевклидовой геометрии: “***<u>APPENDIX</u>***” – «*Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида*». Острый спор и послали Гауссу.



Из письма Фаркаши Бойаи сыну Яношу:

"Молю тебя, не делай только и ты попыток одолеть теорию параллельных линий: ты затратишь на это все свое время, а предложения вы не докажете все вместе. Не пытайся одолеть теорию параллельных линий ни тем способом, который ты сообщаешь мне, ни каким-либо другим.

Я изучил все пути до конца: я не встретил ни одной идеи, которой бы я не разрабатывал. Я прошел весь беспросветный мрак этой ночи, и всякий светоч, всякую радость жизни я в ней похоронил.

Ради бога, молю тебя, оставь эту материю, страшись ее не меньше, нежели чувственных увлечений, потому что и она может лишить тебя всего твоего времени, здоровья, покоя, всего счастья твоей жизни.

Этот беспросветный мрак может потопить тысячи ньютоновых башен. Он никогда не прояснится на земле, и никогда несчастный род человеческий не будет владеть чем-либо совершенным даже в геометрии. Это большая и вечная рана в моей душе…"

Wolfgang (Farkas) Bolyai and his son Johann (Janos). The "portrait" of Jonas Bolyai does not show Janos. It is a pseudo-portrait from a Romanian stamp that appeared 1960 on the occasion of the 100^{th} anniversary of his death. Because no real painting of Janos was found a portrait of a young man (probably member of the House of Habsburg) was used for the stamp, printed also on Hungarian stamps and in many books

Ответ **Гаусс**а Бойяи:

«Теперь кое-что о работе твоего сына. Если я начну с того, что я эту работу не должен хвалить, то ты, конечно, на минуту поразишься: но иначе я не могу; ***хвалить ее значило бы хвалить самого себя****:*

все содержание сочинения, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, почти сплошь совпадают с моими собственными достижениями, которые частично имеют уже давность в 35 лет.

Я действительно этим в высшей степени поражен. Моим намерением было о моей собственной работе, которая, впрочем, до настоящего времени очень мало нанесена на бумагу, при жизни ***ничего не публиковать****. Большинство людей не имеет правильных воззрений на те вопросы, о которых здесь идет речь;*

я нашел лишь мало людей, которые с особым интересом отнеслись к тому, что я им сообщал по этому предмету. Чтобы быть в состоянии это усвоить, нужно прежде всего весьма живо прочувствовать то, чего здесь собственно не хватает; а это большинству людей совершенно не ясно.

Однако ***я имел намерение со временем изложить*** *все это на бумаге в такой форме, чтобы эти идеи по крайней мере не погибли со мной. Таким образом, я чрезвычайно поражен тем, что эта работа с меня снимается, и я в высшей степени рад, что именно сын моего старого друга меня предупредил таким замечательным образом».*

Однако одному из своих друзей Гаусс написал:

«Этот юный геометр Бойяи — гений высшего класса».

Новость, что его опередили, ошеломила молодого Бойяи, только что произведенного в капитаны. Его здоровье ухудшается, характер портится, и вскоре он уходит в отставку (1833). Пенсии он не выслужил, жил на средства отца. Решил составить обстоятельное сочинение «Учение о пространстве», но не довел до конца.

Сменил тему: участвовал в конкурсе Лейпцигского ученого общества – «**Геометрическое построение теории мнимых чисел**». Предвосхитил идеи Грассмана и Гамильтона, но опять слишком сжатое изложение и схематичное. Работа была не понята.

Удар: 17 октября 1841 г. отец передал брошюру Лобачевского, в которой указано, что результаты с 1829 г. публикуются по-русски…

Умер Янош Бойяи 27 января 1860 в состоянии депрессии за несколько лет до того, как неевклидова геометрия получила всеобщее признание. После его смерти были обнаружены более 20 000 листов незаконченных математических рукописей.

Феликс Клейн ошибался, когда писал, что Гаусс повлиял и на Бойяи, и на Лобачевского.

Николай Иванович ЛОБАЧЕВСКИЙ (1792–1856)

Родился в Нижнем Новгороде, учился в Казани,
с 1827 по 1846 гг. – ректор Казанского университета (семь сроков).

11 (23) февраля **1826** г. – доклад
«Сжатое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных».

1829 «О началах геометрии»

1834 критика в журналах

1835 «Воображаемая геометрия»

1835–38 «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных линий»

1837 Перевод на французский язык в журнале Крелля

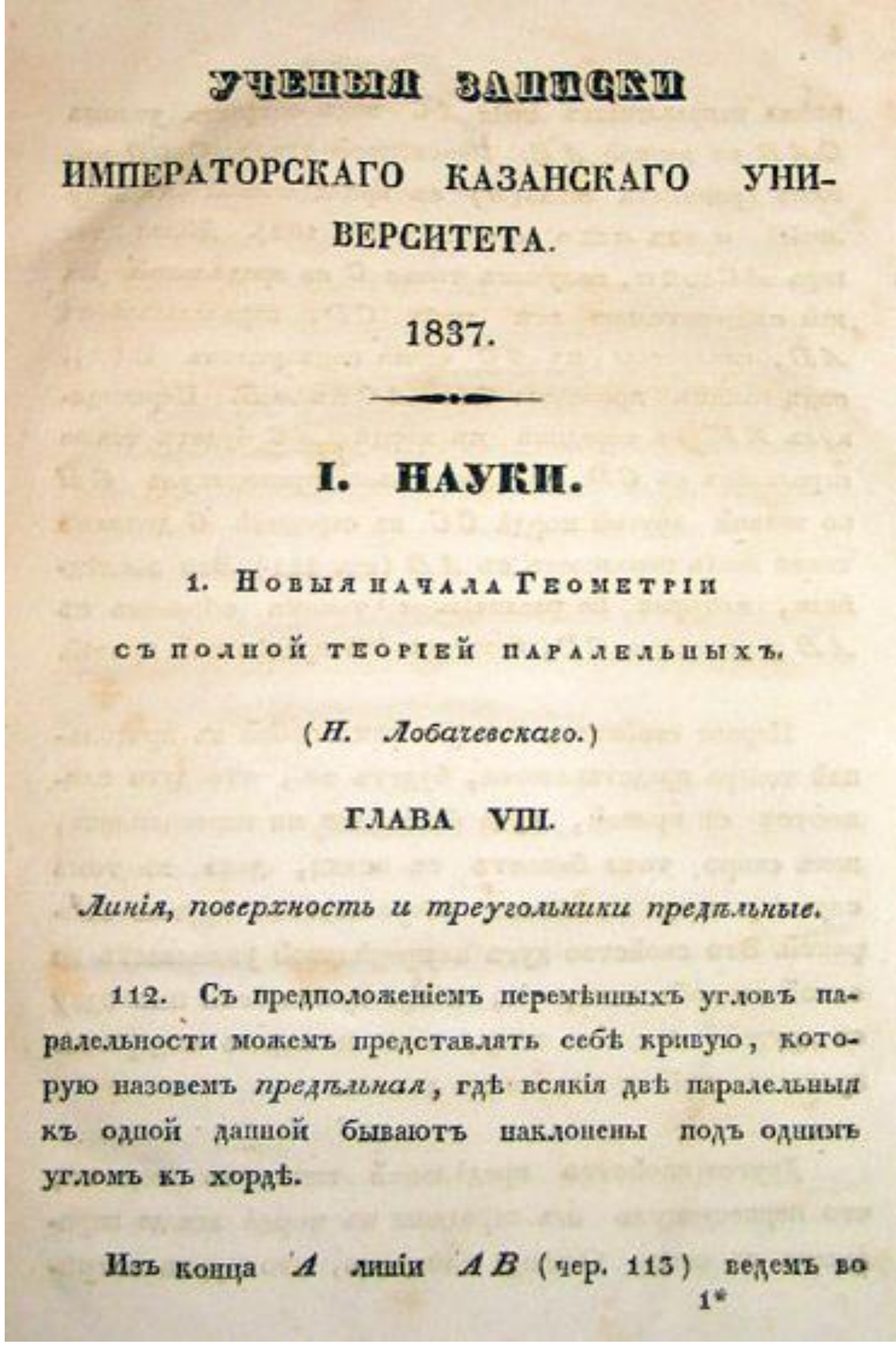
1840 Немецкий текст опубликован в Берлине, читал Гаусс

«Геометрические исследования по теории параллельных линий»

– доступная форма для читателя (*«…один из лучших перлов математической литературы»* – В.Ф. Каган);

– по этой книге стали известны идеи Лобачевского в Европе.

1855 ***«Пангеометрия»***



УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ

ИМПЕРАТОРСКАГО КАЗАНСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

1837.

I. НАУКИ.

1. Новыя начала Геометрiи съ полной теорiей паралельныхъ.

(*Н. Лобачевскаго.*)

ГЛАВА VIII.

Линiя, поверхность и треугольники предѣльные.

112. Съ предположенiемъ перемѣнныхъ угловъ паралельности можемъ представлять себѣ кривую, которую назовемъ *предѣльная*, гдѣ всякiя двѣ паралельныя къ одной данной бываютъ наклонены подъ однимъ угломъ къ хордѣ.

Изъ конца *A* линiи *AB* (чер. 113) ведемъ во

1*

В Казанском университете читал практически все математические курсы, поэтому значительные результаты получены не только в геометрии:

1) признаки сходимости рядов;

2) приближенное вычисление корней;

3) определение функции как соответствия;

4) хорошее определение непрерывности, позволившее впервые сформулировать и доказать теорему о том, что не всякая непрерывная функция дифференцируема;

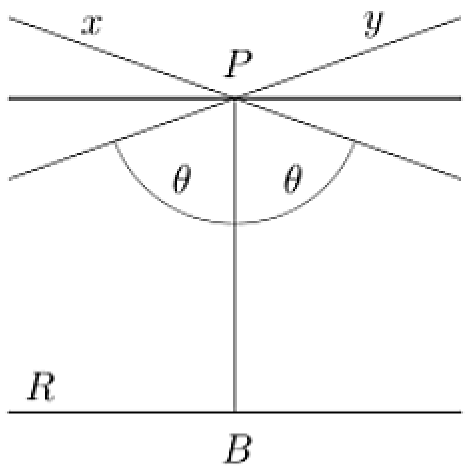
5) ряды Фурье;

6) немного вероятность.

Основные положения геометрии Лобачевского

Сначала перечисляет 15 важнейших положений абсолютной геометрии.

1. Постулат о параллельных



Через точку *P*, не лежащую на данной прямой *R,* проходит бесконечно много прямых, не пересекающих *R* и находящихся с ней в одной плоскости; среди них есть **две крайние *x*, *y***, которые и **называются** *асимптотически параллельными* (иногда просто **параллельными**) прямой *R*, а остальные — *ультрапараллельными*.

2. Вводит «**угол параллельности**» θ и утверждает, что:

а) существует зависимость $\theta = \pi(x)$

б) находит эту зависимость $tg\,\frac{\pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}}$, где k – постоянная для данной геометрии, зависящая от выбора единицы длины (подобно радиусу кривизны).

3. Изучает свойства введенных понятий:

– сохраняется ***транзитивность*** отношения параллельности по направлению ($\Rightarrow$ сходятся в бесконечно удаленной точке);

– ***прямые, имеющие общий перпендикуляр***, расходятся в обе стороны;

– ***сумма углов треугольника*** меньше двух прямых;

– при увеличении сторон ***сумма углов треугольника*** уменьшается $\Rightarrow$ она ***разная*** у разных треугольников и ***не существует подобных фигур***.

4. Устанавливает ***ТРИГОНОМЕТРИЮ*** и показывает, что вычислительный аппарат – гиперболические функции.

5. Выводит ***уравнения простейших линий*** – прямой и окружности.

6. Строит начала ***дифференциальной геометрии*** (находит элемент длины дуги

$$ds^2 = dy^2 + 1/4\,(e^{\frac{y}{k}} + e^{-\frac{y}{k}})^2 dx^2\ ,$$

длину окружности, элемент площади, элемент объема, вычисляет объемы тел вращения).

Везде полная аналогия с результатами в евклидовой геометрии! Для Лобачевского это – «*подтверждение правильности этой геометрии, завоеванное путем сложных вычислений*».

Таким образом, создана новая наука, охватывающая все вопросы метрической геометрии. Геометрия Евклида вошла в нее как частный случай.

ПРИЗНАНИЕ

Несмотря на то, что в **1840 Гаусс высоко оценил** работу Лобачевского и даже предлагал избрать его почетным профессором в Геттингене, в России Лобачевский оставался непризнанным (1834 разгромные статьи в «Сыне Отечества» и «Северном архиве»).

1828 **Гаусс** «*Общие исследования о кривых поверхностях*»

1837–40 Ф. **Миндинг** в статьях в журнале Крелля о поверхностях отрицательной кривизны получил, что на этих поверхностях имеет место метрика того же вида, что и у Лобачевского. НО этого НИКТО не заметил!!!

1865 **Публикация переписки Гаусса**

1868 **Бельтрами** «*Опыт интерпретации неевклидовой геометрии*»:

поверхность Лобачевского может быть интерпретирована любой поверхностью отрицательной кривизны.

1828 ГАУСС «*Общие исследования о кривых поверхностях*»

Интерес к геодезии – после государственного задания провести точное измерение меридиана Геттинген – Альтона и геодезическую съемку Ганноверского королевства.

– вводит квадратичную форму поверхности

$$\boldsymbol{ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

и утверждает, что с ее помощью можно считать длины дуг, углы, площади, кривизны R_1, R_2;

– вводит понятие гауссовой кривизны $k = \frac{1}{R_1 R_2}$ и вычисляет ее для сферы: $k = \frac{1}{R^2}$ и для псевдосферы: $k = -\frac{1}{R^2}$.

Фердинанд МИНДИНГ (1806–1885)

ученик Гаусса; с 1843 – профессор в Дерпте.

Развил тригонометрию треугольников на поверхностях отрицательной кривизны. Его формулы полностью совпали с формулами гиперболической геометрии Лобачевского. Публиковал статьи в журнале Крелле:

1837 $$ds^2 = dy^2 + ch^2\frac{y}{k}dx^2$$

1840 $$ds^2 = du^2 + \frac{dv^2}{4}\left(e^{\frac{u}{k}} + e^{-\frac{u}{k}}\right)^2$$

НО никто этого не заметил!

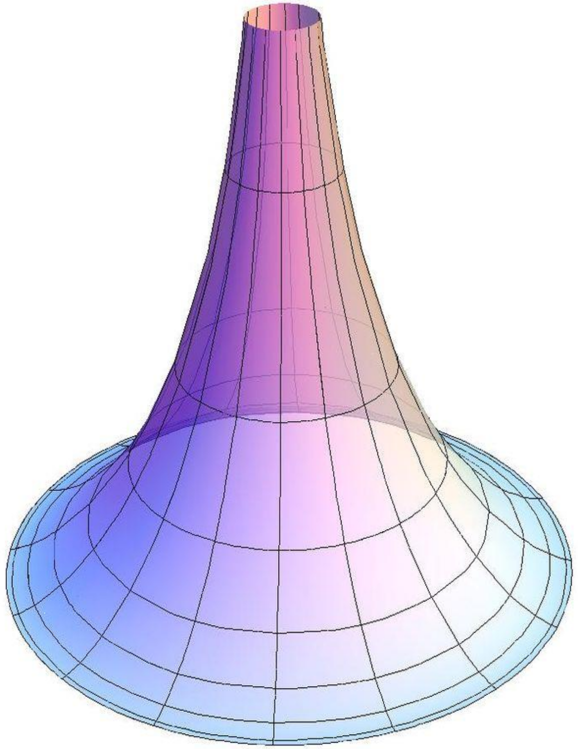
Эудженио БЕЛЬТРАМИ
(1835–1900)

1868 *«Опыт интерпретации неевклидовой геометрии»*

– плоскость Лобачевского может быть интерпретирована поверхностью отрицательной кривизны:

образом прямых Лобачевского являются геодезические на поверхности, а движения – изгибания поверхности на себя.

В 1900 Гильберт доказал, что на псевдосфере Бельтрами реализуется не вся плоскость Лобачевского.



– введенные бельтрамиевы координаты позволяют сделать вывод о том, что точки плоскости Лобачевского суть внутренность круга (след. слайд);

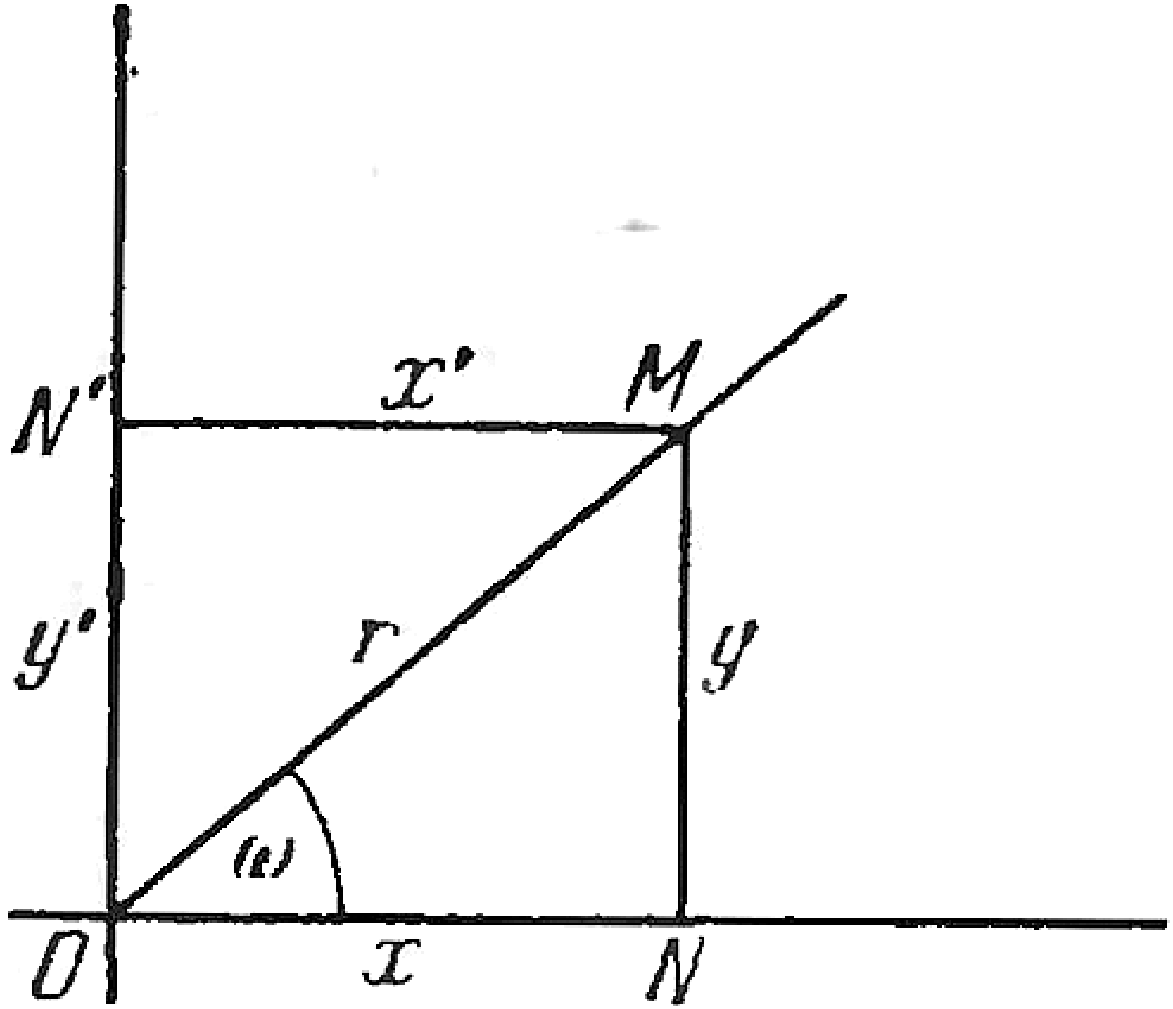
– показал, что хорды – прямые,

– вычислил расстояние от произвольной точки до центра

$$|OM| = \frac{k}{2} ln \frac{k+\sqrt{X^2+Y^2}}{k-\sqrt{X^2+Y^2}} .$$

НО не дал формулы для вычисления расстояния между точками и не объяснил, как изображать движение.

Бельтрамиевы координаты – координаты, в которых уравнение прямой линейно (гиперболический аналог декартовых координат).



Из треугольников MON и MON' проекции радиус-вектора на оси координат будут

$$\begin{cases} X = k\ cos\pi(r)\ cos\omega \\ Y = k\ cos\pi(r)\ sin\omega \end{cases} \Rightarrow$$

$$X^2 + Y^2 = k^2 cos^2\pi(r) < k^2$$

$\Rightarrow$ точки плоскости Лобачевского – внутренность круга.

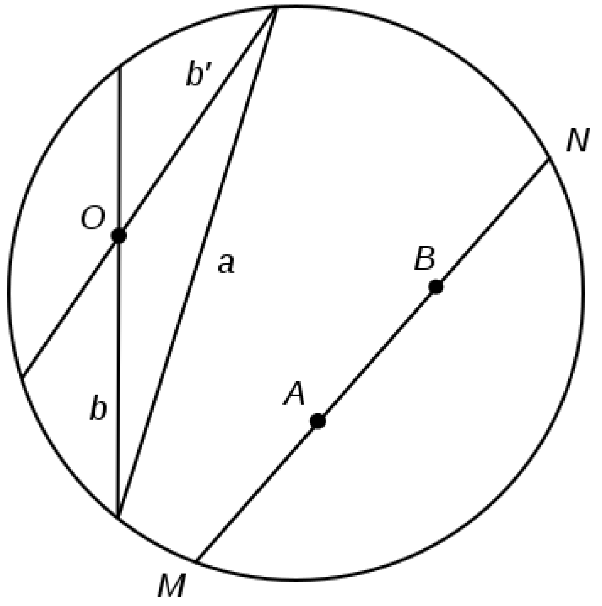
1871 Феликс **КЛЕЙН** завершил интерпретацию Бельтрами: «***О так называемой неевклидовой геометрии***»

Основана на введенном А. **Кэли** в **1859** г. понятии проективной метрики пространства. Клейн доказал, что в случае, когда эта метрика определяется кривой второго порядка, она совпадает с метрикой пространства постоянной отрицательной кривизны.

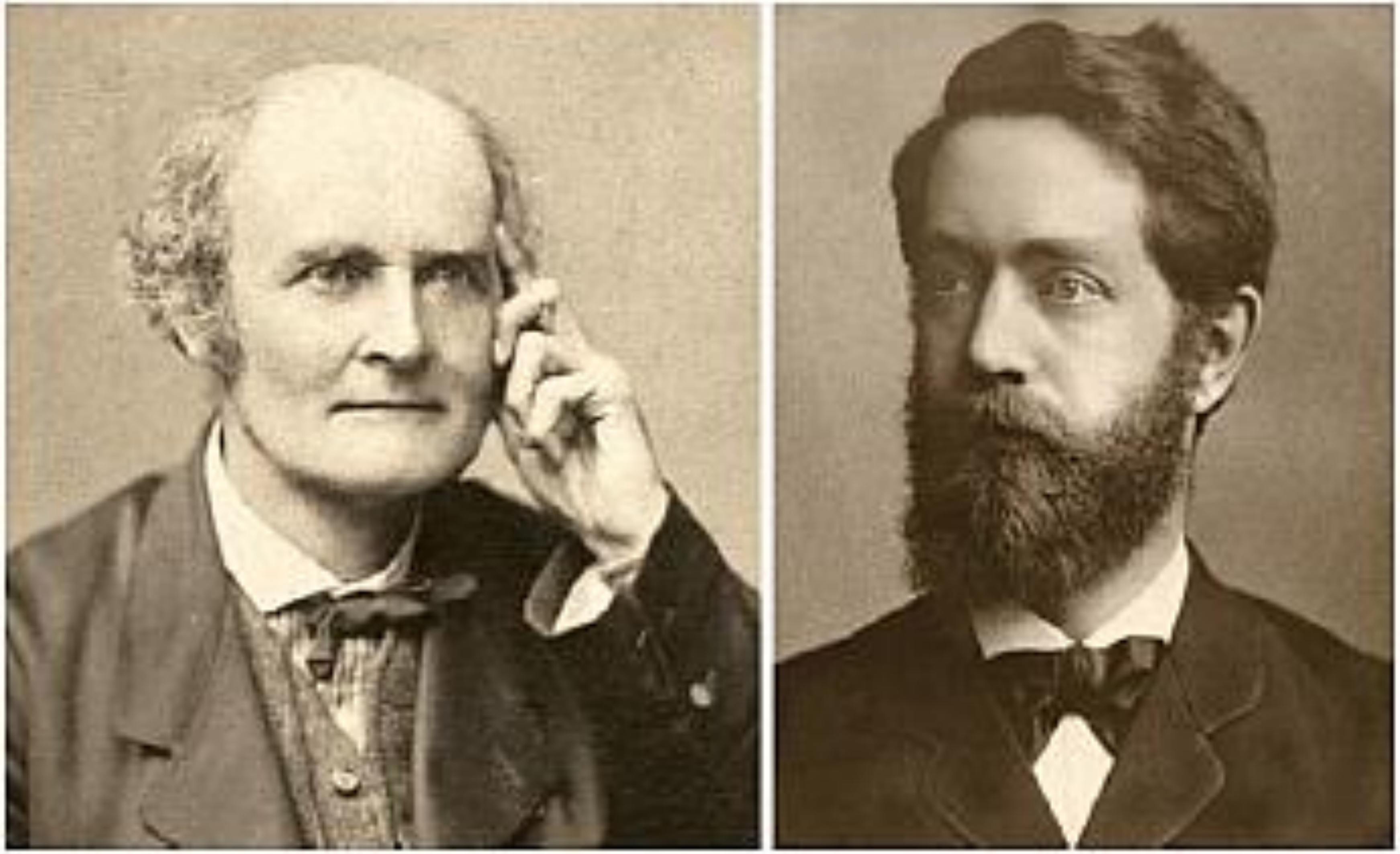
– отображает плоскость Лобачевского на внутренность круга, при этом граница – бесконечно удаленные точки;

– прямые – хорды без концов; параллельные – хорды с общим концом;

– движение – проективное преобразование, переводящее круг в круг и хорды в хорды.

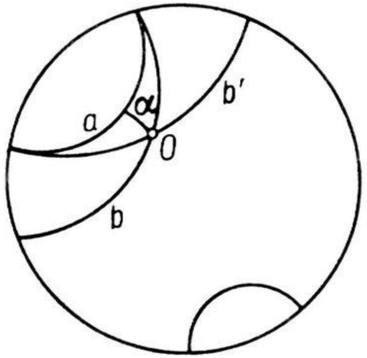


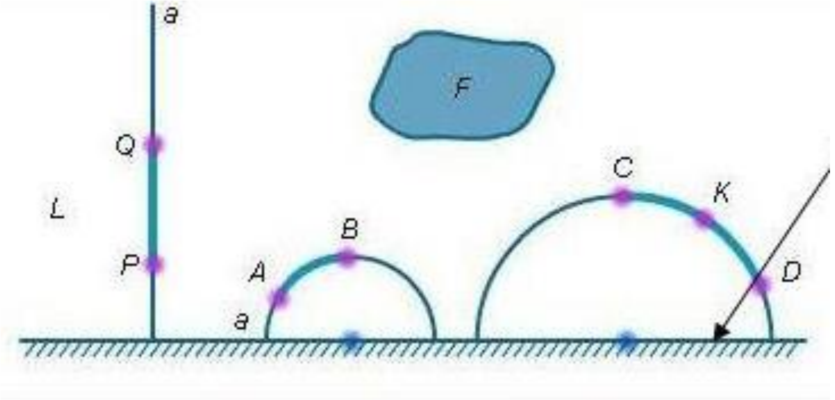
Расстояние (как у Кэли): $AB = \frac{k}{2}\left|\ln\left(\frac{AN}{AM}\cdot\frac{BM}{BN}\right)\right|.$



Arthur Cayley (unknown, portrait in London by Barrand & Jerrard)
and Felix Klein

1882 Анри **Пуанкаре** в связи с задачами ТФКП предложил еще две плоские модели в круге и на полуплоскости.





Прямые – дуги окружностей, перпендикулярные данной или диаметры.

Движения – гиперболические инверсии, т.е. преобразования плоскости относительно окружности, при которых каждой точке на луче ОМ ставится в соответствие точка M', такая что $OM \cdot OM' = r^2$.

Расстояние $AB = k\left|\ln\left(\frac{AN}{AM}\cdot\frac{BM}{BN}\right)\right|$.

Отыскание интерпретаций означает, что непротиворечивость доказана.

Итак, стали появляться различные геометрические неевклидовы системы $\Rightarrow$ необходимо выработать **классификацию геометрий,** разработать аксиоматический подход.

1854 **Риман** «*О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии*» – метрический подход

1872 **Клейн** «*Эрлангенская программа*»

– теоретико-групповой подход

1888 **Гельмгольц** «*О положениях, лежащих в основаниях геометрии*»

объединяет оба подхода.

Бернгардт РИМАН (1826–1866)

1854 (оп. 1867) «***О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии***»

Для построения геометрии необходимо:

1) **многообразие** элементов;

2) **координаты** этих элементов (рассматривает общий случай *n* координат!)

3) закон определения расстояния между бесконечно близкими элементами многообразия (**метрика**); задается через симметричную, положительно определенную квадратичную форму ds^2 исходя из предпосылки, что в малом геометрическое пространство евклидово.

4) **движения** определяются как преобразования, относительно которых инвариантен *ds,* следовательно остаются инвариантны длина кривой, площади, объемы и все другие соотношения, связанные с метрикой.

Такое *n*-мерное многообразие мы теперь называем римановым пространством. Но Риман **НЕ** построил соответствующего аналитического аппарата.

Непрерывное многообразие по Риману:

«Предположим, что некоторому понятию сопоставлено непрерывное множество состояний, причем от одного состояния определенным образом можно переходить ко всякому другому; тогда все эти состояния образуют просто протяженное или однократно протяженное многообразие, отличительным признаком которого служит возможность непрерывного смещения на каждом данном этапе лишь в две стороны – вперед и назад»

1872 **Феликс КЛЕЙН** «*Эрлангенская программа*»

ввел в классификацию геометрических систем идеи теории групп:

Движение – отображение пространства на себя. Все движения образуют группу, т.к. композиция двух движений есть движение, существует тождественное и обратное.

При движении в геометрическом пространстве ***расстояния должны сохраняться***, следовательно, каждым двум точкам пространства соответствует некоторый ***<u>инвариант группы движений</u>***. В любом множестве точек каждые две имеют свой парный инвариант, причем не существует инварианта, который бы не зависел от этих парных инвариантов.

Поэтому для построения геометрии (по Клейну) нужно:

1) установить то множество, в котором мы строим геометрию (субстрат);

2) установить группу отображений этого множества в самом себе, которая и будет определять изучаемую геометрию, т.к. в одном множестве может быть много геометрий;

3) основное содержание геометрии – изучение инвариантов этой группы.

Ф. Клейн:

«*Наиболее существенное понятие, необходимое для дальнейшего изложения, есть* ***понятие о группе пространственных изменений***…

Существуют такие преобразования пространства, которые оставляют вообще без изменений геометрические свойства пространственных образов. ***Геометрические свойства, по самому определению, не зависят от положения****, занимаемого в пространстве изучаемым образом, от его абсолютной величины и, наконец, от ориентации в расположении его частей. Свойства пространственного образа не изменяются поэтому от всех движений пространства, от его преобразований подобия, от процесса зеркального отражения и от всех преобразований, которые могут быть из них составлены. Совокупность всех этих преобразований мы назовем главной группой изменений пространства; геометрические свойства не изменяются от преобразований главной группы, и обратно, можно сказать:* ***геометрические свойства характеризуются их неизменяемостью*** *относительно преобразований главной группы*».

Теория инвариантов появилась в середине XIX в. на стыке трех наук:

– теории чисел (гауссова классификация бинарных квадратичных форм);

– геометрии (проективные свойства кривых);

– алгебры (теория определителей).

Создатели:

1. Артур **Кэли** (1821–1895)
2. Джеймс Джозеф **Сильвестр** (1814–1897)
3. Карл Густав **Якоби** (1804–1851)
4. Людвиг Отто **Гессе** (1811–1874)
5. Шарль **Эрмит** (1822–1901)

С этих позиций Клейна возможны следующие геометрии:

а) геометрия **Евклид**а – инварианты группы перемещений;

б) **аффинная** геометрия (плоскость в плоскость) – инварианты аффинных преобразований;

в) **проективная** геометрия (группа дробно-линейных преобразований). Частным случаем здесь будет геометрия Лобачевского (круг в себя);

г) **конформная** геометрия (круг переводит в круг + сохранение углов);

д) **топология** (непрерывные преобразования, т.е. сохранение непрерывности объектов).

Софус ЛИ (1842–1899), обобщая понятие группы алгебраических подстановок, создает **учение о группах непрерывных отображений** и его многочисленные приложения к дифференциальным уравнениям и геометрии.

ЛИ показал, что **в метрической геометрии существует** только **3 группы**, в которых каждая точка может быть совмещена с каждой другой и существует только парный инвариант:

– ***евклидова*** геометрия,

– геометрия Лобачевского (***гиперболическая***)

– ***эллиптическая***.

Ф. Клейн о своем общении с С. Ли писал:

«*Мы работали, начав от различных исходных пунктов, но над одними и теми же или родственными проблемами. Поэтому мы вскоре вступили в почти ежедневный обмен мыслями, и это нас сблизило, тем более что наши геометрические интересы были чужды большинству из нашего окружения*».

Но возможны **геометрии, в которых две точки не имеют инварианта**.

Это – не метрические геометрии:

1) проективная: Понселе (1788–1867), Штаудт (1798–1867);

2) конформная (инвариант – угол): школа Бляшке (1885–1962).

Герман Людвиг Фердинанд фон ГЕЛЬМГОЛЬЦ (1821–1894)

1888 «*О положениях, лежащих в основании геометрии*» объединил подходы Клейна и Римана.

В начале XX в. после работ Р. Риччи-Курбастро и Т. Леви-Чивита оформилось **тензорное исчисление** как синтез теории алгебраических форм и теории квадратичных дифференциально-геометрических форм:

был создан ***аппарат для решения проблем римановой геометрии***.