XIX век

1789 Великая Французская революция и реформа образования:

1794 В Париже **две новые высшие школы**, в которых математическое образование стало основным: L’École Normale и L’École Polytechnique.

Реформируется Сорбонна – появляется факультет наук.

Реорганизация Парижской **академии наук**.

Уровень преподавания математики **повышается**: лекции в университетах читают ведущие ученые, создающие первоклассную учебную литературу.

Заниматься математикой становится **престиж**но. Новое поколение французских ученых стало базой новой математической школы – **Политехнической**.

L'École Polytechnique

L'École Normale Supérieure

УНИВЕРСИТЕТЫ РОССИИ

1755 **Московский университет**

1802 Дерптский университет
1803 Вильнюсский университет

1804 Новый Устав российских университетов –
отныне 4 факультета: юридический, медицинский, философский, ***физико-математический.***

1804 Казанский университет
1805 Харьковский университет

1817 (первая попытка) Варшавский университет
1819 Санкт-Петербургский университет

1834 Киевский университет

1865 Одесский университет
1869 Варшавский университет
1888 Томский университет

1909 Саратовский университет

1933 Из физико-математического факультета Московского университета были образованы **механико-математический**, физический и географический факультеты.

Появление чисто математических журналов

1795 Журнал Политехнической школы

1810–1831 «Анналы» Жергонна
«Annales des mathématiques pures et appliques »

1826 журнал Крелля
«Journal für die reine und angewandte Mathematik»

1836 Лиувилль продолжает «Анналы» Жергона
– **журнал Лиувилля**

1866 ***«Математический сборник»*** Московского математического общества

1868 ***«Mathematische Annales»***

1871 Реферативные журналы:

первый в Германии – отреферированы работы до 1868 г., около 900 работ 650 авторов.

В 31м томе за 1900 г. – более 2600 работ 1500 авторов.

Образование математических обществ

1864 Московское математическое общество

1865 Лондонское математическое общество

1872 Французское математическое общество

1884 Математический кружок Палермо

1888 Нью-Йоркское математическое общество

→1894 Американское математическое общество

1891 Германское математическое общество

1893 На выставке в Чикаго первая попытка создать **международную математическую организацию** – математический конгресс в рамках выставки (около 40 человек)

1897 Цюрих I Математический Конгресс (около 200 чел.) Президент – Бугаев Н.В. Триумф Г. Кантора.

Основные черты развития математики в XIX в.

Долгое время математика – наука прикладная (к астрономии, к механике). Уже в начале XIX в. отношение меняется:

– связь с реальностью в более сложных формах, широкая сфера приложений, возникает математическая физика, появляется разделение на чистую и прикладную математику, хотя и весьма условно;

– новый уровень абстракции, математика развивается по собственным логическим законам – большое количество теорем существования, повышение строгости изложения;

– математика становится университетской наукой;

– пропадает тип универсального ученого.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

	до XIX века	в XIX веке
Анализ	нет обоснования для бесконечно малых	теория пределов, полная строгость, создание ТДЧ и затем – теории множеств
Алгебра	решение уравнений	изучение алгебраических структур
Геометрия	евклидова	неевклидовы геометрии
Аналитическая геометрия	Геометрия плоскости и трехмерного пространства	*n*-мерная геометрия

МАТЕМАТИКИ XIX ВЕКА

ФРАНЦИЯ	О.Л. Коши, С.Д. Пуассон, Ж.Б. Фурье, Э. Галуа, Ж. Лиувилль, Г. Дарбу, А. Пуанкаре.
ГЕРМАНИЯ	К.Ф. Гаусс, К.Г. Якоби, Ю. Плюккер, А.Ф. Мебиус, Б. Риман, К. Вейерштрасс, Р. Дедекинд, Г. Кантор, Л. Дирихле, Г. Фробениус, Ф. Клейн, Г. Грассман, Г. Минковский, Д. Гильберт.
АНГЛИЯ	Дж. Буль, О. де Морган, Дж. Пикок, Дж. Грин, Дж. Стокс, А. Клиффорд, Дж.К. Максвелл, А. Кэли, У. Гамильтон, Дж.Дж. Сильвестр.
РОССИЯ	Остроградский М.В., Буняковский В.Я., Лобачевский Н.И., Чебышев П.Л., Ковалевская С.В., Марков А.А., Ляпунов А.М.,
	Московское математическое общество.

К XIX в. **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

– мощное образование из нескольких математических дисциплин: из дифференциального и интегрального исчисления выделились вариационное исчисление, дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, исчисление конечных разностей.

Накопились **проблемы**, парадоксы…

1. *О сходимости бесконечного ряда*:

1) Гвидо Гранди (профессор Пизанского университета, 1671–1742)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = 1 + (-x + x^2) + \cdots$$ или

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = (1 - x) + (x^2 - x^3) + \cdots$$

При $x = 1 \implies \frac{1}{2} = 1\,???\quad \frac{1}{2} = 0 + 0 + 0 \ldots ???$

Гранди толковал это как символ сотворения мира из ничего.

2) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad x = 2 \implies -1 = \infty???$

3) Лагранж стал рассматривать несобственные интегралы.

2. **Что есть *бесконечно малая величина*?**

XVIII в. – критика из-за отсутствия строгого определения предела.

1734 епископ **Джордж Беркли** (1685–1753) выступил против флюксий Ньютона – *«Аналист, или рассуждение, обращенное к одному неверующему математику* [Галлею? – Г.С.]»*:* «существовать – значит быть воспринимаемым»; «бесконечно малые – тени усопших величин»; «анализ основан на ошибках».

1740 **Бюффон** (французский натуралист, биолог, математик, естествоиспытатель и писатель) в предисловии к своему французскому переводу «Метода флюксий» Ньютона:

«*Всё было спокойно в течение нескольких лет, как вдруг в самой Англии появился доктор, враг науки, объявивший войну математикам… И он заявляет нам, что исчисление бесконечного ошибочно, ложно, подозрительно неясно, что принципы его недостоверны и что оно приводит к цели лишь случайным образом*».

1755 Леонард **ЭЙЛЕР** «Дифференциальное исчисление»:

«…*на вопрос, что такое* ***бесконечно малая в математике****, мы ответим, что она в полном смысле слова* ***нуль****. Никаких глубоких таинств, как полагают обычно, здесь не скрывается, что и делает исчисление бесконечно малых для многих чрезвычайно подозрительным*».

Дифференциал у Эйлера фактически есть предел конечной разности. При таком определении dx является постоянной величиной, а dy, зависящий не только от dx, но и от самого x, – переменной; при этом и тот, и другой являются нулями.

«*Дифференциальное исчисление есть* ***метод нахождения отношения между исчезающими приращениями****, которые любые функции принимают в том случае, когда переменная величина, функциями которой они являются, получает тоже исчезающее приращение...*

…дифференциальное исчисление не столько изучает самые эти приращения, так как ***они суть нули****, сколько занимается их взаимными отношениями и пропорциональностью; а так как эти* ***отношения выражаются конечными количествами****, то следует полагать, что и это исчисление имеет дело с конечными количествами. Правда, обычно излагаемые правила на первый взгляд имеют в виду эти исчезающие количества; однако, в основу выводов никогда не кладутся эти величины, рассматриваемые сами по себе, но всегда выводы делаются из их отношения…*

…называть ли эти исчезающие приращения, отношение между которыми рассматривается, дифференциалами или флюксиями, ***всегда надо считать их равными нулю; в этом и надлежит видеть истинный смысл выражения бесконечно малое****…*

Благодаря такому подходу – единственно рациональному – становятся незыблемыми начала дифференциального исчисления, и все возражения, обычно выдвигаемые против этого исчисления, сами собой отпадают; но стоит только принять, что дифференциалы или бесконечно-малые не совершенно равны нулю и тотчас все эти возражения получают всю свою силу».

Таким образом, явно выражена мысль, что **производная**, а не дифференциал, – **«истинный объект» исчисления**.

Определяется она как **предел отношения конечных приращений**, которые «*становятся все меньшими и меньшими, а их отношение все более и более приближается к некоторому определенному* ***пределу***, *которого они достигают лишь тогда, когда полностью обращаются в нуль*».

Выдвинув предел на первый план, **разрабатывать теорию пределов Эйлер не стал**, поэтому его «исчисление нулей» выглядело искусственным трюком. Назрела настоятельная необходимость наведения порядка в основаниях анализа.

Жан Лерон **ДАЛАМБЕР** (1717–1783) в своих статьях по математике для «Энциклопедии» («Дифференциал» 1754, «Флюксия» 1756, «Бесконечно малая» 1759, «Предел» 1765) развивает **теорию пределов**, но рассматривает только односторонний, недостижимый предел монотонной последовательности; нет алгоритма; нет строгого понятия сходимости и ее общего критерия:

1765 ДАЛАМБЕР "Предел" в «Энциклопедии»:

«В дифференциальном исчислении речь идет вовсе не о бесконечно малых величинах, но только о пределах конечных величин…

***Говорят, что величина** является **предел**ом другой величины, если вторая может приблизиться к первой ближе, чем на любую данную величину, сколь бы малой ее не предположить, без того, однако, чтобы приближающаяся величина могла когда-либо превзойти величину, к которой она приближается; таким образом, разность между такой величиной и ее пределом абсолютно неопределима…*

предел никогда не становится равным величине, для которой он является пределом…

Теория пределов есть основание истинной метафизики дифференциального исчисления».

Сформулирован признак Даламбера сходимости рядов, но обоснован недостаточно строго.

Лазарь КАРНО (1753–1823) – французский государственный и военный деятель, инженер и учёный. Автор термина "комплексное число".

1797 ***Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых***

Исчисление бесконечно малых основано на **принципе компенсации ошибок**, который в известных условиях приводит к точным результатам.

«*То, что…называют **бесконечно малыми количествами**, есть … количество, **предел которого есть 0***».

А <u>понятие предела настолько ясно, что «*его излишне даже определять*</u>». И хотя прямого определения предела Карно не дает, но полно и ясно описывает его в первых пяти параграфах.

1813 Сторонники понимания бесконечно малых как нулей «***среди всех отношений**, которые эти количества способны иметь в качестве нулей…, **рассматривают только те, которые определены законом непрерывности***».

При доказательстве принципа в 1797 пользовался и пределом, и бесконечно малой, в 1813 – только второй.

Жозеф-Луи ЛАГРАНЖ (1834–1886). Курс в Политехнической школе **1797**: *«Теория аналитических функций, содержащая начала дифференциального исчисления, освобожденные от какого-либо рассмотрения бесконечно малых, исчезающих пределов и флюксий, и сведенные к алгебраическому анализу конечных величин»*

Идея Лагранжа (1772) основана на разложении любой функции в ряд Тейлора по степеням неизвест-ной: нужно алгебраически доказать возможность разложения в ряд, а затем вычислять (производить) коэффициенты этого разложения.

Брук **Тейлор** (1685–1731) сформулировал и обосновывал свое разложение в работе **1712** г. (оп. 1715). Но идея была известна ранее: в **1672** Дж. Грегори ее уже использовал, Ньютон и И. Бернулли знали.

ЛАГРАНЖ:

«*Если переменной, входящей в функцию, сообщают какое-либо приращение, прибавив к этой переменной неопределённую величину, и если функция алгебраическая, то её можно разложить по степеням этой неопределённой величины с помощью обычных правил алгебры.* ***Первым членом разложения будет предложенная функция****, которую мы будем называть* ***первообразной*** *функцией;* ***следующие члены*** *будут образованы различными функциями той же переменной, умноженными на последовательные степени неопределённой величины. Эти новые функции* ***будут зависеть единственно лишь от первообразной функции, из которой они произведены****, и их можно будет назвать* ***производными*** *функциями.*

Вообще независимо от того, будет ли первообразная функция алгебраической или нет, она всегда может быть разложена или предположена разложенной таким образом и тем самым породить производные функции. Рассмотрение функций с этой точки зрения составляет анализ более высокого рода, чем обыкновенный анализ, благодаря его общности и многочисленным применениям».

I этап обоснования математического анализа в XIX в. 1812–1823 гг.

1813 **ГАУСС** ***«О гипергеометрическом ряде»***

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$

1) $\left.\begin{matrix}\alpha = -m\\ x \equiv -x\\ \gamma = \beta\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \quad F(-m,\beta,\beta,-x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots = (1+x)^m$

2) $\left.\begin{matrix}\alpha = 1\\ \gamma = \beta\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \quad F(1,\beta,\beta,x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$

3) $\left.\begin{matrix}\alpha = 1\\ \beta = 1\\ \gamma = 2\\ x \equiv -x\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \quad F(1,1,2,-x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots = \frac{1}{x}\ln(x+1)$

Карл Фридрих ГАУСС
(1777–1855)

Из небогатой семьи (отец из фермеров, мать из сословия каменщиков). Арифметическими способностями удивлял уже в возрасте 3 лет. При помощи школьных учителей получил возможность учиться в Геттингене (1795–1798), но не закончил, т.к. был вынужден уехать, получив предложение о хорошей работе.

Колебался между математикой и филологией, **НО** 30 марта 1796 г. его «Математический дневник» открывает первая запись:

«*Принципы, на которых основывается деление круга, а именно, его геометрическое деление на 17 частей*». Всего 146 записей, из них 102 – в юности, до 1800 г.

1799 Вернулся, защитил диссертацию. С **1807** и до конца жизни в Геттингене. При Гауссе Геттинген стал крупнейшим научным центром.

1813 ГАУСС «***О гипергеометрическом ряде***»:

– выводит условия сходимости ряда в круге и расходимости вне него, а также исследует <u>сходимость ряда на границе.</u>

– получил признак сходимости, рассматривая отношение двух соседних членов:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\nu}{n} + \frac{\theta(n)}{n^2}, \quad |\theta(n)| < 1,$$

при $\lambda > 1$ ряд сходится (признак недостаточно строго сформулированный Даламбером в 1768);

при $\lambda < 1$ нужно исследовать ν (в **1843** – признак Раабе:

$$R = \lim_{n\to\infty} n\,(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$$

и если *R >1*, то ряд сходится;

если *R <1*, то расходится).

Свои результаты излагал в лекциях, которые слушал и развивал дальше **Дирихле**, а затем и **Дедекинд**, издавший впоследствии лекции Гаусса и Дирихле.

Наибольших успехов в обосновании математического анализа добился **Огюстен-Луи КОШИ (1789 – 1857)**

Родился в Париже, воспитан в строго клерикальных традициях; окончил Политехническую школу; служил путейским инженером в Шербуре, в 1813 вернулся в Париж. С 1816 – академик, профессор Политехнической школы, роялист.

В 1830 после Июльской революции отправился в изгнание вслед за Бурбонами; жил в Турине и в Праге $\Rightarrow$ «Туринские мемуары».

В 1838 (после смерти Карла X 1836) вернулся в Париж, НО отказался от присяги новому государственному режиму $\Rightarrow$ никакой государственной должности, преподавал в иезуитском колледже. В 1848 после новой революции до конца жизни работал в Сорбонне (но присяги так и не принес).

Особенности научного творчества: не был классиком формы; большинство публикаций носит спешный, эскизный характер; из 789 (!) публикаций всего 8 книг.

1821 «***Курс анализа***»

1823 «***Резюме лекций по исчислению бесконечно малых***»

Коши считал, что путь, предложенный Ж. Лагранжем, ошибочен:

«*Методы, которым я следовал, отличны в некоторых отношениях от тех, какие излагаются в сочинениях этого рода. Главной целью моей было примирить строгость, которую я поставил себе правилом в моём «Курсе анализа» с простотой, вытекающей из непосредственного рассмотрения бесконечно малых величин. По этой причине я счёл необходимым отбросить разложение функций в бесконечные ряды во всех случаях, когда получающиеся ряды не сходятся, и я был принуждён перенести формулу Тейлора в интегральное исчисление, ибо эту формулу можно считать общей, лишь если содержащийся в ней ряд приводится к конечному числу членов и дополняется некоторым определённым интегралом. Я знаю, что знаменитый автор «Аналитической механики» положил упомянутую формулу в основание* *своей теории производных функций. Но, несмотря на всё почтение, внушаемое столь выдающимся авторитетом, большинство геометров в настоящее время признаёт сомнительными результаты, к которым может привести* ***употребление расходящихся рядов****, и мы добавим, что в некоторых случаях теорема Тейлора дает как будто разложение функции в сходящийся ряд, но между тем сумма ряда существенно отличается от предложенной функции … Впрочем, лица, прочитавшие мое сочинение, убедятся, надеюсь, что принципы дифференциального исчисления и его наиболее важные приложения можно легко изложить без привлечения рядов…*

Что касается методов, то я пытался придать им всю строгость, требуемую в геометрии, с тем, чтобы никогда не прибегать к доводам, исходящим из общности алгебры…

…я должен был допустить многие предложения, которые, быть может, сперва покажутся несколько жесткими. Например, … что ***расходящийся ряд не имеет суммы****… Так, прежде чем приступить к суммированию каких-либо рядов, я должен был рассмотреть, в каких случаях ряды можно суммировать, или, другими словами, каковы* ***условия их сходимости****; и в этом вопросе я установил общие правила, которые, на мой взгляд, заслуживают некоторого внимания».*

Огюстен-Луи Коши (1789–1857)

определение предела:

«Если значения, последовательно приписываемые одной и той же переменной, неограниченно приближаются к фиксированному значению, так что в конце концов отличаются от него сколь угодно мало, то последнее называют ***пределом*** *всех остальных».*

В качестве знака предела он выбирает знак, использовавшийся в широко распространённом учебнике С. Люилье «*Изложение начал высших исчислений*» (Берлин, **1786**): *lim*

определение бесконечно малой величины:

«Если последовательные числовые значения переменной неограниченно убывают, так что становятся меньше любого данного числа, эта переменная становится тем, что называют ***бесконечно малой*** *или бесконечно малым количеством. Переменная этого рода имеет пределом нуль».*

Основные понятия математического анализа у Эйлера и Коши

Леонард Эйлер *(1707–1783)*

1. Нет понятия **предел**а.

2. **Бесконечно малая** = 0,
   бесконечно большая = 1/б.м.

3. *Глобальное* определение **непрерывности** (в узком смысле):

   непрерывная функция задана единым аналитическим выражением в области определения.

Огюстен-Луи Коши *(1789–1857)*

1. *Арифметическое* (словесное) определение **предел**а.

2. a_n – **бесконечно малая** тогда и только тогда, когда ее предел = 0;

   a_n – **бесконечно большая** тогда и только тогда, когда ее предел = ∞ .

3. *Локальное* определение **непрерывности**:

   функция *f(x)* остается непрерывной относительно *x* между данными пределами, если между этими пределами **бесконечно малое приращение переменной порождает** всегда **бесконечно малое приращение** самой **функции**

4. **Производная** – отношение дифференциалов, которое вычисляется по правилу…

5. **Интеграл** ≡ *неопределенный* интеграл:

т.к. бесконечно малая = 0, то нельзя рассматривать сумму бесконечно малых, и, следовательно, нужна *первообразная* ***F(x)*** такая, что

$$dF(x)= f(x)dx.$$

6. **Сумма ряда** ≡ конечное аналитическое выражение, которое было представлено этой суммой.

4. **Производная** определена через предел.

5. **Интеграл** ≡ *определенный* интеграл как предел интегральных сумм.

(см. замечание о равномерной непрерывности на след. слайде)

6. **Сумма ряда** ≡ предел частичных сумм с обязательной строгой оценкой остаточных членов и возникают критерии сходимости.

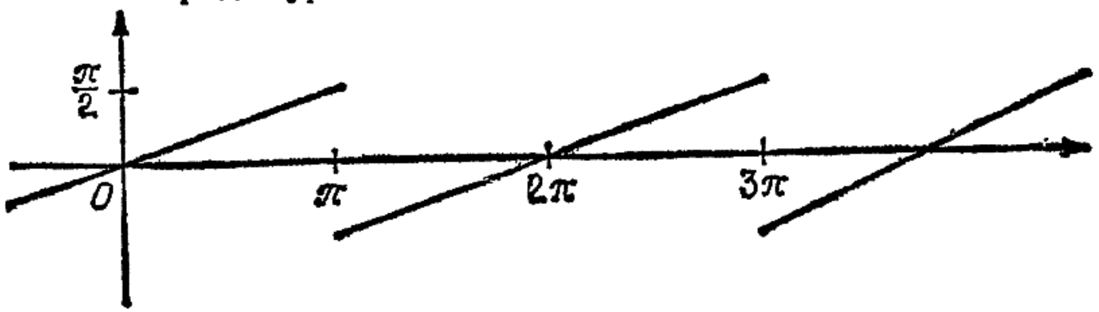
<u>К пункту 5</u>:

В 1823 г. Коши использовал существование и непрерывность предела интегральных сумм, но строгое доказательство требует ***равномерной сходимости***.

Заметил и исправил Н.Х. **Абель** в 1826 г. (предел суммы непрерывных функций не есть непрерывная функция).

Равномерная непрерывность введена в 1848 г. Дж. **Стокс**ом и Л. **Зейдел**ем.

Пример непрерывной кусочно монотонной функции и ее разложения в ряд Фурье:



Ряд

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots$$

равен $x/2$ при $x \in [0, \pi[$ и 0 при $x = \pi$.

Этот контрпример был дан Абелем к неточной «теореме» Коши.

<u>К пункту 6</u>:

Критерий Коши: Ряд сходится тогда и только тогда, когда существует номер, начиная с которого разность между членами ряда меньше любой сколь угодно малой величины.

Необходимость доказал, а достаточность не смог, т.к. еще ***не было*** строгой ***теории действительного числа***.

“Формула подчас кажется более мудрой, чем выдумавший ее человек.”

Б.Больцано

Бернард БОЛЬЦАНО
1781–1848

1817 «*Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения*»

– работа по обоснованию математического анализа, более глубокая, чем у Коши, **но** оставалась неизвестной до 70-х годов 19 века: были открыты К. Вейерштрассом и его учениками, а также Г. Ганкелем, который обратил внимание (1871) на книги Больцано «Парадоксы бесконечного» (1851) и «Теорема о биноме» (1816).

БОЛЬЦАНО (**1817**):

1. Определение функции, непрерывной в точке, и свойства непрерывных функций.
2. У любого множества действительных чисел, ограниченного сверху (снизу) существует точная верхняя (нижняя) грань.
3. Критерий сходимости последовательностей.
4. Непрерывная функция принимает все свои промежуточные значения.
5. Односторонняя непрерывность.
6. Пример функции, разрывной всюду.
7. Пример функции с бесконечным числом экстремумов на конечном промежутке.

К. ВЕЙЕРШТРАСС. ***Лекции 1861 г***.

Определение непрерывной функции.

«Если f (x) есть функция от x, и x – определенное значение, то при переходе x в x+h функция переменится и будет f(x+h).

Если можно определить для h такую границу δ, что для всех значений h, по абсолютному значению меньших, чем δ, разность f(x+h) – f(x) становится меньше, чем сколь угодно малая величина ε, то говорят, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции».

Обоснование математического анализа в XIX веке.

Введение теории пределов и перестройка математического анализа на ее основе
Гаусс, Коши, Абель, Больцано
1812–1823

I. Представимость функции тригонометрическим рядом, функция и интеграл Дирихле 1834–37
Интеграл Римана 1854–67

Мера множества Жордан, Кантор, Пеано, Лебег 1895
Мера и интеграл Лебега начало XX в.

II. Равномерная непрерывность и сходимость: Абель, Стокс, Зейдель, Вейерштрасс

Действительное число и ε-δ аппарат Вейерштрасса 1870-е

III. Теория действительного числа у Дедекинда, Вейерштрасса и Кантора 1872–75
Теория множеств Кантора 1871–80
Парадоксы теории множеств

IV. Т Ф К П