“Формула подчас кажется более мудрой, чем выдумавший ее человек.”

Б.Больцано

Бернард БОЛЬЦАНО

1781–1848

1817 «***Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения***»

– работа по обоснованию математического анализа, более глубокая, чем у Коши, **но** оставалась неизвестной до 70-х годов 19 века: были открыты К. Вейерштрассом и его учениками, а также Г. Ганкелем, который обратил внимание (1871) на книги Больцано «Парадоксы бесконечного» (1851) и «Теорема о биноме» (1816).

БОЛЬЦАНО (**1817**):

1. Определение функции, непрерывной в точке, и свойства непрерывных функций.
2. У любого множества действительных чисел, ограниченного сверху (снизу) существует точная верхняя (нижняя) грань.
3. Критерий сходимости последовательностей.
4. Непрерывная функция принимает все свои промежуточные значения.
5. Односторонняя непрерывность.
6. Пример функции, разрывной всюду.
7. Пример функции с бесконечным числом экстремумов на конечном промежутке.

К. ВЕЙЕРШТРАСС. *Лекции 1861 г*.

Определение непрерывной функции.

«Если f (x) есть функция от x, и x – определенное значение, то при переходе x в x+h функция переменится и будет f(x+h).

Если можно определить для h такую границу δ, что для всех значений h, по абсолютному значению меньших, чем δ, разность f(x+h) – f(x) становится меньше, чем сколь угодно малая величина ε, то говорят, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции».

Карл ВЕЙЕРШТРАСС (1815 – 1897)

Великий педагог; строгость везде.

Из семьи чиновника. По настоянию отца 4 года учился на юридическом факультете в Бонне, но бросил и поступил в университет Мюнстера.

После него **14 лет работал учителем математики** в провинциальной гимназии и кроме математики вел там занятия по физике, ботанике, географии, истории, немецкому языку, чистописанию и гимнастике.

Только с 1854 его работы по анализу становятся известными и признанными и с **1856 и до конца жизни он – профессор Берлинского университета.**

Член Берлинской АН (1856), иностранный член Парижской АН (1879), Лондонского королевского общества (1881), иностранный член-корреспондент (1864) и почётный член (1895) Петербургской АН.

Обоснование математического анализа в XIX веке.

Введение теории пределов и перестройка математического анализа на ее основе
Гаусс, Коши, Абель, Больцано
1812–1823

I. Представимость функции тригонометрическим рядом, функция и интеграл Дирихле 1834–37
Интеграл Римана 1854–67

Мера множества Жордан, Кантор, Пеано, Лебег 1895
Мера и интеграл Лебега начало XX в.

II. Равномерная непрерывность и сходимость: Абель, Стокс, Зейдель, Вейерштрасс

Действительное число и ε-δ аппарат Вейерштрасса 1870-е

III. Теория действительного числа у Дедекинда, Вейерштрасса и Кантора 1872–75
Теория множеств Кантора 1871–80
Парадоксы теории множеств

IV. Т Ф К П

Т Ф К П в XIX в.

Комплексные числа

Первая идея: **1545** **Кардано** «Великое искусство алгебры»

Введены: **1572** **Бомбелли** «Алгебра»
"piu di meno", "meno di meno"

Попытки геометрической интерпретации:

Около **1580** Кардано «Беседа о плюсе и минусе»

1599 Виет «Порождение треугольников»

1685 Валлис «Алгебра»

1702 Лейбниц: «*Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием*».

Лейбниц и И. Бернулли широко применяли комплексные числа, НО всякий раз – для конкретной задачи, и всякий раз – спор!

«Genesis triangulorum» — так озаглавлена последняя часть Ad logisticen speciosam, notae priores, содержащая 12 предложений (XLV — LVII). В первых девяти из них Виет строит своеобразное исчисление треугольников, опираясь на формулу композиции форм

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 = \\ = (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2, \tag{3}$$

которая была выведена и использована Леонардо Пизанским (см. гл. I). Форме $x^2 + y^2$ Виет сопоставляет прямоугольный треугольник с основанием x, высотой y и гипотенузой $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; мы будем записывать его в виде (x, y, z) тогда формулу (3) в случае,

если $x : y \neq u : v$, он интерпретирует как формулу «составления» треугольников (x, y, z) и (u, v, w).

Он ставит задачу: «Из двух прямоугольных треугольников «составить» (effingere) третий прямоугольный треугольник». И поясняет далее, что гипотенуза третьего треугольника должна равняться произведению гипотенуз данных.

Согласно формуле (3) такой третий треугольник можно «составить» из данных (x, y, z) и (u, v, w) двумя способами:

$$(x, y, z) \otimes (u, v, w) = \begin{cases} 1)\ (|xu - yv|,\ xv + yu,\ zw), \\ 2)\ (xu + yv,\ |xv - yu|,\ zw) \end{cases}$$

(см. рис. 9).

1 synaereseos – сочетать

2 diareseos – разрезать

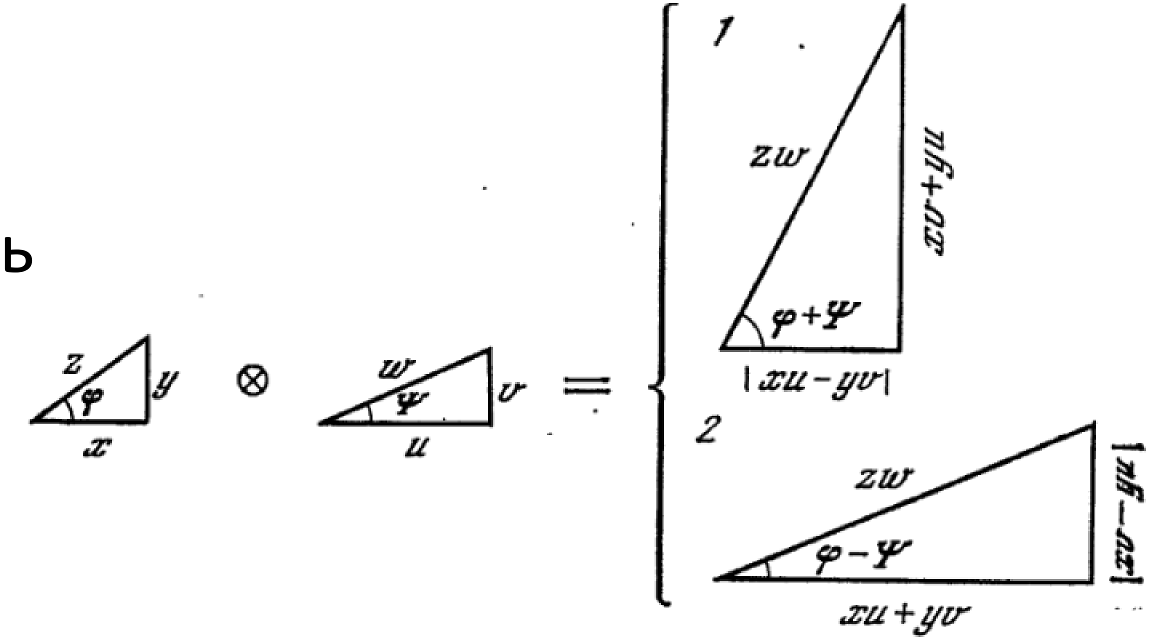


Рис. 9

Из других произведений Виета и из примечаний его ученика Андерсона следует, что Виет дал такие названия результирующим треугольникам потому, что знал, что острый угол при основании первого из них равен сумме острых углов при основании составляемых треугольников, а при основании второго — их разности.

Итак, операция «составление» треугольников распадается на две. Мы будем обозначать первую из них символом $\otimes_1$, а вторую — $\otimes_2$. Постараемся выяснить смысл обеих операций с точки зрения современной математики.

Будем считать, что Виет ставит в соответствие прямоугольному треугольнику (x, y, z) комплексное число $\alpha = x + iy$ с нормой $N\alpha = x^2 + y^2$ и аргументом $\varphi = \mathrm{arctg}\,(y/x)$. Обратно, каждому комплексному числу $\alpha = x + iy$, $x > 0$, $y > 0$, можно поставить в соответствие прямоугольный треугольник Виета $(x, y, \sqrt{N\alpha})$.

Если мы теперь произведем операцию $\otimes_1$ над двумя такими треугольниками (x, y, z) и (u, v, w) с острыми углами при основании φ и ψ, причем если $\varphi + \psi < \pi/2$, то этой операции будет в точности отвечать умножение соответствующих комплексных чисел $\alpha = x + iy$ и $\beta = u + iv$.

Если же $\pi/2 < \varphi + \psi < \pi$, то Виет получает путем композиции форм $xu - yv < 0$, т. е. с нашей точки зрения, комплексное число, лежащее во второй четверти. Однако он ставит ему в соответствие треугольник со сторонами $(|xu - yv|, \ xv + yu, zw)$, т. е. переходит от числа $-a + bi$ $(a > 0, b > 0)$ к числу $a + bi$. Легко видеть, что результат его первой операции можно записать так:

$$\alpha \otimes_1 \beta = \begin{cases} \alpha\beta, & \text{если} \quad 0 < \varphi + \psi < \pi/2, \\ \overline{(-\alpha\beta)}, & \text{если} \quad \pi/2 < \varphi + \psi < \pi. \end{cases}$$

Последовательное вычисление $(x+iy)^n$ позволяет Виету сформулировать формулу Муавра:

1. С пом. $\otimes_1$ Виет находит

$n=2$ $(x;y;z)\otimes(x;y;z)=$

$$=(|x^2-y^2|;\ 2xy;\ z^2)$$

$n=3$ $(|x^2-y^2|;2xy;z^2)\otimes(x;y;z)=$

$$=(|x^3-3xy^2|;\ |3x^2y-y^3|;\ z^3)$$

$n=4$ $(\ldots)\otimes(x;y;z)=$

$$=(|x^4-6x^2y^2+y^4|;(4x^3y-4xy^3|;\ z^4)$$

$n=5$ $(|x^5-10x^3y^2+5xy^4|;\ |5x^4y-10x^2y^3+y^5|;\ z^5)$

Вернемся к пропущенному нами предложению XLVII. В нем Виет ставит задачу: пусть даны два подобных прямоугольных треугольника (x, y, z) и (u, v, w): $x : u = y : v = z : w$, требуется «вывести» из них (deducere) третий прямоугольный треугольник, у которого квадрат гипотенузы равен сумме квадратов гипотенуз заданных треугольников, т. е. $z^2 + w^2$. При этом подразумевается, что стороны результирующего треугольника должны рационально выражаться через стороны данных. С первого взгляда кажется, что Виет определяет здесь третью операцию $\otimes_3$— операцию «выведения», однако в процессе решения оказывается, что эта новая операция сводится к первым двум.

Действительно, пусть $u = kx$, $v = ky$, тогда $z^2 + w^2 = z^2 (1 + k^2)$, т. е. искомый треугольник можно получить, применяя обе операции «составления» $\otimes_1$ и $\otimes_2$ к прямоугольному треугольнику (x, y, z) и одному из треугольников $(1, k, \sqrt{1 + k^2})$ или $(k, 1, \sqrt{1 + k^2})$. Итак, эта третья операция эквивалента умножению комплексного числа $\alpha = x + yi$ на одно из четырех чисел $\beta = 1 + ki$, $\bar{\beta} = 1 - ki$, $\gamma = k + i$, $\bar{\gamma} = k - i$.

Для этой третьей операции Виет определяет обратную операцию. Это он делает в предложении 4 книги 4 трактата «Zetetica»

Задачу он формулирует следующим образом: «Найти два подобных прямоугольных треугольника с заданными гипотенузами, если известен базис «выведенного» из них третьего треугольника, который состоит из высоты первого и базиса второго. Необходимо кроме базиса, чтобы была известна гипотенуза первого из них».

Хотя Виет не говорит об этом в своей теореме, однако молчаливо предполагает, что квадрат гипотенузы третьего треугольника равен сумме квадратов первых двух. Это подтверждается не только последующим решением, но и терминологией: Виет говорит о выведении (deducere), а не «составлении» (effingere), третьего треугольника из двух данных.

Итак, Виет построил безупречно строго оригинальное исчисление треугольников, которое эквивалентно умножению комплексных чисел и их делению. Он вывел формулу, эквивалентную возведению комплексного числа как в обычной $(a + bi)$, так и в тригонометрической форме $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в любую положительную целую степень. При этом он не вводил никаких новых «объектов» или «символов» типа $\sqrt{-1}$.

Сравним комплексные числа-символы Бомбелли с исчислением треугольников Виета. Каждая из этих систем имела свои достоинства и свои недостатки: числа-символы Бомбелли были удобны для производства четырех действий арифметики, по современной терминологии, они составляли поле, т. е. определенные для них два закона композиции обладали теми же «хорошими» свойствами как сложение и умножение рациональных чисел. Однако они не имели «тригонометрической формы», т. е. с ними не были связаны понятия модуля и аргумента. Поэтому они были неудобны для выполнения операции извлечения корня, а также для приложений к тригонометрии.

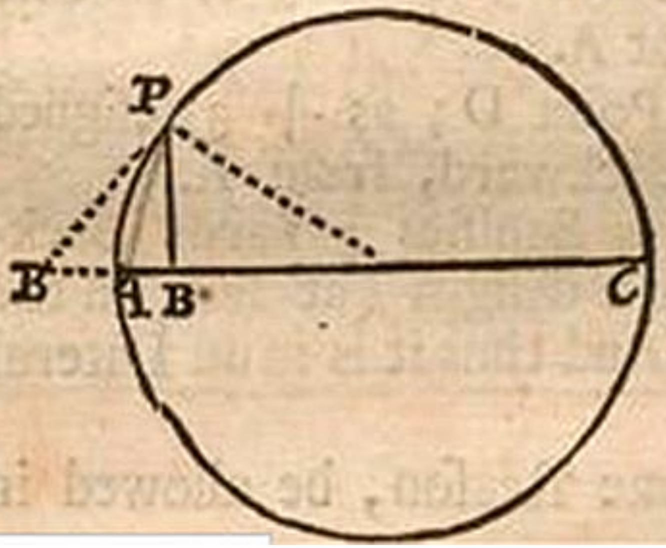
Исчисление треугольников Виета допускало как алгебраическую, так и тригонометрическую интерпретацию, и поэтому оно было сразу же применено для получения ключевых формул тригонометрии. Виет пользовался им и при решении неопределенных уравнений. Однако это исчисление было малооперативным, к тому же над треугольниками был определен только один закон композиции (соответствующий умножению), короче, оно было построено еще в духе античной математики. Поэтому при дальнейшем развитии математики Нового времени предпочтение было отдано оперативным числам-символам. В XVIII в. они получили тригонометрическую интерпретацию, а в прошлом веке, особенно после того, как Гаусс построил арифметику комплексных чисел, они приобрели права гражданства, превратившись в «настоящие» числа.

1685 **John WALLIS** ***Algebra***

CHAP. LXVII.

The ſame Exemplified in Geometry.

WHAT hath been already ſaid of $\sqrt{-bc}$ in Algebra, (as a Mean Proportional between a Poſitive and a Negative Quantity:) may be thus Exemplified in Geometry.



If (for inſtance,) Forward from A, I take $AB = +b$; and Forward from thence, $BC = +c$; (making $AC = +AB + BC = +b + c$, the Diameter of a Circle:) Then is the Sine, or Mean Proportional $BP = \sqrt{+bc}$.

But if Backward from A, I take $AB = -b$; and then Forward from that B, $BC = +c$; (making $AC = -AB + BC = -b + c$, the Diameter of the Circle:) Then is the Tangent or Mean Proportional $BP = \sqrt{-bc}$.

Спор о природе логарифмов

1712–13 **Лейбниц – Иоганн Бернулли**

Логарифмическая функция – функция, удовлетворяющая функциональному уравнению $\log (z \cdot z_1) = \log z + \log z_1$.

Ее дифференциал $d(\log z) = dz/kz$.

Но чему равняется $\log (-1)$?

БЕРНУЛЛИ: $\log x = \log (-x)$, т.е. действительное число, поскольку

1) $d(\log (-x)) = - dx/-kx = dx/kx = d (\log x)$

2) т.к. $(-x)^2 = x^2$, то $2 \log(-x) = 2 \log x$, следовательно равны и их половины.

ЛЕЙБНИЦ: Логарифм от -1 и логарифм от мнимой единицы – мнимые числа, т.к. взяв ряд $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots$,

при $x = -2$ имеем $\ln(-1) = -2 - 2^2/2 - 2^3/3 \ldots$

– расходящийся ряд $\Rightarrow$ нет значения в R.

Разрешил **ЭЙЛЕР** в 1749: логарифмическая функция – **многозначная**:

Т.к. $\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y = (1+\frac{y}{i})^i$

(i у Эйлера означает бесконечность), то можно выразить *y* через *x* следующим образом:

$$y = i(x^{\frac{1}{i}} - 1)$$

И поскольку корней степени *i* в поле комплексных чисел имеется ровно *i*, то и значений логарифма должно быть много.

ДАЛАМБЕР и ЭЙЛЕР неоднократно переходили от $a+b\sqrt{-1}$ к точкам *(a;b)* и обратно; для них комплексные числа – просто удобные символы.

1742 **Эйлер** в доказательстве Основной теоремы алгебры писал: «*Все мнимости имеют вид* $M + N\sqrt{-1}$». **Даламбер** это доказал (на современном ему уровне строгости математики).

1748 **Эйлер** ввел первые функции комплексного переменного.

1768 Эйлер *Универсальная Арифметика*

«***Мнимым количеством*** *называют такое, которое ни больше нуля, ни меньше нуля, ни равно нулю; это, следовательно, нечто невозможное, как, например,* $\sqrt{-1}$ *или вообще* $a+b\sqrt{-1}$ *, поскольку такое количество ни положительно, ни отрицательно, ни нуль… Всякое мнимое количество всегда образовано двумя членами, один из которых есть действительное количество, обозначаемое через M, а другой – произведение также действительного количества N на* $\sqrt{-1}$*; таким образом,* $\sqrt{-1}$ *есть единственный источник всех мнимых выражений*».

90 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

что больше нежели ничево положительными; а все что меньше ничево отрицательными числами изъявляется, и такъ видимъ мы, что корни изъ отрицательныхъ чиселъ ни больше ни меньше нежели ничево, и самое ничево они также не будутъ, ибо о умноженной на о въ произведеніи даетъ о, и слѣдовательно не отрицательное число.

143.

Когда всѣ возможныя числа, какія только представить можно, суть больше и меньше о *или* самой о; то изъ сего видно, что корни квадратные изъ отрицательныхъ чиселъ, въ число возможныхъ чиселъ включены быть не могутъ, слѣдовательно суть числа *не возможныя*, Сіе обстоятельство ведетъ насъ къ познанію такихъ чиселъ, которыя по ихъ свойству суть не возможныя и обыкновенно *мнимыми* числами называются, потому что ихъ въ умѣ только представить можно.

И Эйлер, и Даламбер стали рассматривать функции комплексных переменных в задачах по гидромеханике и вывели их **условия аналитичности** :

1) **1746** (оп. 1748) **Даламбер** (без доказательства):

$$f\,(x+iy) = p + iq, \qquad f(x+iy)\,d(x+iy) = dp + i\,dq$$

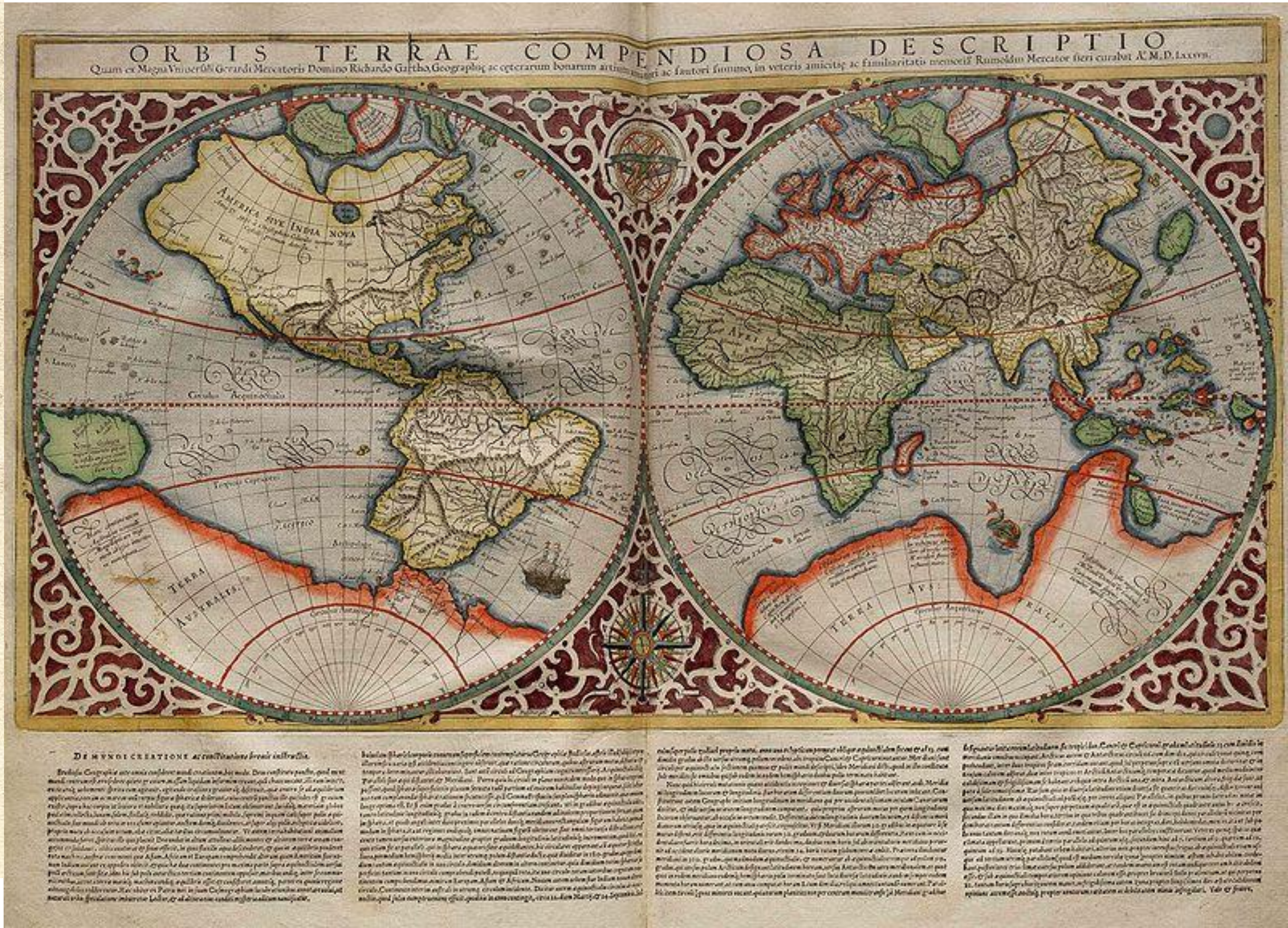
2) 1752 **Даламбер** доказал достаточность: если функция аналитична, то ее действительная и мнимая части удовлетворяют условиям К-Р

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

3) **1755** **Эйлер** доказал необходимость.

4) 1777 **Эйлер** – идея конформного отображения части сферы на плоскость (т.н. проекция Меркатора в картографии – 1569).

<u>Герард</u> **МЕРКАТОР** (1512-1594), фламандский картограф и географ.



Все эти факты не были объединены в общую теорию. Тормозило **отсутствие** **ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОБОСНОВАНИЯ** комплексного числа:

1) большое число сходных попыток математиков-любителей;

2) сдержанное отношение к ним авторитетных математиков.

1799 Каспар **ВЕССЕЛЬ** (1745–1818), датский землемер,

дал полное истолкование комплексного числа как вектора на плоскости, НО на датском языке $\Rightarrow$ работа была практически неизвестна до конца XIX в.

1806 Жан Робер **АРГАН** (1768–1822), швейцарский математик-самоучка, и французский аббат **БЮЭ** (Adrien Quentin Buée, 1745–1825), независимо друг от друга,

предложили интерпретацию комплексного числа как направленного отрезка (Арган еще ввел модуль комплексного числа и в 1814–15 доказал основную теорему алгебры).

Карл Фридрих ГАУСС (1777 – 1855)

Решающее значение в признании комплексных чисел имела **1828–32** «***Теория биквадратичных вычетов***»:

– дал общую теоретическую трактовку и построил арифметику комплексных чисел:

ввел **целые** гауссовы числа, они образуют кольцо, в котором **единицы** ± 1, $\pm \boldsymbol{i}$,

ввел ассоциированные числа, **разложение на множители**, **простые** комплексные числа, **норму** комплексного числа, **вычеты** по комплексному модулю, для **НОД** – обобщение алгоритма Евклида и арифметика, аналогичная обычной;

– сформулировал и частично доказал биквадратичный закон взаимности;

$\Rightarrow$ ***Целые комплексные числа столь же законны***, как и обычные целые числа; с их помощью можно получать и новые доказательства, и новые результаты!

До этого **ГАУСС**:

1) в **1799** в диссертации о доказательстве основной теоремы алгебры неоднократно пользовался **C** → $\mathbf{R}^2$;

2) в **1811** в письме к Бесселю (след. слайд) фактически дал Программу развития ТФКП. Здесь есть:

– интерпретация комплексного числа;

– определение интеграла в комплексной области как предела интегральных сумм;

– интегральная теорема;

– разложимость аналитической функции в степенной ряд.

Осуществил и упорядочил Огюстен-Луи **<u>КОШИ</u>,** заложив **основы общей ТФКП** (хотя сначала его подход к комплексным числам был не геометрическим, а чисто алгебраическим)

К.Ф.Гаусс из письма к Бесселю 1811 г. (опубл. 1880)
по поводу вводимого им интегрального логарифма

Что нужно понимать под $\int \varphi x \cdot dx$ для $x = a + bi$? Очевидно, если хотят исходить из ясных понятий, нужно принять, что x, отправляясь от значения, для которого интеграл должен равняться нулю, посредством бесконечно малых приращений (каждое вида $a+bi$) переходит к $x=a+bi$, и тогда сложить все $\varphi x \cdot dx$.

Итак, смысл (интеграла) вполне установлен. Но переход можно осуществить бесконечно многими способами: так же как совокупность всех действительных величин можно мыслить в виде бесконечной прямой линии, так и совокупность всех величин, действительных и мнимых, можно осмыслить посредством бесконечной плоскости, каждая точка которой с абсциссой a и ординатой b будет представлять величину a+bi. Непрерывный переход от одного значения x к другому $a+bi$ представляется тогда посредством линии и возможен бесконечным числом способов. Я утверждаю теперь, что интеграл $\int \varphi x \cdot dx$ при двух различных переходах всегда сохраняет одно и то же значение, если внутри части плоскости, заключенной между линиями, представляющими переход, φx нигде не обращается в бесконечность. Это прекраснейшая теорема, нетрудное доказательство которой я дам при удобном случае. Она связана с другими прекрасными истинами, относящимися к разложению в ряды.

Огюстен-Луи КОШИ (1789 – 1857)

Родился в Париже, воспитан в строго клерикальных традициях; окончил Политехническую школу; служил путейским инженером в Шербуре, в 1813 вернулся в Париж. С 1816 – академик, профессор Политехнической школы, роялист.

В 1830 после Июльской революции отправился в изгнание вслед за Бурбонами; жил в Турине и в Праге $\Rightarrow$ «Туринские мемуары».

В 1838 вернулся в Париж, НО отказался от присяги новому государственному режиму $\Rightarrow$ никакой государственной должности, преподавал в иезуитском колледже. В 1848 после новой революции до конца жизни работал в Сорбонне (но присяги так и не принес).

Особенности научного творчества Коши: не был классиком формы; большинство публикаций носит спешный, эскизный характер; из **789** (!) публикаций всего 8 книг.

Основные достижения Коши:

1. Работы **по обоснованию анализа** (в тесной связи с преподаванием).
2. Создание основ **общей ТФКП**.

Две фундаментальные проблемы ТФКП:

1. ***Интегрирование в комплексной области по замкнутому контуру***: к **1840** г. постепенно, наощупь, найдена теорема Коши, связывающая интеграл с суммой вычетов внутри контура.

2. ***Разложение произвольной функции комплексного переменного в степенной ряд***, радиус сходимости которого – расстояние до ближайшей особой точки.

I. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

возникает еще в 18 веке (несобственные интегралы 2 рода).

Первый интеграл в комплексной области определил Гаусс (письмо к Бесселю 1811 г.)

Результаты КОШИ в этом направлении:

1814 (оп. 1827) «*Интегрирование по сторонам **прямоугольника** двумя путями*»

1) определение функции, дифференцируемой в точке (частная производная по сопряженному направлению = 0);

2) вывод условий Коши-Римана из единственности производной;

3) определение простого полюса и полюса порядка n;

4) ***вывод***: так как интеграл не зависит от пути интегрирования, то интеграл по замкнутому контуру = 0, если внутри нет особых точек.

1825 «*Мемуар об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами*»

Во многом следует 3 доказательству Гаусса ОТА. Рассматривает **общий случай** (контур – не прямоугольник) и вводит понятие **вычет**а как разности значений интеграла при разных обходах.

1826 Точное **определение вычета** как коэффициента про разложении функции в ряд (см. след. слайд). **Интегральным вычетом** Коши назвал сумму всех вычетов по полюсам внутри контура.

За 1826-1829 Коши написал 16 (!) работ по теории вычетов, в которых рассматривал ее приложения к вычислению интегралов, дифференциальным уравнениям, разложению функций в ряды и бесконечные произведения, к теории уравнений и т. д. Поэтому к **1829** все в основном оформилось и завершилось:

1840 **Основная теорема о вычетах**

$$\int f(z)dz = 2\pi i \sum res\, f(z_k)$$

Точное определение **ВЫЧЕТа** у **Коши** (1826)

«Если, после того, как найдены значения x, обращающие f(x) в ∞, прибавить к одному из этих значений, обозначенному через x_1, бесконечно малое количество ε и далее разложить $f(x_1+\varepsilon)$ в ряд по возрастающим степеням того же количества,

*то первые члены разложения будут содержать отрицательные степени ε и один из них будет произведением 1/ε на конечный коэффициент, который мы и назовем **вычетом** f(x), относящимся к частному значению x_1»*

II. РАЗЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФКП В СТЕПЕННОЙ РЯД,

радиус сходимости которого – расстояние до ближайшей особой точки.

В 18 веке у Эйлера сумма ряда – значение функции в точке. В современной теории сходимости рядов сумма ряда – предел частичных сумм. Была развита **Гауссом**, **Абелем**, **Коши** и их последователями в 19 веке, хотя отдельные критерии были установлены ранее (Лейбниц, Даламбер, Маклорен, Варинг и др.)

1813 **Гаусс** *«О гипергеометрическом ряде»*

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$

– выводит условия сходимости ряда и его расходимости, исследует даже поведение на границе!

– получил признак сходимости, рассматривая отношение двух соседних членов:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\nu}{n} + \frac{\theta(n)}{n^2}, \quad |\theta(n)| < 1,$$

при $\lambda > 1$ ряд сходится (признак недостаточно строго сформулированный Даламбером в 1768);

при $\lambda < 1$ нужно исследовать *v* (в **1843** – признак Раабе:

$$R = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

и если *R >1*, то ряд сходится;
если *R <1*, то расходится).

Свои результаты излагал в лекциях, которые слушал и развивал дальше **Дирихле**, а затем и **Дедекинд**, издавший впоследствии лекции Гаусса и Дирихле.

1826 **Абель** «*Исследование ряда*

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$ *в комплексной области*»

Вводит понятие круга сходимости, доказывает, что сумма сходящегося степенного ряда – непрерывная функция, НО сумма сходящегося ряда непрерывных функций не обязательно непрерывная функция (ошибка Коши) и поэтому важно изучать ***равномерную сходимость***.

1831 **Коши** «*Туринские мемуары*»

Вычислил радиус сходимости $$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Если предел в знаменателе = 0, то ряд сходится на всей плоскости, если $\rho = 0$, то область сходимости ряда – единственная точка.

(позже есть у Адамара в диссертации 1892).

1831 (оп. 1841) Коши «*Упражнения по анализу*»

Интегральная формула Коши для любой точки z области, в которой функция аналитична

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

(здесь C – контур вокруг нуля и ζ – точка внутри контура) и вопрос о том, как искать ***коэффициенты в разложении функции в степенной ряд***:

разложив в ряд $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \frac{z^2}{\zeta^3} + \cdots$ и подставив его в интеграл, получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}\int_C \frac{f(\zeta) z^n}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta.$$

Тем самым Коши доказал, что функция комплексного переменного разлагается в ряд Тейлора.

1843 Пьер Альфонс **ЛОРАН** (1813–1854)

ввел ***сходимость в кольце*** и показал, что любая однозначная аналитическая функция внутри кольца может быть разложена в ряд $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$:

пусть z_0 – особая точка *f(z)*, тогда для любого *z* внутри кольца $r < |z - z_0| < R$ коэффициенты ряда есть

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

(здесь *C* – любая окружность внутри кольца).

Вейерштрасс знал уже в **1841,** но поскольку он свои первые работы не публиковал до 1894 г. (хотя результаты включал в лекции), то они были не очень хорошо известны.

В 30-е и 40е Жозеф **ЛИУВИЛЛЬ** (1809–1882) и Карл Густав **ЯКОБИ** (1804–1851) развивают теорию ***эллиптических функций***.

1850 Виктор **ПЮИЗО** (1820–1883) разработал теорию ***алгебраических функций*** и разложил многозначную алгебраическую функцию по дробным степеням в точках ветвления.

Тем самым разложение ФКП в ряд было прочно обосновано. Появились учебники по ТФКП: с **1857** Вейерштрасс читал курс анализа в Берлине. К этому времени: ***чтобы задать аналитическую функцию, нужно иметь ряд + круг сходимости***.

Курс Вейерштрасса состоял из четырёх семестровых курсов:

1) теория аналитических функций,

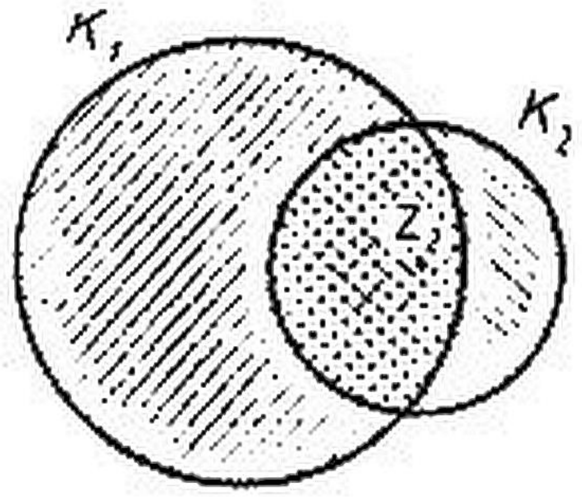
2) теория эллиптических функций,

3) применения эллиптических функций к геометрии и механике,

4) теория абелевых функций.

Он повторил этот цикл **15 раз** – вплоть до летнего семестра 1887 г.

Вейерштрасс: **ИДЕЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ** разложения функции во внешнюю часть круга сходимости:



$$f_a(z) = \sum c_n (z-a)^n \qquad f_b(z) = \sum \frac{f_a^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n$$

1. Благодаря Вейерштрассу идея разложения функций в ряд Тейлора достигла наивысшего расцвета и позволила выделить класс ***аналитических функций*** – однозначных, комплексно дифференцируемых, **представимых степенным рядом в окрестности любой точки** из ООФ.

Комплексные переменные гораздо лучше подходят для изучения аналитических функций, т.к. не всякая бесконечно дифференцируемая функция в $\mathbb{R}$ представима ***сходящимся*** рядом Тейлора.

2. Разные цепочки кругов могут привести к различным значениям функции в одной и той же точке $\Rightarrow$ возникает проблема **многозначных функций** $\Rightarrow$ идеи РИМАНА.

Бернхардт РИМАН (**1826 – 1866**)

Сын деревенского священника, учился в Геттингене: поступил на богословский факультет, но потом перевелся в Берлин, чтобы заниматься математикой. В 1849 г. вернулся в Геттинген к Гауссу: **1851** Докторская диссертация

Основы общей ТФКП

*«Существовавшие **до настоящего времени** методы изучения этих функций имели в своей основе **определение функции посредством формулы**, позволяющей вычислить ее значение для каждого заданного значения аргумента; в нашем исследовании показывается, что в силу свойств, внутренне присущих функции комплексного переменного, в определении такого рода **часть данных есть следствие остальных**, и устанавливается, каким образом число данных может быть уменьшено и сведено строго к необходимому»*

Чтобы восстановить однозначность функции, Риман заставил ее пробегать не просто комплексную плоскость, а системy наложенных плоскостей, образующих «листы» **римановой** поверхности. Особенно – в работе **1857** г. (сл. слайд).

1854 ***О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии*** – метрический подход к построению *n*-мерного пространства.

Но должность профессора получил только в 1859 после смерти Дирихле. Много болел, последние месяцы – в Италии.

1859 ***Гипотеза Римана*** о нулях дзета-функции $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ (Эйлер в 1737) – в отрицательных четных числах (тривиальные нули) и комплексных числах с действительной частью ½ (нетривиальные нули).

До сих пор не решена, хотя к 2004 г. *численными методами* было подтверждено, что более 10^{13} (десяти триллионов) первых нетривиальных нулей дзета-функции Римана удовлетворяют этой гипотезе.

1857 **Риман** ***Теория абелевых функций***

вопрос: в какой мере аналитические функции определяются краевыми условиями?

Риман создал теорию многолистных поверхностей, определяемых алгебраическим уравнением, по аналогии с результатами **Коши** из теории комплексных (мнимых) функций и результатами **Пюизо** из теории алгебраических функций:

1) идея Римана об изображении хода комплексной переменной в виде движения точки на поверхности возникла по аналогии с идеей Коши об изображении хода комплексной переменной в виде движения точки на плоскости. Комплексное интегрирование на поверхности Римана является аналогом комплексного интегрирования Коши на плоскости.

Риман пришел к мысли о том, что выделение однозначной ветви многозначной функции, осуществляемое различными способами, приводит к появлению линий разрыва на поверхности, по аналогии с эквивалентным условием Коши о появлении линий разрыва на плоскости.

Теорема Римана о том, что функция, аналитическая на некоторой поверхности, отображает ее взаимно однозначно и непрерывно на другую поверхность, возникла по аналогии с плоскостной теоремой о том, что функция, аналитическая на некоторой плоскости, является ее взаимно однозначным отображением на другой плоскости.

2) понятия многолистной поверхности с определением точек разветвления поверхности и описанием связи листов, распадающихся на отдельные циклы в окрестности каждой такой точки, между собой возникли у Римана по аналогии с алгебраическими понятиями Пюизо, представленными в теории алгебраических функций. Идея многолистной поверхности Римана являлась превосходным геометрическим комментарием к алгебраическому мемуару Пюизо (1851).

Поверхности Римана – топологическое понятие, но топология еще не развита.