

**ПРЕДЫСТОРИЯ СОЗДАНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.**

Создание дифференциального и интегрального исчисления – основное событие математики XVII века

В XVII веке происходит расцвет *инфинитезимальных методов*, поскольку изучение законов движения приводит к появлению большого числа новых задач:

- 1) в механике изучается мгновенная скорость и направление движения (\Rightarrow касательная);
- 2) артиллерия \Rightarrow траектория движения снаряда;
- 3) движение планет, небесная механика \Rightarrow длина траекторий, спрямление кривых;
- 4) оптика: свет сквозь линзу \Rightarrow угол между световым лучом и нормалью и т.п.

Интегральное исчисление начиналось с:

(I) – греческого метода исчерпывания;

(II) – методов квадратур XVII века.

I: Арабы овладели методом исчерпывания еще в IX в. (Сабит ибн Корра ($n=1/2$), Аль-Хайсам ($n=4$)), но в Европе он почти не был известен, лишь:

1586 Симон Стевин (1548–1620, фламандский инженер) свободно пользовался методом Архимеда для определения центров тяжести плоских криволинейных фигур, опуская доказательство от противного единственности предела;

Лука Валерио (1552–1618) (ученик венецианского издателя трудов Архимеда) сформулировал общую теорему вместо доказательства от противного.

IIa Метод неделимых

Иоганн КЕПЛЕР (1571–1630) отбросил классические методы и в духе Николая Кузанского обратился к интуитивным приемам (без обоснований).

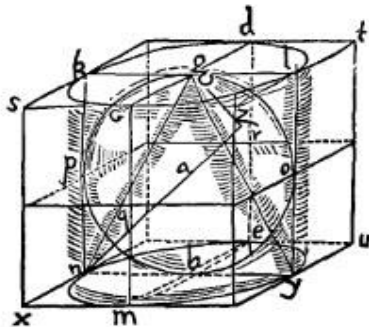
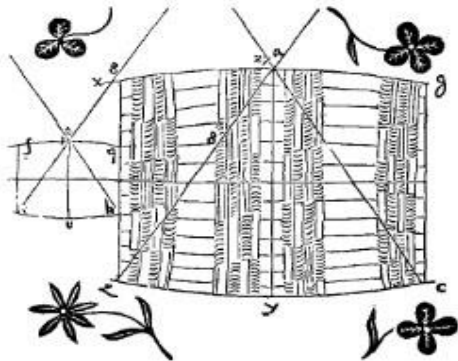
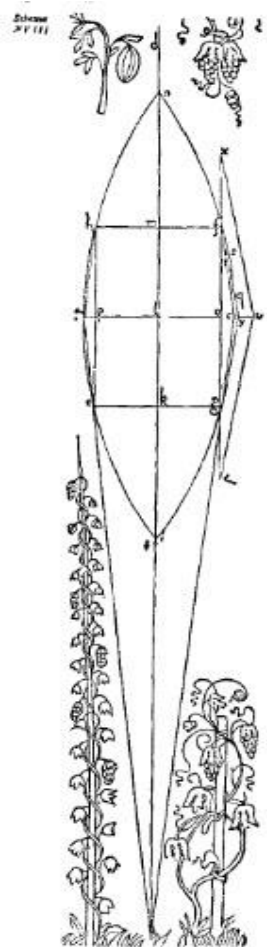
Например, окружность – правильный многоугольник с бесконечным числом сторон, площадь которой есть бесконечная сумма площадей бесконечно малых треугольников.

В общем случае у Кеплера **площадь (объем) есть бесконечная сумма бесконечно малых элементов той же размерности** (идеи Демокрита).



1615 «Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки. С присоединением дополнения к архимедовой стереометрии»

Свой метод Кеплер применил к вычислению объема тел вращения (конус, шар, тор, яблоко, груша, айва, земляника и т.д.) и нашел объемы 92 тел вращения:



- объем ШАРА как бесконечное множество конусов, сходящихся вершинами в центре, с основаниями, являющимися точками на поверхности шара;
- объем ТОРА как площадь сечения, умноженная на серединную окружность;
- объем ЛИМОНА получается при вращении кругового сегмента и т.п.

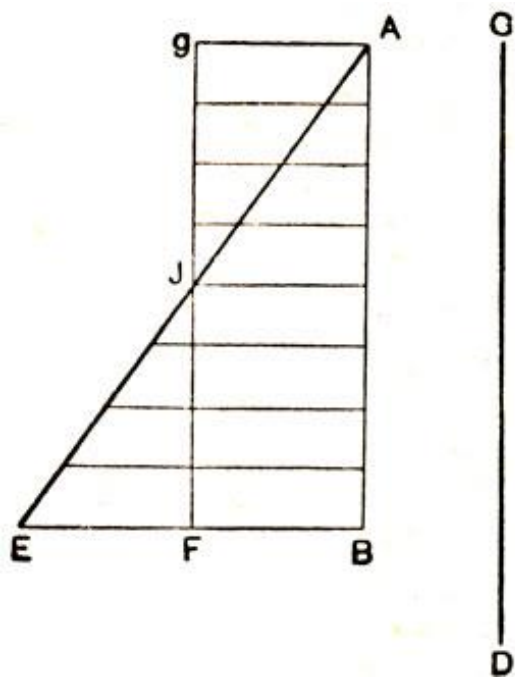
ВАЖНО: методы у Кеплера **НЕСТРОГИЕ!**

Галилео Галилей (1564–1642)

Задумал математический труд о неделимых, но... **парадокс**: «целых квадратов столько же, сколько и целых чисел».

Отсюда **вывод**: «свойства равенства, а также большей и меньшей величины не имеют места там, где идет дело о бесконечности».

Тем не менее Галилей использовал неделимые в некоторых рассуждениях, не называя явно:



1638 «Беседы»

Теорема: «При равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью путь пройдёт за то же время, что и при равномерном со скоростью, равной половине конечной скорости при равноускоренном движении».

Здесь АВ – время, горизонтальные отрезки – моменты скорости \Rightarrow путь – площадь (как сумма линий).



Бонавентура КАВАЛЬЕРИ (1598–1647)

1635 *«Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного»*

Нет определения непрерывных: это просто бесконечно малые элементы, составляющие площади и объемы:

«Линия образована из точек как ожерелье из жемчужин, площадь из линий – как ткань из нитей, а тело из плоскостей – как книга из страниц».

Отдавал отчет в трудностях при суммировании бесконечного числа бесконечно малых величин, но о природе бесконечного не рассуждал и **не** пытался площадь заменить **бесконечной суммой бесконечно малых элементов**. Вместо этого определял отношение площадей фигур, неделимые которых находятся в постоянном отношении.

Пример: теорема о площади параллелограмма: диагональ параллелограмма делит его на два треугольника в отношении 1:1.

Разницу подходов Кеплера и Кавальери можно проиллюстрировать на примере квадратуры круга.

Кавальери все задачи на квадратуры свел к площади криволинейной трапеции.

В отличие от Кеплера считал свои неделимые *лишенными* всякой *толщины*. Тогда криволинейная трапеция есть **сумма всех ординат**, и таким образом Кавальери вычислил интеграл от степенной функции на отрезке $[0, a]$ для **первых девяти** показателей.

Недостатки:

- отсутствие символики;
- громоздкость и искусственность приемов;
- требование, чтобы «неделимые» находились на равном расстоянии.

Последователи: Э. Торричелли (1608–1647), Д. Валлис (1616–1703).

II 6 Другие методы

Пьер ФЕРМА (1601–1665)

В 1621 появился перевод на латинский язык Диофанта (Де Мезириак). Ферма увлекся, ограничив область решений множеством целых чисел.

Около **1629** «*Квадратура любых кривых*»

$y = x^k (k \in \mathbf{N})$ – письмо Жилу Робервалю.

Получена методом интегральных сумм Архимеда:

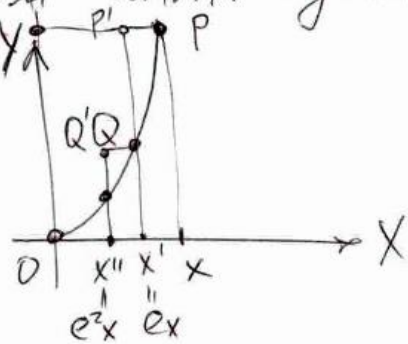
- устраивает разбиение отрезка с малым коэффициентом;
- вычисляет площади нужных прямоугольников и показывает, что их сумма – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, сумма которой легко вычисляется.
- чтобы толщина прямоугольников равнялась 0, нужно взять коэффициент = 1, откуда вытекает нужное выражение для площади.

~ 1629 Квадратура любых кривых $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)
(тисом Робервэлю)

методом шит. сумм Архимеда

Пример

$n = 2$



1) устроим разбиение $[0; x]$:

$$x; x' = ex; x'' = e^2x; \dots$$

где $0 < e < 1$

2) Вычислим площади прямоугольников:

$$S_{xx'p'p} = S_{oxy} - S_{ox'p'y} = x \cdot x^2 - ex \cdot x^2 = x^3(1-e)$$

$$S_{x'x''q'q} = ex \cdot (ex)^2 - e^2x \cdot (ex)^2 = (ex)^3(1-e)$$

$$\Rightarrow \bar{S} = x^3(1-e) \underbrace{\left(1 + e^3 + e^6 + \dots\right)}_{\text{беск. уб. геом. прогр.}} = x^3(1-e) \cdot \frac{1}{1-e^3} =$$

$$= \frac{x^3}{1+e+e^2}$$

3) Чтобы толщина прямоуг. = 0, нужно $e = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow S = \frac{x^3}{3}$$

Уже здесь у Ферма: – присутствует понятие **системы координат**

– каждой кривой ставится в соответствие некоторое **уравнение** как ее «специфическое свойство» (рождение аналитической геометрии 1636–37 г.);

– используется символика Виета, поэтому можно геометрические задачи формулировать в терминах алгебраических уравнений \Rightarrow **характер** методов Ферма **ОБЩИЙ**.

В **1642** г. Ферма получил **обобщение** этого результата для **любого положительного рационального** показателя (сообщил Кавальери в 1644, но метод в секрете!), применив кроме своего разбиения новый вычислительный прием, использующий оценку с помощью двух сумм:

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^m k^n$$

В результате Ферма вычислил (**1642** г.)

$$\int_0^x x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \forall \alpha \neq -1, \quad \alpha \in \mathbb{Q}$$

Полное изложение метода Ферма – после **1657** г. (опубликовано в 1679, после смерти):

«О преобразовании уравнений мест... с приложением способа употребления геометрической пропорции к квадрированию бесчисленных парабол и гипербол».

Назвал его логарифмическим.

Таким же образом Ферма вычислил и площадь под гиперболой:

$$\int_x^{+\infty} x^{-\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{p-q} x^{\frac{q-p}{q}},$$

Метод Ферма – наиболее общий и содержит все необходимое для введения определенного интеграла, **НО** всякий раз вычисляет *конкретную* площадь, ни разу не пользуется пределом. И все же это – шаг вперед.

В этом духе интеграционные методы развивали:

Блез Паскаль (1623–1662);

Джеймс Грегори (1638–1675).

Работы последователей Ферма снизили интерес к методу неделимых.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

к началу XVII в. были разработаны гораздо слабее.

Задачи о касательных и экстремумах появляются позже задач о квадратурах. У древних касательная имеет с кривой одну общую точку, но в XVII в. взгляд на нее меняется: *касательная – предельное положение секущей*, диагональ подвижного параллелограмма скоростей.

После **1637** Ферма

«Метод отыскания максимумов и минимумов»

Формулирует правило: пусть $f(x)$ – целый алгебраический многочлен.

Затем: 1) составляется $f(x+h)$;

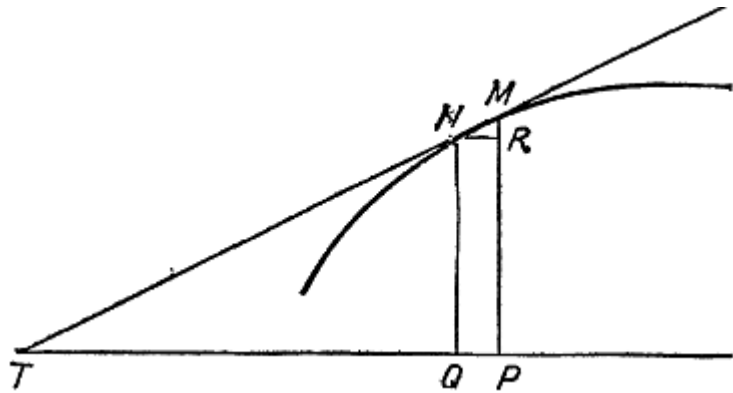
2) пусть h – мало, тогда $f(x+h) \approx f(x)$;

3) в получающемся уравнении сокращаются равные члены;

4) обе части делятся на h и все, что содержит h как множитель, отбрасывается;

5) **оставшееся уравнение и дает экстремумы.**

Приведя простой пример задачи на максимум, Ферма пишет: **«Отыскание касательных в данных точках каких-либо кривых мы приводим к вышеизложенному»** и дает пример построения касательной к параболе, изложенный очень сжато:



аргументу функции x давалось приращение h , а затем $f(x+h)$ «приравнивалось» к расстоянию до касательной MP . Тогда $\frac{f(x+h)}{TQ+h} = \frac{f(x)}{TQ} \Rightarrow$

$$f(x+h) = \left(1 + \frac{h}{TQ}\right) f(x)$$

$$f(x) + A(x)h + B(x)h^2 + \dots = \left(1 + \frac{h}{TQ}\right) f(x)$$

Отсюда Ферма получает $A(x) = \frac{f(x)}{TQ}$ или $TQ = \frac{f(x)}{A(x)}$.

Поскольку Ферма работал с многочленами, то разложение в ряд было конечным и все действия можно обосновать строгими неравенствами.

Общего правила **НЕ** формулирует.

Даже Декарт не совсем точно понял метод Ферма, и была обширная переписка, полная как резких и даже несправедливых обвинений, так и новых мыслей и идей.

Ферма объяснял и обобщал свой метод:

- 1640** с помощью строгих неравенств доказал, что «допускается замена ординат кривых ординатами их касательных»;
- 1660** установил эквивалентность двух бесконечно малых величин: элемента дуги и элемента касательной \Rightarrow мог проводить касательную к любым кривым, а не только алгебраическим.

Методы Ферма имели большой успех в Англии, где широко использовались бесконечные ряды \Rightarrow **тенденция к арифметизации математики:**

- Джон Валлис (1616–1703) создал почленное интегрирование;
- Джеймс Грегори (1638–1675): «Узнав о рядах Ньютона, посылаю свои ряды».

Противник тенденции Исаак БАРРОУ (1630–1677): – желал вернуться к геометрической точке зрения и евклидовой строгости: разработал способ нахождения касательной более общий, чем у Ферма;

– первым заметил: задачи о касательных и о квадратурах взаимнообратны!

– получил аналог нашей теоремы, позволяющей вычислять интегралы при помощи первообразных, НО в громоздкой геометрической формулировке.

ИТАК: к середине XVII века Ферма разработал аналитические методы, а Барроу обнаружил фундаментальную связь задач.

Оставалось упорядочить.