ЕВРОПА.
Средние века и эпоха Возрождения.

В 395 г. происходит **распад Римской империи** на Западную и Восточную. Столицей Восточной Римской империи остается Константинополь (столица Римской империи с 330 г.), **однако** вплоть **до конца V в**. эти два государства могут рассматриваться **как единое целое**. В IV в. христианство становится государственной религией сначала Восточной, а затем и Западной Римской империй, и с 391г. язычество оказывается там под запретом. На смену рабовладельческому строю приходит феодализм.

<u>Эпоха господства феодализма</u>: с V–VI вв. до XV в.

1) раннее Средневековье (конец V– середина XI вв.) – века невежества, экономический спад и политический хаос; потеряны практически все связи с Восточной Римской империей.;

2) высокое или классическое Средневековье (середина XI–XIII вв.);

3) позднее Средневековье или раннее Новое время (XIV–XVI вв.).

В период раннего Средневековья происходит **создание новых государств**, тщетные попытки создать империи (империя Карла Великого распалась со смертью ее создателя). Исключением здесь становится **Священная Римская империя**, которая просуществовала с 962 по 1806 гг. Она была основана германским королем Оттоном I и в разные годы включала территории современных Австрии, Германии, Чехии, некоторых регионов Италии и Франции.

В это время общество носило **примитивный аграрный характер**. Практически все **связи с Востоком были прерваны** (арабы лишили Византию выхода к Средиземному морю), церковь объявила **культуру греков и римлян порождением язычества**. В IV-V вв. ведется **преследование светских школ и ученых**, однако **позже** христианство все же принимает науку, и именно **монастыри становятся новыми центрами просвещения**, хотя церковь по-прежнему преследует научную и философскую мысль, отличающуюся от ортодоксальных.

В раннем Средневековье было написано несколько книг о **Семи свободных искусствах –** тривиум (риторика, грамматика, диалектика) + квадривиум (арифметика, геометрия, гармония, астрономия).

Автор наиболее популярных учебников по квадривиуму **БОЭЦИЙ (480–524 гг.)** был государственным деятелем при дворе остготского короля Теодориха Великого и философом-неоплатоником. Учился в Афинах в Академии платоников, был казнен по обвинению в государственной измене.

В тюрьме написал очень популярное в Средние века философское сочинение «Утешение в философии» и перевел на латинский язык «Арифметику» Никомаха и часть «Начал» Евклида; в перевод Никомаха он включил свои числовые примеры, а в книге Евклида довольствовался геометрическими примерами и не приводил строгих доказательств.

Одним из первых математиков Западной Европы был ирландский монах **БЕДА Достопочтенный (ок. 673—735).** Он был автором хронологического трактата, посвященного вычислению дня Пасхи.

День Пасхи устанавливается правилами, которые приводят к решению в целых числах неопределенных линейных уравнений: Пасха празднуется в первое воскресенье после полнолуния, приходящегося на день весеннего равноденствия или ближайший вслед за этим день.

Определенный день недели приходится в разные годы на разные числа, повторяясь с 28-летним циклом (солнечный круг), фазы Луны повторяются с периодом в 19 лет (лунный круг) $\Rightarrow$ итоговый период Пасхи — 532 года (великий круг).

Епископ АЛКУИН (735–804 гг.) англо-саксонский учёный, богослов и поэт, один из вдохновителей Каролингского Возрождения.

Работал при дворе Карла Великого. Уроженец Йорка, был учеником друга Беды Достопочтенного. Организатор школ и автор ряда руководств. Из них наибольший интерес представляют «*Задачи для оттачивания молодого ума*» (*Propositiones ad acuendos juvenes*), среди которых имеется ряд задач индийского происхождения.

In this painting by *Jules Laure*, **Charlemagne** is surrounded by his principal officers as he welcomes **Alcuin** who shows him manuscripts.

X век – начало изменений в Европе.

1. ***Герберт*** (940 – 1003) – воспитатель, затем советник императора Оттона III, впоследствии – ***папа Сильвестр II*** (999–1003);

– путешествовал в **Испанию** (967–969), посетил там арабские школы и познакомился с индо-арабской системой счисления;

– в 972–982 гг. преподавал в Реймсе предметы квадривиума. Занимался математикой, логикой, философией и астрономией. Около 994 г. соорудил в Магдебурге солнечные часы.

– построил (возродил) счетную доску абак, ему приписываются работы «*Книга о делении чисел*» и «*Правила счета на абаке*»; умение делить любые большие числа в глазах церкви свидетельствовало о том, что он продался дьяволу.

– его бумаги собирался разбирать в Москве Воланд.

2. ***Сицилия*** оставалась в привилегированном положении – коренная культура + византийская оккупация (с 535 г.) + близость арабов; религиозная терпимость; в ходу четыре языка и т.д.:

Сицилия с древнейших времен была эллинской колонией (IX–VIII вв. до н.э.) с богатыми культурными городами. Эллинская традиция сохранялась здесь и после завоевания Римом (конец III до н.э.). Сарацины высадились в Сицилии в 827 г. и к 878 г. завершили ее покорение. Они были вытеснены оттуда норманнами (1060–1092), которые и основали Сицилийское королевство.

И арабы, и норманны проявляли религиозную терпимость, поэтому на острове свободно исповедовались христианская и мусульманская религия, были в ходу четыре языка: греческий, латинский, арабский и древнееврейский.

3. В X в. контакты с Востоком еще редки, но в XI-XIII вв. приобретают системный характер, чему немало способствуют **Крестовые походы**. Постепенное **развитие ремесел служит прогрессу науки и культуры**.

<u>XI–XII вв. – пробуждение Европы</u>.

Цивилизация упрочилась, демографический подъем, отсюда – освоение новых земель, развитие городов.

Эпоха всемогущества церкви, ее монашеских орденов, которые стали первыми культурными центрами христианского Запада.

Церковь возводила величественные соборы, открывала первые школы.

Латынь – язык официальной церкви – стала языком эрудитов и позже **научным языком**.

До XII в. поддерживалась атмосфера догматизма, мистицизма и рабского следования слову Священного писания. Преобладали учения о грехе, аде, о спасении, а не исследования и наблюдения природы. Цель – подготовка к потусторонней жизни.

Появление университетов

Конец XI в. – **Италия**:
Салерно (Schola Medica Salernitana), основа – медицина, существует до сих пор;
1088 университет в **Болонье**.
Уже в **1117** г. **Оксфорд**ский университет обучал студентов.
Конец **XII** в. **Париж**ский университет;
1209 г. **Кембридж** и затем др. (Саламанка, Монпелье, Падуя, Неаполь, Тулуза…)
XIV в. Прага, Краков, Вена, Гейдельберг, Лейпциг, Базель…

Во всех университетах было 4 факультета: **искусств, богословия, права** и **медицины.** Сначала все студенты 3-4 года учились на факультете искусств, а потом еще 8 лет по выбору.

Семь свободных искусств: тривиум (грамматика, риторика, логика) + квадривиум.

XII век – век великих переводов

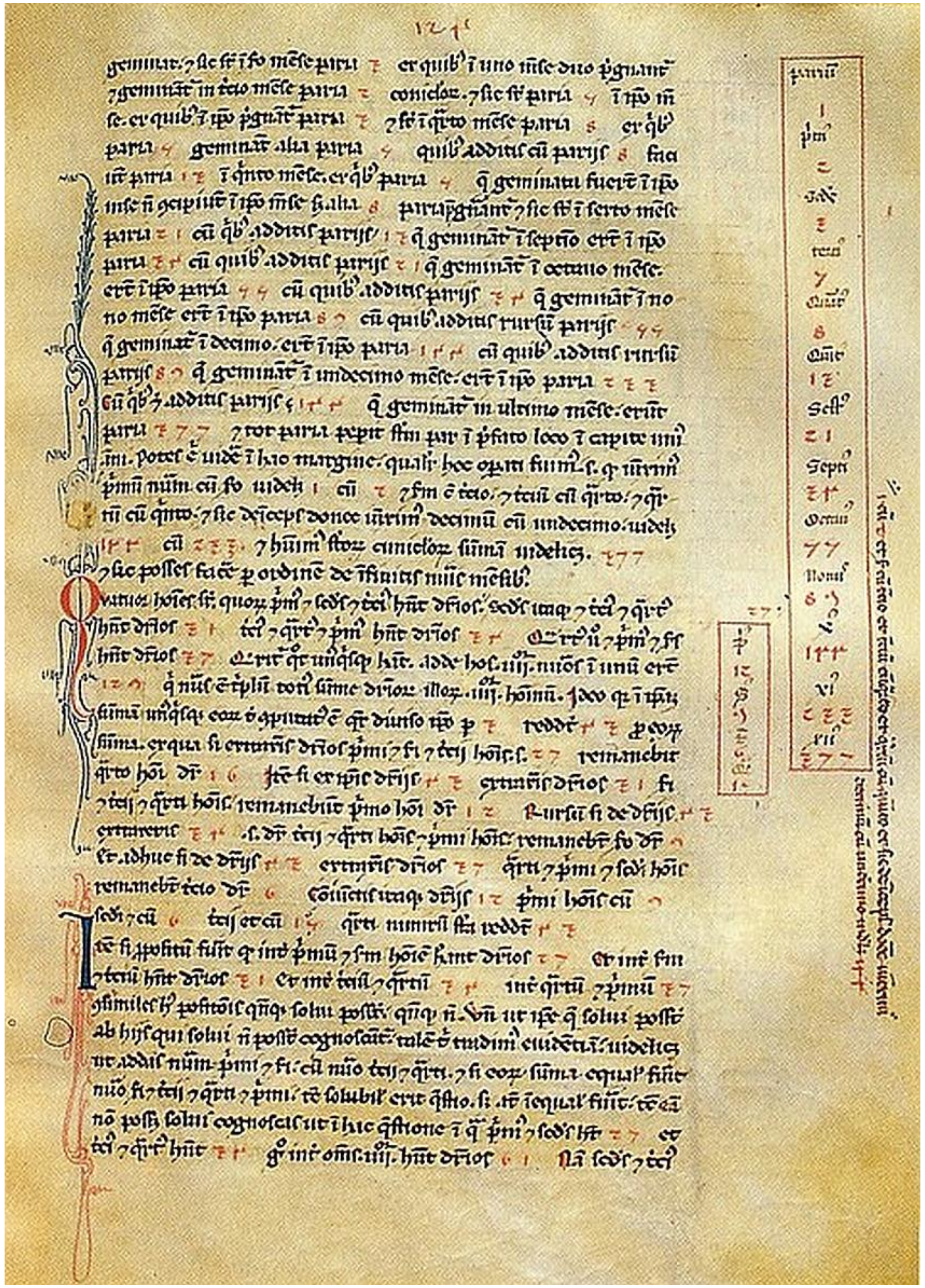
1. **АДЕЛАРД** из Бата (1075–1160) англичанин, автор «Правил абаки», переводил с арабского на латынь “Начала” Евклида, “Альмагест” Птолемея, астрономические таблицы Аль-Хорезми.
2. **В Испании** существовало много центров перевода с арабского на латынь (напр., в Толедо).
3. **Роберт** из Честера, работая в Сеговии, перевел “Алгебру” Аль-Хорезми (1145).
4. **Платон из Тиволи** (XII в.) перевел с арабского на латынь «Четверокнижие» Птолемея.
5. **ГЕРАРДО КРЕМОНСКИЙ** (1114–1187) – автор перевода более 80 рукописей с арабского (переводы Сабита ибн Корры “Начал” и “Данных” Евклида, трудов Архимеда, Аполлония, Менелая, Птолемея, Гиппократа, Галена, Аристотеля и др.) Работал в Ломбардии.

Леонардо ПИЗАНСКИЙ (около 1180 – после 1250)

Леонардо родился в большом торговом городе-республике Пизе. Его часто называют **ФИБОНАЧЧИ**, т.е. сын Боначчи — Доброго. Настоящая его фамилия была, по-видимому, Биголло.

Отец Леонардо был нотариусом республики Пиза. Вскоре после рождения сына он был послан со служебным поручением в Алжир. Когда Леонардо исполнилось 12 лет, отец выписал его к себе, чтобы познакомить с делами, особенно коммерческими расчетами.

Леонардо совершил путешествие в Египет, Сирию, Грецию, Сицилию и Прованс, знакомясь с различными способами счета и началами алгебры. Он убедился, что счет по десятичной позиционной системе (который он называл индийским) намного превосходит все другие. Вернувшись в Пизу, он более серьезно занялся математикой. Он познакомился с “*Началами*” Евклида, и, соединив эти знания с тем, что узнал от арабов, составил в **1202 г. “*LIBER ABACI*”**.



1202 г. “LIBER ABACI” – энциклопедия математических знаний

- вводится индийская позиционная система счисления с нулем;
- рассматриваются ряды (арифметические и геометрические прогрессии);
- вводится ряд Фибоначчи: 1+1+2+3+5+8+…+144=376 – первый возвратный ряд;
- квадратные уравнения по аль-Хорезми;
- неопределенные уравнения (новые приемы для некоторых задач Диофанта);
- терминология как перевод с арабского.

Уровень знаний в книге намного превышает знания той эпохи.

В «**Книге абака**» 15 (книг) глав:

1-5 посвящены арифметике целых чисел на основе новой нумерации. Фибоначчи отмечает преимущество индо-арабских цифр над римскими, а также приводит признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 7 и 11.

6, 7 посвящены действиям над смешанными числами и дробями. Дроби приводятся к общему знаменателю рациональнее, чем у арабов — через НОК.

8-10 содержат приемы решения задач коммерческой арифметики, основанные на пропорциях.

11 посвящена задачам на сплавы и смешение. Решение дается в форме рецептов.

12 содержат задачи на суммирование рядов: арифметическая и геометрическая прогрессии, ряд квадратов и первый возвратный ряд: *сколько пар кроликов родится в год от одной пары, если каждая пара приносит ежемесячно по паре, способной в свою очередь через месяц к размножению, и ни одна пара не погибает*.

В **13 книге** решаются различные задачи, приводящие к **линейным** уравнениям. Для их решения используются метод ложного положения, словесно-алгебраическое решение и прямое решение, про которое Леонардо пишет, что оно арабского происхождения.

В **14 книге** на числовых примерах излагаются способы извлечения квадратных и кубических корней.

В **15 книге** решаются задачи на применение теоремы Пифагора и **квадратные уравнения**. Излагаются методы решения квадратных уравнений **по ал-Хорезми**.

Впоследствии математики широко черпали из «Книги абака» задачи и приемы решения, которые в XV–XVI вв. разошлись по многочисленным рукописям. Примечательно, что задачи Леонардо можно встретить и в знаменитой «Алгебре» Л. Эйлера (1768).

Второе издание книги в 1228 г. Леонардо посвятил своему другу *Микеле Скотто* (*Майкл Скот,* ок.1180–ок.1235), придворному астроному и астрологу императора **Фридриха II**, тому самому, которого впоследствии Данте поместил в своем “Аде” в “*Божественной комедии*” в четвертый ров вместе с другими обманщиками, выдававшими себя за прорицателей:

А следующий, этот худобокой,

Звался Микеле Скотто и большим

В волшебных плутнях почитался докой.

(Песнь XX, строфы 115–117)

Боккаччио (1313–1375) упомянул его как некроманта в “*Декамероне*”:

“…*был в нашем городе великий мастер некромантии, по имени Микеле Скотто, ибо он был из Шотландии; именитые люди, из которых лишь немногие остались теперь в живых, оказывали ему великие почести*”.

До наших дней дошло лишь второе издание “***Liber abaci***”.

Это посвящение говорит также о связи Леонардо с Сицилийским двором Фридриха II Гогенштауфена (1194–1250), первого из просвещенных деспотов Италии, которыми впоследствии было так богато Возрождение.

Но даже в то жестокое время Фридрих прославился своей жестокостью — рассказывали, что он разрешал проводить анатомические исследования на преступниках (живых людях). Но наряду с этим он покровительствовал литературе и наукам и сумел окружить себя учеными и философами.

Связь Леонардо с сицилийским двором весьма примечательна, так как **Сицилия наряду с Испанией играла большую роль в передаче арабской науки в Западную Европу**. Но в отличие от Испании здесь имели место непосредственные контакты и с эллинской наукой.

При блестящем дворе Фридриха устраивались научные диспуты. В одном из них прославился Леонардо Пизанский. Придворный философ Фридриха II – магистр Иоганн Палермский предложил ему два вопроса, которые в современных обозначениях выглядят так:

1) найти корень уравнения $\boldsymbol{x^3 + 2x^2 + 10x = 20}$;

2) найти рациональные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + 5 = u^2} \\ \boldsymbol{x^2 - 5 = v^2} \end{cases}$$

Леонардо провел тщательные исследования обеих задач и написал две книги “***Flos***” (*Цветок*) и “***Liber quadratorum***” (*Книга квадратов*), вышедшие в 1225 г. и посвященные решению соответственно первого и второго вопросов. Хотя эти книги были изданы типографским способом только в 1862 г., они были хорошо известны математикам Средневековой Европы, которые почти дословно повторяли изыскания Леонардо.

“*Flos*” : Найти корень уравнения $\mathbf{x^3 + 2x^2 + 10x = 20}$

1. Перепишем уравнение в виде $\frac{x^3}{10} + \frac{x^2}{5} + x = 2$.

Очевидно, что существует нецелый положительный корень, больший 1, но меньший 2.

2. Он не может быть дробным.

Пусть $x = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь, тогда $p^3 = 20q^3 - 10pq^2 - 2p^2q$.

Все члены правой части делятся на *q* , следовательно, *p* делится на *q*, что противоречит выбору *p* и *q* .

Отметим, что метод доказательства Леонардо вполне общий. С его помощью в алгебре позже была доказана важная теорема теории целых алгебраических чисел:

Приведенное алгебраическое уравнение с целочисленными коэффициентами, не имеющее целого корня, не имеет дробных (рациональных) корней.

3. Корень не может иметь вид $\sqrt{n}$.

Представим корень в виде $x = 2\frac{10-x^2}{10+x^2}$.

Если бы $x = \sqrt{n}$, то имеем $\sqrt{n} = 2\frac{10-n}{10+n}$,

т.е. иррациональное число должно равняться рациональному, что невозможно.

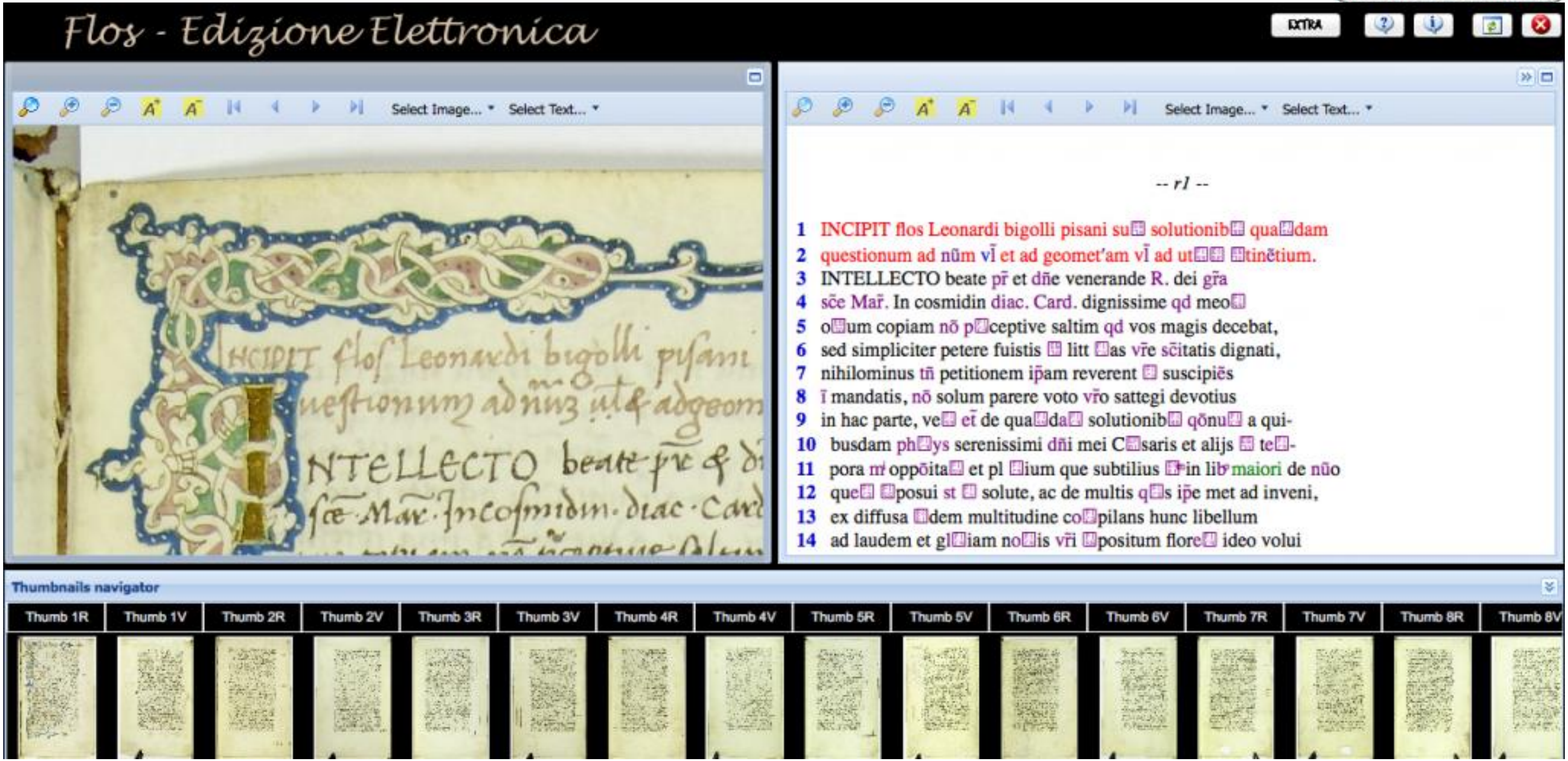
4. Леонардо показывает, что корень не может иметь вид $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ или $\sqrt{n} - \sqrt{m}$.

5. Леонардо дает ответ с точностью шестого шестидесятеричного знака:

$$x = 1; 22^{I} 7^{II} 42^{III} 33^{IV} 4^{V} 40^{VI} .$$

Каким способом Леонардо вычислил это значение до сих пор остается неизвестным. Однако этот результат только примерно на 1 ½ сексты, т.е. на 3$\cdot$ 10^{-11}, превосходит истинное значение корня.

Есть сайт с форумом, посвященный исследованию этой работы Леонардо Пизанского



INCIPIT flos Leonardi bigolli pisani sup[er] solutionib[us] quar[um]dam questionum ad nu[meru]m u[e]l ad geometriam u[e]l ad utru[m]q[ue] p[er]tinentium.

INTELLECTO beate p[at]re & d[omi]ne uenerande R. dei gra[tia]
s[an]c[t]e Mar. in cosmidin. diac. Card. dignissime q[uo]d meor[um]
opuz copiam no[n] p[re]ceptiue saltim q[uo]d uos magis decebat.
sed simpliciter petere fuistis plus[quam] u[est]re s[an]c[t]itatis dignati.
nihilominus t[ame]n petitionem ipsam reuerent[er] suscipies
i[n] mandatis. no[n] solum parere uoto u[est]ro satt[eg]i deuotius
in hac parte. uer[um] et de quar[um]da[m] solutionib[us] q[uesti]o[n]um a qui-
busdam phis serenissimi d[omi]ni mei Cesaris & aliis p[ro]te-
posita m oppositar[um] & p[lu]r[i]uz que subtilius q[uam] in lib[r]o de nu[mer]o   i maiori

et q[uonia]m cu[m] eq[ua]lib[us] equalia addu[n]t[ur] o[mn]ia fiu[n]t eq[ua]lia. si utriq[ue] parti
addant[ur] cat[er]e $\frac{4}{15}$ 3 & c[um] dragme $\frac{1}{30}$ 12 & $\frac{11}{10}$ unius rei
equales cau[si] $\frac{4}{15}$ 3 & dragmis 17. & q[uonia]m cu[m] ab equalib[us]
eq[ua]lia auferu[n]t[ur] q[uod] remanet s[un]t eq[ua]lia. si ab utraq[ue] parte
auferu[n]t[ur] dragme $\frac{1}{30}$ 12 remanebu[n]t $\frac{11}{10}$ unius rei eq[ua]les
cau[si] $\frac{4}{15}$ 3 & dragmis 4 minus xxx^a uni dragme. q[uo]r[um] ut
reducere h[ec] in equalitate uni rei tm. mult[iplicaui] cau[si] $\frac{4}{15}$ 3
dragmas 4 minus xxx^a p. 10. & diuisi utraq[ue] multiplicatio[n]e[m]
p. 11. & inueni q[uo]d res una eq[ua]lis est cau[si] 3 minus xxx^a tertia parte
te une cat[er]e & dragmis $\frac{26}{33}$ 3. s[er]uaui h[ec]. & addidi p[ri]mu[m]
nu[meru]z cu[m] s[ecund]o & t[er]tio. s[unt] cau[si] una cu[m] dragmis $\frac{1}{2}$ 8 & t[er]tia una
minus medietate rei & cu[m] dragmis $\frac{1}{6}$ 14 & duab[us] t[er]tiis
uni cat[er]e minus medietate uni rei & h[abe]bu[n]t dragmas $\frac{2}{3}$ 22

Предисловие к “**Liber Quadratorum**”

“Когда, о знаменитейший князь господин Фридрих, магистр Доминик привел меня в Пизе к ногам Вашего величества, магистр Иоганн Палермский, встретив меня, предложил мне вопрос, о котором я напишу ниже и который не менее относится к геометрии, чем к числам, а именно, найти квадратное число, которое будучи увеличено или уменьшено на пять, всякий раз порождало бы квадратное число.

После размышления над решением этого вопроса, которое я уже нашел, я увидел, что источники этого решения лежат во многих вещах, которые относятся к квадратным числам самим по себе и в их отношении друг к другу. Кроме того, узнав из разговоров в Пизе и других, которые дошли до меня из императорского двора, что Ваше величество соблаговолило прочесть книгу, которую я написал о числах, и что Ему иногда доставляет удовольствие слышать изящные рассуждения, относящиеся к геометрии, я вспомнил о вопросе, который я сформулировал и который был мне предложен при Вашем дворе Вашим философом.

*Я взял этот вопрос в качестве темы и предпринял составление настоящей работы, которую решил назвать “**Книгой о квадратных числах**”. Теперь я прошу Вашей снисходительности в том случае, если книга содержит что-либо более или менее верное и необходимое, так как помнить обо всем и ни в чем не ошибаться свойственно божественному уму более, чем человеческому, и нет никого, кто свободен от недостатков и способен учесть все”.*

Задача Иоганна Палермского состояла в нахождении квадрата, который после прибавления к нему 5 или вычитания 5 из него, давал бы снова квадраты. Для нас это означает, что нужно в поле рациональных чисел решить систему $\begin{cases} x^2 + 5 = u^2 \\ x^2 - 5 = v^2 \end{cases}.$

Прежде, чем приступить к решению системы, Леонардо решает две задачи из “*Арифметики*” Диофанта (II_8 и II_9):

(1) Разложить квадрат на два других квадрата.

(2) Разложить сумму двух квадратов, не являющуюся квадратом, в сумму двух других квадратов.

Диофант «Арифметика».
Задача 8 книги II

Заданный квадрат разложить на два квадрата.

Пусть надо разложить 16 на два квадрата. Положим, что первый равен x^2, тогда второй будет $16 – x^2$; следовательно, $16 – x^2$ тоже равно квадрату.

Составляю квадрат из некоторого количества x минус столько единиц, сколько их найдется в стороне 16-ти; пусть это будет $2x – 4$. Тогда сам этот квадрат равен $4x^2 + 16 – 16x$; он должен равняться $16 – x^2$.

Прибавим к обеим частям равенства недостающее и вычтем подобные из подобных. Тогда $5x^2 = 16x$ и x окажется равным 16/5.

Один квадрат 256/25, а другой 144/25; сложенные вместе они дают 400/25, или 16, и каждый будет квадратом.

На современном математическом языке требуется решить уравнение

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (*)$$

Фактически Диофант делает подстановку

$$\begin{cases} x = t \\ y = kt - a \end{cases}, \quad \text{где } k \in \mathbb{Q}.$$

Тогда (*): $\quad t^2 + (kt - a)^2 = a^2$, откуда находим

$$x = t = a\frac{2k}{k^2+1},$$

$$y = a\frac{k^2-1}{k^2+1}.$$

Геометрически подстановку Диофанта можно рассматривать как пучок прямых с угловым коэффициентом *k*, проходящих через точку (*0; –a*) данной окружности (*).

В задаче 19 книги III Диофант отмечает, что существует бесконечно много решений.

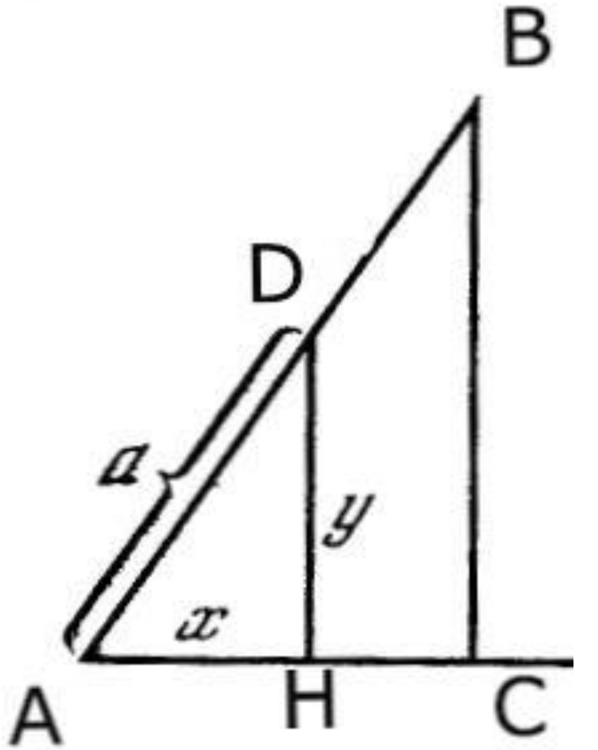
Ферма (XVII): для кубов и более высоких степеней это утверждение неверно.

Метод решения этих задач у Леонардо отличен от решения Диофанта и является совершенно оригинальным.

Для нахождения рациональных решений уравнения (1) $x^2 + y^2 = a^2$ Леонардо предлагает взять любой прямоугольный треугольник *ABC* с целыми или рациональными сторонами *(p, q, r)* и, отложив на гипотенузе отрезок, равный стороне заданного квадрата, через подобие треугольников получает одно из возможных решений задачи.

Поскольку прямоугольных треугольников бесконечное число, то и решений будет бесконечное множество.

После решения этой задачи Леонардо **формулирует в общем виде формулу композиции**, которая была известна и в древнем Вавилоне, и Диофанту, и арабским математикам. Чтобы использовать ее в решении второй задачи Диофанта, Леонардо впервые ДОКАЗЫВАЕТ ее с помощью геометрической алгебры.



Он формулирует ее следующим образом:

«*Если предложены четыре непропорциональные числа и если первое меньше второго, а третье меньше четвертого, и если сумму квадратов первого и второго умножить на сумму квадратов третьего и четвертого и ни одна из сумм не будет квадратом, то возникшее число ровно двумя способами равно двум квадратным числам*».

На современном математическом языке:

пусть $x<y$, $u<v$, тогда $(x^2+y^2)(u^2+v^2)=$

$$= (xu+yv)^2+(xv-yu)^2=(xu-yv)^2+(xv+yu)^2 \qquad (*)$$

и существует ровно два способа разложить произведение, стоящее в левой части, в сумму квадратов, если x^2+y^2 и u^2+v^2 не являются квадратами.

После громоздкого геометрического доказательства Леонардо продолжает изучение этого утверждения:

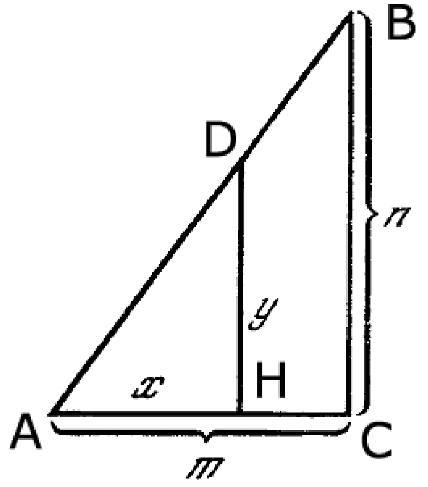
а) если $x^2 + y^2 = z^2$, то существует три способа разложения в сумму квадратов, т.к. к уже выведенным двум можно добавить еще один

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (z^2)(u^2 + v^2) = (zu)^2 + (zv)^2;$$

б) если же $x^2 + y^2 = z^2$ и $u^2 + v^2 = w^2$, то существует четыре способа разложения в сумму квадратов, т.к. добавить можно еще два:

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (zu)^2 + (zv)^2 = (xw)^2 + (yw)^2.$$

Для решения другой задачи Диофанта (2) $x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \neq \square$ Леонардо использует кроме данного еще два прямоугольных треугольника: с помощью треугольника с катетами *a* и *b* и некоторого другого (не подобного данному) рационального треугольника (*p, q, r*) он строит



прямоугольный треугольник с катетами из формулы (*): $n = ap + bq$, $m = |aq - bp|$, на гипотенузе которого откладывает отрезок $AD = \sqrt{a^2 + b^2}$, тогда катеты получившегося треугольника и есть искомые величины.

Решение задачи Иоганна Палермского Леонардо проводит без вспомогательного прямоугольного треугольника, хотя арабские математики, в отличие от Диофанта, при решении системы «двойных равенств» типа

$$\begin{cases} x^2 + y = u^2 \\ x^2 - y = v^2 \end{cases}, \qquad (**)$$

использовали прямоугольный треугольник с гипотенузой $\boldsymbol{x}$ и его учетверенную площадь, поскольку если взять $x^2 = p^2 + q^2$, а $y = 4S = 2pq$, то, очевидно, что уравнения системы выполняются.

В задаче Иоганна Палермского *y = 5*. Леонардо провел теоретико-числовое исследование вопроса, какие значения может принимать выражение площади S прямоугольного треугольника, стороны которого являются **натуральными** числами: она должна делиться на 6 (докажите это сами!), а значит, *y* должно делиться на 24. Но число 5 на 24 не делится ⇒ целочисленного решения не существует.

Чтобы получить рациональное решение, Леонардо сначала использует представление квадрата суммой последовательных нечетных чисел (!):

Пусть $$v^2 = \sum_{n=1}^{v} (2n-1), \qquad x^2 = \sum_{n=1}^{v+k} (2n-1), \qquad u^2 = \sum_{n=1}^{v+k+l} (2n-1)$$

Из уравнений системы (**) следует $y = u^2 - x^2 = x^2 - v^2$, откуда $(v+k+l)^2 - (v+k)^2 = (v+k)^2 - v^2$ ⇒ можно искать решение в виде $v = |\, l^2 + 2lk - k^2 \,|,\ x = l^2 + k^2,\ u = k^2 + 2lk - l^2$ и

$$y = 4lk(k+l)(k-l).$$

Это выражение для *y* и есть вышеупомянутая учетверенная площадь прямоугольного треугольника арабских математиков. Леонардо это выражение называет ***конгруумом*** и изучает его свойства. Минимальное значение конгруума 24 получается при *k* = 2, *l* =1.

Возвращаясь к задаче Иоганна Палермского (*y = 5*), Фибоначчи для отыскания рациональных решений ищет конгруум вида $5\alpha^2$. Он требует, чтобы $l,\ \ 5+l,\ \ 5-l$ были квадратами, что выполняется для $l = 4 \ \Rightarrow \alpha^2$ = 144 ⇒

$$\begin{cases} (12x)^2 + 5\cdot(12)^2 = (12u)^2 \\ (12x)^2 - 5\cdot(12)^2 = (12v)^2 \end{cases}.$$

Формулы для решений этой системы при $k = 5$, $l = 4$ дают

$$12x = k^2 + l^2 = 41,\ 12u = k^2 + 2kl - l^2 = 49,\ 12v = l^2 + 2lk - k^2 = 31,$$

откуда получается рациональное решение задачи: $x = 41/12$, $u = 49/12$, $v = 31/12$.

Но Леонардо на этом не останавливается, а ставит вопрос: «При каком значении конгруума задача имеет рациональные решения?» и утверждает, что конгруум, который равен *4S*, а, значит, и сама **площадь прямоугольного треугольника, не может быть квадратом!**

Нетрудно показать, что это утверждение эквивалентно **Великой теореме Ферма для четвертых степеней**. Леонардо пытался доказать свое утверждение, однако это ему не удалось.

Нам важно заметить, что это утверждение было **открыто** **за 400 лет до Ферма**! Вопросом о том, какие значения может принимать конгруум, интересовались многие математики XVIII-XIX вв. (А. Дженокки, Э. Люка и др.)

Интересно, что Ферма сформулировал это предложение так же, как и Леонардо: в своих замечаниях на полях “*Арифметики*” Диофанта он записал: “**Площадь прямоугольного треугольника в числах не может быть квадратом**”.

Ферма привел полное доказательство этой теоремы, и это единственное теоретико-числовое доказательство, которое дошло до нас от Ферма. Проведено оно “*методом спуска*”.

Томас БРАДВАРДИН, архиепископ Кентерберийский (ок.1290–1349)

учился и преподавал в Оксфордском университете. Известны три его сочинения по математике и одно по механике:

1. Теоретическая арифметика — сокращенная арифметика Боэция.

2. Теоретическая геометрия — более оригинальная работа. Ее высоко ценили математики XIV-XV вв., она выдержала три издания. Здесь рассматриваются звездчатые многоугольники, получаемые из правильных выпуклых многоугольников (начиная с пятиугольника) путем продолжения их сторон до пересечения; изопериметрические свойства многоугольников, круга и шара, а также учение о пропорциях.

3. Трактат о континууме — написан между 1328 и 1335 гг., посвящен учению о непрерывном и дискретном: приводит пять различных концепций континуума.

4. Трактат об отношениях или об отношениях скоростей при движениях — работа по механике.

Николай ОРЕМ (ок.1323–1382) преподавал в одном из колледжей в Париже, с 1377 г. – епископ в Лизьё. Один из первых математиков, писавших не на латыни, а на французском языке. Автор переводов на французский. Написал ряд трудов по астрономии, механике, математике, философии, натурфилософии.

Математические работы:

1. «***Вычисление пропорций***» (*Algorismus proportionum*). Впервые использовал дробные показатели степеней и фактически подошёл к идее логарифмов.

2. «***Вопросы по геометрии Евклида***» (*Questiones super geometriam Euclidis*). Помимо геометрических вопросов исследует бесконечные ряды и прогрессии, приводит остроумное доказательство расходимости гармонического ряда.

3. «***Трактат о конфигурации качеств***» (*De configuratione qualitatum*) содержит «теорию широт форм», первые примеры геометрической фигуры, имеющей бесконечную протяжённость, но тем не менее конечную площадь. Спустя три века теорию таких фигур начали строить Ферма и Торричелли.

Эпоха ВОЗРОЖДЕНИЯ:

1) Проторенессанс 2-ая половина XIII вв. – XIV в. ;
2) Раннее Возрождение начало XV – конец XV в.;
3) Высокое Возрождение конец XV – первые 20 лет XVI в.;
4) Позднее Возрождение середина – конец XVI в.

Рост городов-республик привёл к росту влияния сословий, не участвовавших в феодальных отношениях: мастеров и ремесленников, торговцев, банкиров. Всем им была чужда иерархическая система ценностей, созданная средневековой, во многом церковной культурой, и её аскетичный, смиренный дух. **Отличительная черта эпохи Возрождения** — светский характер культуры, расцвет интереса к античной культуре, «**возрождение»** ее **высоких идеалов гуманизма и антропоцентризма**, рассматривающих человека, его личность, его свободу, его активную, созидающую деятельность как высшую ценность и критерий оценки общественных институтов.

В это время зарождается буржуазия, возникает мануфактурное производство, книгопечатанье; в Европе появляется дешевая бумага, порох, компас, часы. Это — эпоха Великих Географических открытий, расширения торговли.

Распространение новых идей проходило медленно.

- Университеты находились под патронажем церковных организаций, старавшихся сохранить существующие представления о мире и противившихся влиянию идей гуманизма.
- Ученые работали в одиночку.
- Латынь – язык науки – была доступна далеко не всем. (*Пачоли, Галилей и Декарт сознательно писали свои работы на разговорных языках*).

Огромное значение для распространения новых знаний имели:

1434 г. – изобретение **книгопечатания**

1478 г. Тревизо «Коммерческая арифметика»;

1482 г. Евклид «Начала»;

1494 г. Лука Пачоли «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности».

1453 г. – **падение Византии** и переезд ученых на Запад.

Иоганн Мюллер (Региомонтан) (1436–1476)

выдающийся немецкий астролог, астроном и математик; учился в Лейпцигском и Венском университетах. Основал в Нюрнберге **научную типографию** и одну из первых в Европе обсерваторий.

«***О всех видах треугольников***» (оп. 1533) – первый в Европе труд по **тригонометрии**. Первая книга посвящена решению плоских треугольников. Во второй книге – теорема синусов для плоских треугольников и рассматривается ряд задач, приводящих к квадратным уравнениям. Третья книга излагает основы сферической геометрии. Её содержание в значительной мере совпадает со «Сферикой» Менелая и др. арабских авторов. Центральная теорема четвёртой книги – сферическая теорема синусов. В пятой книге доказывается теорема, эквивалентная сферической теореме косинусов.

Никола Шюке (ок.**1450**— ок.**1490**) – французский математик, оказавший влияние на развитие алгебры. Наиболее известен вводом в общее употребление названий больших чисел: *биллион, триллион* и т. д.

В его работе «***Наука о числах в трех частях***» (1484), написанной по-французски, изложены правила работы с рациональными и иррациональными числами, а также учение об уравнениях. Шюке сопоставил арифметическую и геометрическую прогрессию: записав их друг под другом, он заметил, что произведению нижних членов (геометрическая прогрессия) соответствует сумма членов, стоящих над ними —предвосхищение свойств логарифмов. Развитие идеи логарифмов продолжил Михаэль Штифель и завершил Джон Непер.

Шюке также первым предложил использовать отрицательные и нулевые показатели степени и обозначать показатели степени неизвестной величины малыми литерами справа вверху. Символика Шюке богаче и ближе к современной, чем обозначения его современника Луки Пачоли.