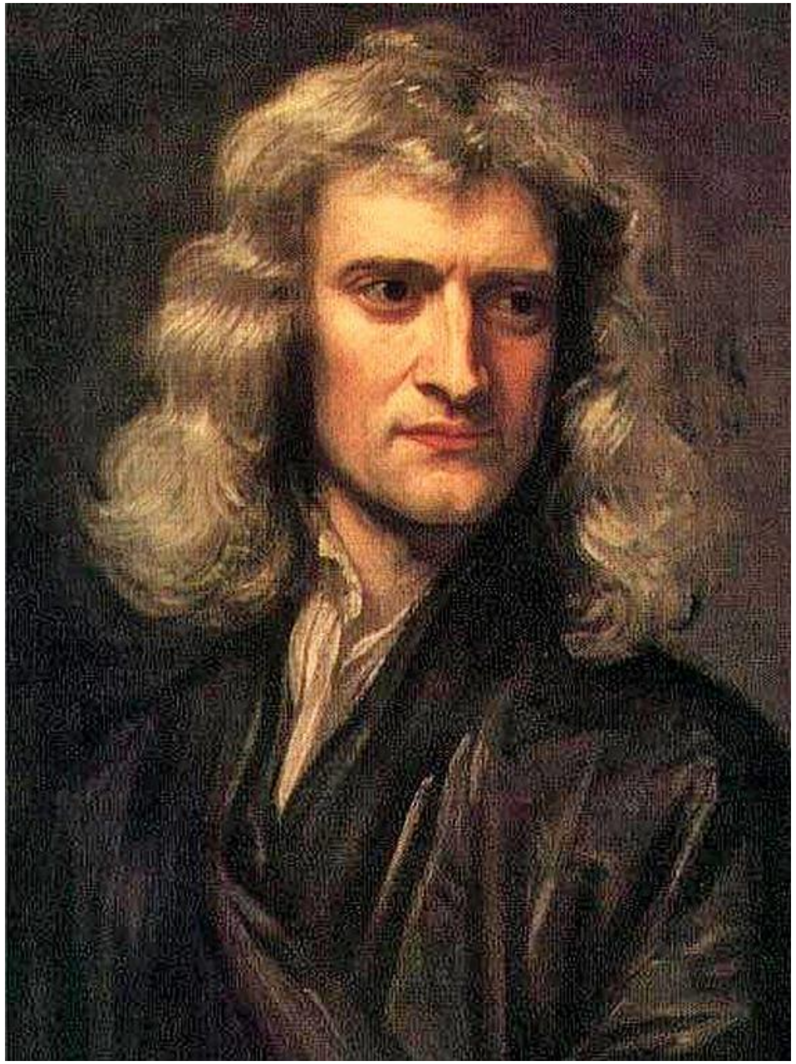
СОЗДАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
в трудах Исаака НЬЮТОНа
и Готфрида Вильгельма ЛЕЙБНИЦа

Исаак БАРРОУ
(1630–1677):

Исаак НЬЮТОН
(1643–1727)



Исаак НЬЮТОН (1643–1727)

Из фермерской семьи в дер. Вулторп (75 км от Кембриджа)

1661–65 учеба в Тринити Колледже $\Rightarrow$ бакалавр

1668 магистр

1669 кафедра (после Барроу), холостяк

Слушал лекции Барроу, но в рукописях их даже не упоминает. Самостоятельно изучал Декарта, Виета, Валлиса (в **1665** – основное внимание **<u>разработке аналитической геометрии и анализа</u>**, включая теорию рядов, что абсолютно чуждо Барроу).

Зима 1664–65 прекращены занятия из-за чумы $\Rightarrow$ **первые результаты**:

– бином Ньютона;

– основные идеи механики Ньютона («*падение земных и движение небесных сил управляется единой силой – силой тяготения*»);

– оптика (открыл дисперсию света, 1668 – первый рефлектор).

Весна 1665 первый вариант исчисления бесконечно малых – ***метод флюксий***

Октябрь 1666 первое систематическое изложение (напечатано 300 лет спустя) «*To resolve Problems by Motion these following Propositions are sufficient*»

3 работы по исчислению бесконечно малых

1669 (оп. 1711) «*Анализ при помощи уравнений с бесконечным числом членов*» (**основа всего анализа – ряды!** + инфинитезимальная концепция)

1670 (оп. 1736) «*Метод флюксий и бесконечные ряды*» (не нашел издателя, давал почитать)

1690–91 (оп. 1704) «*Рассуждение о квадратуре кривых*»

Существуют еще два больших письма к Лейбницу (**1676**), в которых изложены главные результаты в учении о рядах, но о методе флюксий – лишь две знаменитые анаграммы:

1. *По данному уравнению, содержащему сколько-либо флюэнт, найти флюксии, и обратно*.

6a cc d ae 13 e ff 7i 3l 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x

2. Один метод состоит в нахождении флюэнты из уравнения, заключающего вместе с ней и ее флюксию.

«*Другой же заключается в употреблении вместо какой-либо неизвестной величины ряда, из которого можно удобно вывести остальные, и в сопоставлении однородных членов результирующего уравнения для определения членов взятого ряда.*»

Расшифровал в письмах к Валлису (**1692**) после первых статей Лейбница.

Ньютон мало публиковал, т.к. не любил вступать в полемику:

1671 Новый экземпляр зеркального телескопа в Королевское общество.

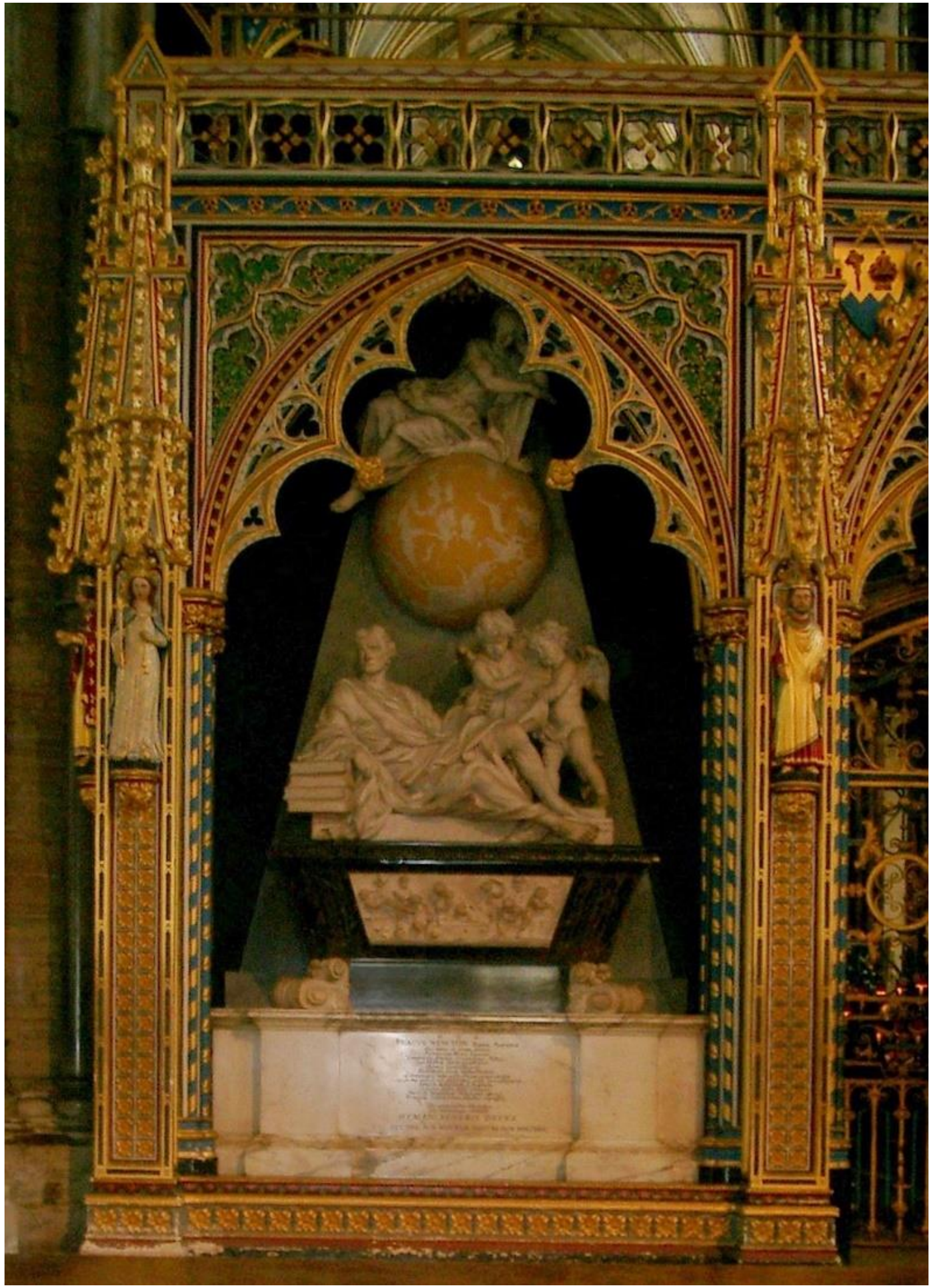
1672 Член Королевского общества и вскоре работа по теории света и цветов. Против выступили Гук, Гюйгенс и др. $\Rightarrow$ Ньютон был очень угнетен.

До написания третьей работы по исчислению б.м. в **1687** Ньютон пишет свои знаменитые **«*Математические начала натурфилософии*»**, в которых есть ряд предложений по теории пределов.

1696 переезд в Лондон, хранитель Лондонского монетного двора (с 1699 – директор, выдающийся администратор).

С 1703 – бессменный Президент Лондонского Королевского общества ($\Rightarrow$ публикация работ, написанных ранее).

С 1699 – спор с Лейбницем о приоритете. Как следствие – отказ англичан от алгоритма Лейбница и невнимание на континенте к достижениям школы Ньютона (более 100 лет).



Эпитафия:

«*Пусть радуются смертные, что существовало такое украшение рода человеческого*»

A. Pope

“*Nature and Nature’s laws*
lay hid in night,
God said: Let Newton be!
And all was light!”

Ньютон был скромен:

“Не знаю, чем я могу казаться миру, но сам себе я кажусь мальчиком, играющим на морском берегу и развлекающимся тем, что время от времени он находит более блестящий камушек или более красивую ракушку, чем обыкновенно, между тем как весь великий океан истины лежит передо мной неисследованным”.

«Если я и видел дальше других, то только потому, что стоял на плечах гигантов».

Биографии Ньютона на русском языке:
Н.Н. Маракуев 1890 (4 издания),
С.И. Вавилов 1943 (3 издания)
http://pyrkov-professor.ru/default.aspx?tabid=188&ArticleId=809
П. Акройд 2007.

3 работы по исчислению бесконечно малых

1. **1669** (оп. 1711) «***Анализ при помощи уравнений с бесконечным числом членов***» (основа всего анализа – ряды!, инфинитезимальная концепция)

2. **1670** (оп. 1736) «***Метод флюксий и бесконечные ряды***» (не нашел издателя, давал почитать)

Флюэнты – функции от независимой переменной (времени), траектории движения.

Флюксии – скорости движений, их порождающих.

Бесконечно малое приращение – момент величины (суть дифференциал).

Позже в бумагах Ньютона нашли все правила дифференциального исчисления.

Ньютон:

«*я буду называть* ***флюэнтами****, или текущими величинами, величины, которые рассматриваю как постепенно и непрерывно возрастающие; обозначать я их буду последними буквами алфавита…*

Скорости, с которыми возрастают вследствие порождающего их движения отдельные флюэнты (и которые я называю ***флюксиями****, или просто скоростями, быстротами) я буду обозначать теми же буквами, но пунктированными…*»

1. Фактически Ньютон работает с одним уравнением, связывающим *x, y, z…*, и находит **производную неявной** функции, т.к. работает с одним уравнением ***F(x, y, z,…) = 0*** и потом рассматривает отношение приращения этой функции к моменту времени:

$$\frac{F(x+\dot{x}0, y+\dot{y}0, z+\dot{z}0, \dots) - F(x, y, z, \dots)}{0} = 0$$

Мы сейчас эту мысль излагаем с помощью частных производных:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \cdots = 0$$

2. Ньютон считал, что интегрирование обратно дифференцированию, поэтому **сначала** вводит понятие **первообразной функции и неопределенного интеграла**, а потом уже определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница.

3. Ньютон предполагал, что каждая флюэнта (функция) может быть разложена в ряд по степеням (необязательно целым) других переменных, и разрабатывал методы и приемы, позволяющие находить любое число таких разложений. В этом **новаторство Ньютона**: применение бесконечных рядов, а следовательно, есть **общий метод + технический прием** интегрирования (почленное).

НО: **нет соображений сходимости**, хотя и использует разные разложения для разных областей:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots \qquad \text{при } x \to 0,$$

Но $$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} \ldots \qquad \text{при } x \to \infty.$$

3. 1690–91 (оп. 1704)

«Рассуждение о квадратуре кривых»

Здесь Ньютон развивает метод первых и последних отношений в попытке устранить малейший след бесконечно малых. Это – попытка возврата к евклидовой модели: надо рассматривать не флюксию, а лишь отношение приращений.

Большого значения обозначениям Ньютон не придавал, позже стремился перенять их у Лейбница.

Готфрид Вильгельм ЛЕЙБНИЦ (1646 – 1716)

Родился в семье профессора морали Лейпцигского университета.

1661–66 изучал философию и юриспруденцию в Лейпциге и Йене; познакомился к натурфилософией Декарта $\Rightarrow$ интерес к математике.

1666 Диссертация на звание доктора юридических наук; стал юристом (советником) при дворе герцога в Майнце.

1672 Поездка в Париж с дипломатическим поручением, знакомство с французскими математиками, первые результаты в теории бесконечных рядов.

1673 Поездка в Лондон, возвращение в Париж и к осени 1675 (в 29 лет!) освоил основные принципы и символику математики.

1676 Ганновер – библиотекарь и советник герцога (составление истории дома Гвельфов).

1684 **Первая заметка о дифференциальном исчислении:** опубликовал свое дифференциальное исчисление **в серии *коротких* статей** в журнале *“Acta Eruditorium”* (Лейпциг)

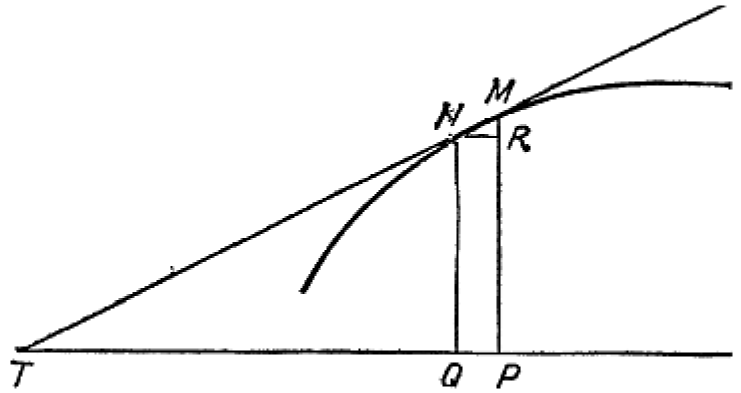
1700 Берлинская АН + иностранный член Парижской АН.

1711–16 Встречи с Петром Великим.

Старость, спор о приоритете, холодные отношения с третьим герцогом, холост, болезни $\Rightarrow$ смерть не заметили…

1. 1684 «*Новый метод для максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления*».

Всего 7 стр. с опечатками и ошибками.



– создает исчисление разностей и определяет дифференциал с помощью характеристического треугольника ***NMR***, подобного треугольнику ***TNQ***:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{NQ}{TQ} = \left(\frac{y}{\text{подкасательная}}\right),$$

т.е. определение дифференциала у Лейбница: $dy = \dfrac{y}{\text{подкасательная}} \cdot dx$

– формулирует правила дифференцирования (без доказательств): намерен создать «подлинную алгебру бесконечно малых».

– применяет все к нахождению касательных, максимумов-минимумов, точек перегиба + изучение выпуклости-вогнутости с помощью второго дифференциала.

Позднее добавил дифференциалы степени и логарифма и исследовал кривизну при помощи соприкасающейся окружности.

Ввел дифференциалы высших порядков, которыми при вычислениях пренебрегал.

2. «*О глубокой геометрии и анализе неделимых и бесконечных*» 1686

– впервые ввел знак интеграла; указал на взаимнообратный характер операторов интегрирования и дифференцирования;

– дал правила интегрирования многих элементарных функций.

ИТАК: 1) основа исчисления Лейбница – понятие дифференциала $\Rightarrow$ фундаментальная операция – вычисление разностей;

2) Суммирование – операция обратная $\Rightarrow$ таблицу интегралов выводит из таблицы дифференциалов. При этом площади, объемы есть суммы бесконечно малых элементов, но значение этих сумм получается обращением дифференцирования.

У Ньютона в основе неопределенный интеграл (площади, объемы вычисляются исходя из скорости их изменения). **У Лейбница** – определенный интеграл.

До 1690 г. его исчисление называлось «сумматорным», лишь позже Иоганн I Бернулли ввел термин «интеграл». Но отчетливое понимание неопределенного интегрирования присутствует. Так, в 1694 г. при интегрировании дифференциального уравнения ввел произвольную константу, которую нужно находить из начальных условий.

Сильные стороны метода Лейбница:

1) простота алгоритма;
2) элегантные обозначения;
3) продуманный формализм действий, позволяющий не думать о природе объектов.

«То, что человек, сведущий в этом исчислении может получить прямо в трех строках, другие ученейшие мужья принуждены были искать, следуя сложными обходными путями»

Спор за приоритет.

Английская школа (Беркли, Маклорен, Тейлор, Симпсон, Ланден) прoясняла понятия бесконечно малой величины и т.п.

Школа Лейбница (братья Бернулли, Лопиталь, Даламбер, Эйлер) встала на формальную точку зрения: **дифференциальное исчисление связали с идеей функции**, на этой основе его стали развивать $\Rightarrow$ появились дифференциальные уравнения (обыкновенные и с частными производными), дифференциальная геометрия и т.п.

1) широкая гласность;
2) удобная символика;
3) детальная разработка оперативной стороны анализа;
4) персональный фактор: забота о пропаганде и готовность к общению.

Николай **БЕРНУЛЛИ** (1623–1708)
городской советник в Базеле

Якоб I (1654–1705) Николай (1662—1716) **Иоганн I** (1667–1748)

Николай I (1687–1759)

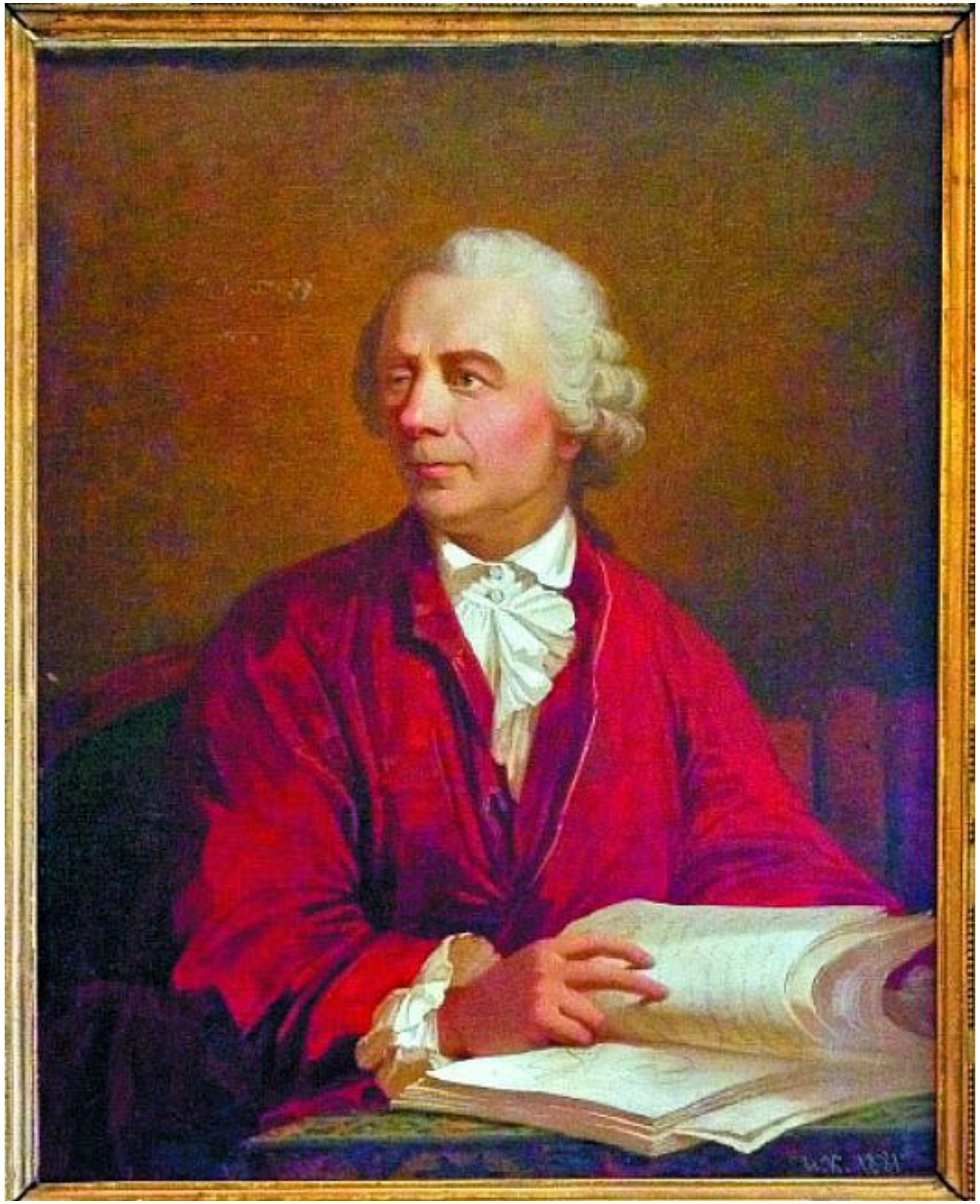
Николай II (1695–1726) **Даниил I** (1700–1787) **Иоганн II** (1710–1790)

Иоганн III (1744–1807) Даниил (1751–1834) **Якоб II** (1758–1789)

Еще при жизни Ньютона и Лейбница стало очевидно, что созданное исчисление – лишь преддверие новой области математики, ее элементарная часть. Самой главной трудностью стала **необходимость такого представления функциональной зависимости, которое позволяет применять операции нового исчисления**. Поэтому первейшей задачей анализа бесконечно малых стала **задача создания теории функций**.

В середине XVIII в. с блеском осуществил Эйлер:

«***Весь анализ бесконечно малых вращается вокруг переменных величин и их функций***».



1637 Рене **Декарт**: ***Функция*** – это ***<u>уравнение</u>*** $\Rightarrow$ ограничивал лишь алгебраическими выражениями.

1668 Николай **Меркатор** открыл разложение в ***<u>бесконечные ряды</u>***:

Логарифм – это площадь под гиперболой:

т.к. $\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$, то $\boldsymbol{ln\,(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots}$

1668 Джеймс **Грегори**, Джон **Валлис**: $ln\frac{1+x}{1-x}$, $ln\frac{1}{1-x}$.

1670е Исаак **Ньютон**:

Функция – это ***<u>ряд</u>***, но **необязательно по целым степеням** неизвестной (бином Ньютона): 1) нашел ряд для $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{p/q}$;

2) исследовал обратные тригонометрические функции и нашел их ряды;

3) обращением рядов получил ряды для e^x, $\sin x$, $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ **,** для дуг эллипса и др.**;**

$\Longrightarrow$ разрабатывал методы и приемы оперирования с бесконечными рядами (спец. аппарат). Таким образом открыты и изучены новые трансцендентные функции.

Лучшее определение функции в то время: Дж. **Грегори 1667**

***Функция** – это величина, полученная из других величин с помощью последовательности алгебраических операций или «**любой мыслимой операции**».*

Впервые термин «**функция**» появился у **Лейбница** в **1673** в неизданной работе «Обратный метод касательной или рассуждения по поводу функций»:

*«Я называю **функциями** всякие части прямых линий, которые получают, проводя бесконечные прямые, соответствующие неподвижной точке и точкам кривой, каковы: абсцисса, ордината, хорда, касательная или нормаль, подкасательная или поднормаль… и бесконечное множество других, какие можно себе представить и построение которых более сложно…»*

$\Longrightarrow$ геометрический подход, кривая как синоним «одновременного изменения».

В математику вошла задача поиска неизвестных законов изменения.

Жак Адамар: «***Число перестало быть главным математическим объектом, им стал закон изменения, функция***».

1718 Иоганн **Бернулли**:

«***Функцией переменной величины*** *называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных*». Обозначил фх.

Леонард **ЭЙЛЕР** понимал функцию **в двух смыслах**: узком и широком.

1748 «**Введение в анализ бесконечных**»

– первый трактат, в котором в основу положено понятие функции;

– порывает с геометрическими кривыми: «весь анализ бесконечных вращается вокруг переменных количеств и их функций»;

– в узком смысле: «*Функция переменного количества есть* ***<u>аналитическое выражение</u>****, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств*».