АРАБСКАЯ МАТЕМАТИКА
VII–XV вв.

Закат античной математики

Христианство выступало против языческой науки и культуры: «*Нам после Христа не нужна никакая любознательность, после Евангелия не нужно никакого исследования*» (Тертуллиан).

Папп Александрийский (начало IV в. н.э.) *Математическая коллекция*

Теон Александрийский (конец IV в. н.э.)

Гипатия Александрийская (ум. 418)

Прокл Афинский (410–485)

476 г. – ***падение Западной Римской империи***. После нашествия гуннов в V в. остались едва прозябавшие города. **Наступление христианства привело к забвению теоретических взлетов эллинской мысли**.

529 г. – ***закрытие Афинской академии***; ученые перебираются в Византию, где работают до 1453 г.

Евтокий (VI в. н.э.)

Симпликий (VI в. н.э.)

С **VII в**. начинается ***время арабской культуры***. В Европе VI – X вв. – ранний феодализм (века невежества, экономический спад и политический хаос). Потеряны практически все связи с Восточной Римской империей.

VII век – возникновение ислама:

Магомет (Абул Казем бен Абдаллах, Мохаммед) (ок.571 –632)

жил в бедности, выступил как пророк

622 г. – начало мусульманской эры

– бегство Магомета из Мекки в Медину.

630 г. – победное возвращение

632 г. – смерть Магомета; его преемники (халифы) стали распространять ислам.

Абуль-Касим **Мухаммад** ибн Абдуллах ибн Абд аль-Мутталиб (Шейба) ибн Хашим (Амр) ибн Абд Манаф (аль-Мугира) ибн Кусай ибн Килаб ибн Мурра ибн Кааб ибн Луай ибн Галиб ибн Фихр ибн Малик ибн ан-Надр ибн Кинана ибн Хузайма ибн Мудрик (Амир) ибн Ильяс ибн Мудар ибн Низар ибн Мад ибн Аднан ибн Адад ибн Мукаввим ибн Нахур ибн Тайрах ибн Иаруб ибн Яшджуб ибн Набит ибн Исмаил ибн Ибрахим ибн Азар (Тарих) ибн Нахур ибн Саруг ибн Шалих ибн Ирфхашад ибн Сам ибн Нух ибн Ламк ибн Матту Шалах ибн Ахнух (Идрис) ибн Иард ибн Махлил ибн Кайнан ибн Ианиш ибн Шис ибн Адам.

<u>Завоеваны</u>: 637 г. – Сирия; 642 г. – Египет;

во второй половине VII в. – вся северная Африка;

711 г. – Испания (до 10 в.),

712 г. – начало завоеваний Средней Азии, Закавказья, части Индии.

В 642 г. халиф Омар уничтожил Александрийскую библиотеку:

«*Если в книгах содержится нечто, ведущее к истине, то мы имеем от Аллаха то, что еще лучше ведет к ней; а если в них содержится ложное, то они и вовсе не нужны*».

«*Нам после Христа не нужна никакая любознательность, после Евангелия не нужно никакого исследования*» (**Тертуллиан**, II в. н.э.).

До VIII в. столица арабского халифата – Дамаск (Сирия). Затем империя распалась на два независимых царства:

Восточное (**Багдад**, Ирак, главные успехи в науке);

Западное (**Кордова**, Испания).

Существовали до XIII в.

I этап: **VII – VIII вв.** – ***усвоение греческого и восточного наследия, переводы на арабский язык***

Правили: 754–775 **ал-Мансур** (с 762 г. столица Багдад)

786–809 **Гарун ар-Рашид**

Создавались библиотеки; изучались и переводились Евклид, Архимед, Аполлоний, Герон, Птолемей, Диофант, индийские трактаты, сочинения персов и вавилонян.

Язык науки – арабский, хотя не все ученые – арабы.

Н.В. Гоголь ***«Ал-Мамун»:***

«…Все части этой великой империи, этого магометанского мира были связаны довольно сильно, и связь эта укреплена была волею ***необыкновенного Гаруна****, который постигнул все разнообразные способности своего народа. Он не был исключительно* ***государь-философ, государь-политик, государь-воин или государь-литератор****. Он соединял в себе всё, умел ровно разлить свои действия на всё и не доставить перевеса ни одной отрасли над другою.* ***Просвещение чужеземное он прививал к своей нации*** *в такой только степени, чтобы помочь развитию ее собственного…*

Гарун умел ускорить весь административный государственный ход и исполнение повелений страхом своей вездесущности…»

II этап: **IX – XV вв.** – ***собственные успехи арабских ученых***.

В правление **ал-Мамуна** (**813–833**, сына ар-Рашида) в **Багдад**е был основан **Дом Мудрости**.

К существовавшей библиотеке была добавлена обсерватория и особым вниманием стали пользоваться астрономия, география, астрология.

XI в. **Исфахан** (Иран) **Авиценна**

XIII в. **Марага** (юг Азербайджана), основал Хулагу, внук Чингисхана (обсерватория **Насир ад-Дин**а **ат-Туси**)

XV в. **Ташкент, Бухара, Самарканд** (Узбекистан), основал **Улугбек**, внук Тимура

Н.В. Гоголь *«Ал-Мамун»:*

«…*Ал-Мамун, государь, которого Царьград назвал **великодушным покровителем наук,** которого имя история внесла в число благодетелей человеческого рода и который **замыслил государство политическое превратить в государство муз**. Он был одарен всею живостию и способностию к долгому изучению. Его характер исполнен был благородства. Желание истины было его девизом. **Он был влюблен в науку** и влюблен совершенно бескорыстно: он любил науку для нее же самой, не думая о ее цели и применении. **Он предался ей с исключительною страстью**…*

Тогда аравитяне только что открыли Аристотеля. Многообъемлющий и точный философ Греции не мог сойтись с их воображением, слишком стремительным, слишком колоссальным и восточным, но аравийские ученые, занимаясь долгое время кропотливою работою, уже несколько привыкнули к точности и формальности и оттого принялись за него с ученым энтузиазмом.

Эти бесконечные выводы, это облечение в видимость и порядок того, что они прежде чувствовали в душе пламенными отрывками, не могли не околдовать тогдашних ученых.

Воспитанный под их влиянием ***Ал-Мамун****, исполненный истинной жажды просвещения, употреблял все старания* ***ввести в свое государство*** *этот чуждый дотоле* ***греческий мир****. Багдад распростер дружелюбные длани всему ученому тогдашнему свету…»*

Основные области арабской математики:

1. **Астрономия**:

а) плоская и сферическая **тригонометрия** (понятия синуса, косинуса, тангенса угла);

б) **вычислительные методы**.

2. **Алгебра**:

получила статус *теоретической* дисциплины со своим собственным объектом и методами.

3. **Учение о параллельных линиях**.

1. Мухаммад ибн Муса **аль-Хорезми** аль-Маджуси

   (около 787 – около 850)

   Сохранилось 5 работ. Самые известные:

1. **Трактат по арифметике** ***«Об индийском счете»*** (существует только на латыни, десятичная позиционная система счисления и операции в ней, есть символ для нуля)

«Когда я увидел, что индийцы составляли из девяти букв любое свое число благодаря расположению, я пожелал раскрыть, если будет угодно Аллаху, что получается из этих букв, для облегчения изучающему…»

2. «*Краткая книга об аль-джабр и аль-мукабале*» («Аль-китаб аль-мухтасар фи хисаб аль-джебр ва-ль-мукабала»)

Аль-Хорезми: «…*здесь содержится простейшее и полезнейшее в арифметике, постоянно необходимое людям в случаях наследования, завещаний, раздела имущества, судебных тяжб и торговли и в любых сделках друг с другом или когда речь идет об измерении земель, рытье каналов, геометрических расчетах и других вещей разных сортов и типов*».

Самое важное: систематическое развитие методов решения уравнений с некоторой неизвестной величиной.

Алгебра чисто риторическая, без символики.

Рассматриваются три вида величин:

– просто числа – дирхем ≡ свободный член;

– неизвестная – вещь (шай), корень (джизр);

– квадрат неизвестной – имущество (маал).

Первая классификация уравнений:

1. Квадраты равны неизвестным: $ax^2 = bx$
($ax=b$, $x=0$ – не корень до XVIIв.);

2. Квадраты равны числу: $ax^2 = c$

3. Неизвестная равна числу: $bx = c$

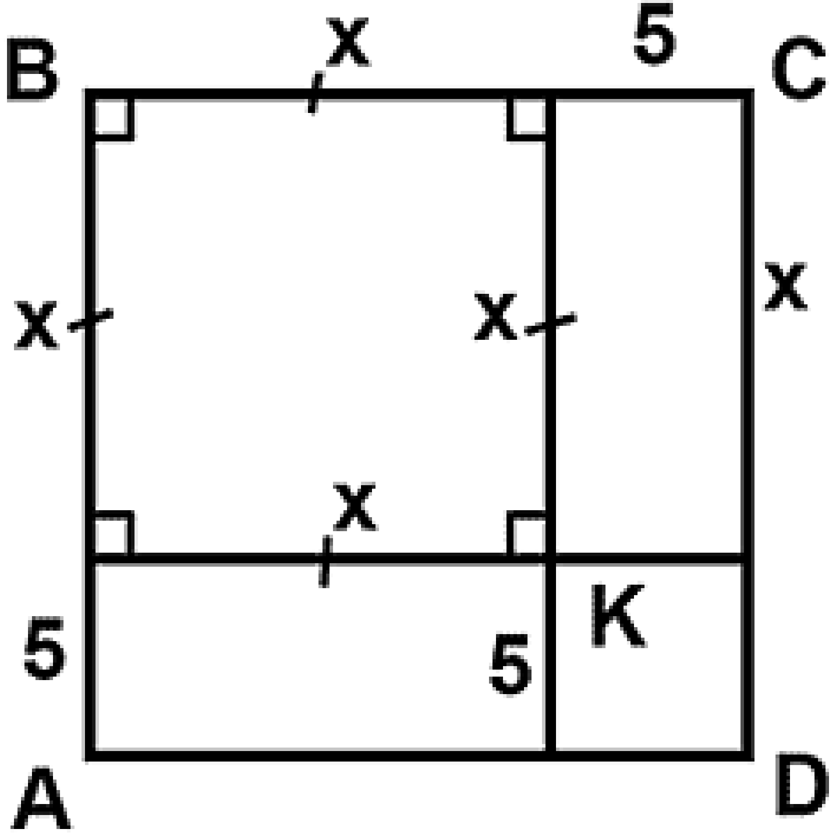
4. Квадраты и неизвестные равны числу: $ax^2 + bx = c$

5. Квадраты и число равны неизвестным: $ax^2 + c = bx$

6. Неизвестные и число равны квадратам: $bx + c = ax^2$

Рассмотрим тип 4. Сначала Аль-Хорезми дает решение числового квадратного уравнения методом «приведения к полному квадрату»:

$$x^2 + 10x = 39$$
$$(x+5)^2 = 64$$
$$x + 5 = 8$$
$$x = 3$$



После этого решения следует геометрическое обоснование, которое годится для любого уравнения типа $x^2 + ax = b$, совершенно отличное от того, что есть у древних греков: строится квадрат на стороне *x* и с двух его сторон до гномона добавляются два прямоугольника со сторонами *x* и *5* (площадь каждого *5x*), который достраивается до полного квадрата площадью 64.

Операции аль-джабр и аль-мукабала используются также для приведения заданного уравнения к одному из типов:

$$x^2 + (10 - x)^2 = 50$$

$$2x^2 - 20x + 100 = 58$$

аль-джабр: $2x^2 + 100 = 58 + 20x$

$$x^2 + 50 = 29 + 10x$$

аль – мукабала: $x^2 + 21 = 10x$

Получено уравнение типа 5 для которого существует правило.

$$x^2 + 21 = 10x$$

Правило:

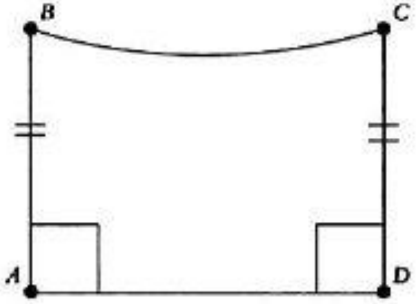
«…раздвой число корней, получится 5. Умножь это на равное, будет 25. Вычти из этого 21, останется 4. Извлеки из этого корень, будет 2. Вычти это из 5, получится 3. Это и будет корень, который ты искал.

Если хочешь прибавить этот корень к половине числа корней, будет 7. Это – тоже корень, который ты искал».

2. **Сабит ибн КОРРА** Абу-л-Хасан Сабит-ас-Саби ал-Харрани (**836 – 901**)

- багдадский ученый
- астроном, **переводчик** и комментатор Архимеда, Аполлония, Евклида, Птолемея, Менелая и др.

1. Трактат о квадратных уравнениях
2. Трактат по теории параллельных линий: рассмотрел четырехугольник Саккери и доказал равенство углов:



3. Абу Камил Шуджа ибн Аслам ибн Мухаммад аль-Хасиб аль-Мисри **(850 – 930)**

родом из Египта, развивал методы аль-Хорезми.

«***Китаб аль-джабр валь-мукабала***»

– вводит высшие степени неизвестного по аддитивному принципу (отказ от однородности древних греков);

– исследует иррациональности и их преобразования, использует формулу суммы квадратных корней;

– занимается диофантовыми уравнениями:

а) впервые (до перевода на арабский язык) появляются **38 задач на методы Диофанта** для задач 8–9 II книги «Арифметики» + «двойные равенства» и др.;

б) вопрос о разрешимости уравнения $y^2 = -x^2+ax+b$

($b+a^2/4$ должно быть суммой двух квадратов).

970 – 1170 **НОВАЯ ВОЛНА ИССЛЕДОВАНИЙ** вознесла зарождающуюся алгебру на еще большую высоту.

2 течения: – ***арифметико-алгебраическое***

(аль-Караджи и ученики);

– ***геометрическое***

(аль-Хайсам, аль-Хайями, Шараф-ад-Дин ат-Туси, Насир-ад-Дин ат-Туси и др.).

4. Абу Бакр Мухаммад ибн аль-Хусайн **АЛЬ-КАРАДЖИ** (X– начало XI в.)

Родом из Персии, недалеко от Тегерана. Автор «Достаточной книги по арифметике», «Аль-Фахри», «Аль-Бади» (о неопределенных задачах).

В «Достаточной книге» есть алгебраическая часть, в которой разбираются шесть канонических типов уравнений. Аль-Караджи впервые сгруппировал перед каждой задачей элементы алгебраического исчисления, которые необходимы для ее решения: преобразование иррациональных величин, тождества и т.п. – т.е. книга приобретает **вид теоретического учебника**.

Главный труд – «***Аль-Фахри***» (посвящение Фахру аль-Мулку – визирю Багдада) – написан с той же теоретической направленностью. Определена цель науки исчисления как определение неизвестных величин при помощи известных. **Алгебра** явным образом **сделалась арифметикой неизвестного**. Определен ее предмет и был расширен круг методов и алгоритмов для работы с неизвестными величинами.

В этой работе аль-Караджи:

1) вводит бесконечный ряд степеней неизвестного:

$$1: x = x: x^2 = x^2: x^3 = \ldots$$

$$1: (1/x) = (1/x): (1/x^2) = \ldots$$

2) воспринял **отрицательные числа** Диофанта (автор арабского перевода «Искусство алгебры» – Коста ибн Лука (820–912)), повторяет аксиоматическое правило знаков при умножении + добавляет правило для вычитания:

а) $ax^k - bx^k = (a - b)\,x^k$, если $a > b$,

либо $= -(b - a)\,x^k$, если $a < b$

б) $ax^k - (-bx^k) = (a+b)\,x^k$

3) строит алгебру многочленов, но ограничивается делением на одночлены;

4) суммирует некоторые конечные арифметические ряды (например, сумма кубов, сумма квадратов: $\sum_{1}^{n} k^3 = \left(\sum_{1}^{n} k\right)^2$, $\sum_{1}^{n} k^2 = \left(\sum_{1}^{n} k\right)\left(\frac{2}{3}k + \frac{1}{3}\right)$;

5) работа с иррациональными величинами – сумма и разность кубических корней на числовых примерах.

6) треугольник Паскаля до *n = 12*

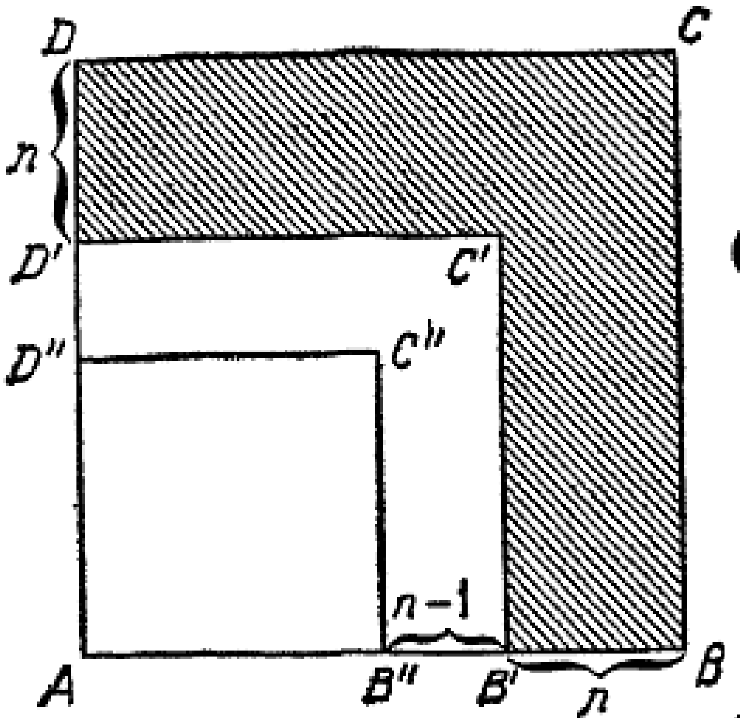
(в 1265 г. Насир-ад-Дин ат-Туси помещает правило построения для любого *n*);

7) неопределенные уравнения Диофанта (есть еще один трактат на эту тему «Аль-Бади»);

Ученики и последователи: ас-Самавал, аш-Шахразури.

Доказательство ал-Караджи тождества

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$$



Пусть $1+2+\ldots+n$ — сторона квадрата $ABCD$.

Ал-Караджи построил в этом квадрате гномон $BB'C'D'DC$ (заштрихованный), в котором $BB'=n$.

Площадь гномона равна

$$2n\,(1+2+\ldots+n)-n^2=2n\,\frac{n\,(n+1)}{2}-n^2=n^3.$$

Затем он построил следующий гномон с $B'B''=n-1$.
Его площадь равна $(n-1)^3$.
Продолжая таким же образом, он получил, наконец, квадрат со стороной 1.
Площадь первоначального квадрата $ABCD$ разбивается на площади всех гномонов и квадрата 1^2, равную 1^3.

Таким образом, $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$.

Адам Ризе (1489–1559) **1524** “***Coss***”

– сокращение сочинения, автор которого называет себя **Initius Algebras**. Оригинал написан по-арабски, переведен на греческий «Архимедом», с греческого на латынь – «Апулеем», с латыни на немецкий – магистром Андреасом Александром.

1 0009 0036 0084 0126 0126 0084 0036 0009 0001

1 0008 0028 0056 0070 0056 0028 0008 0001

1 0007 0021 0035 0035 0021 0007 0001

1 0006 0015 0020 0015 0006 0001

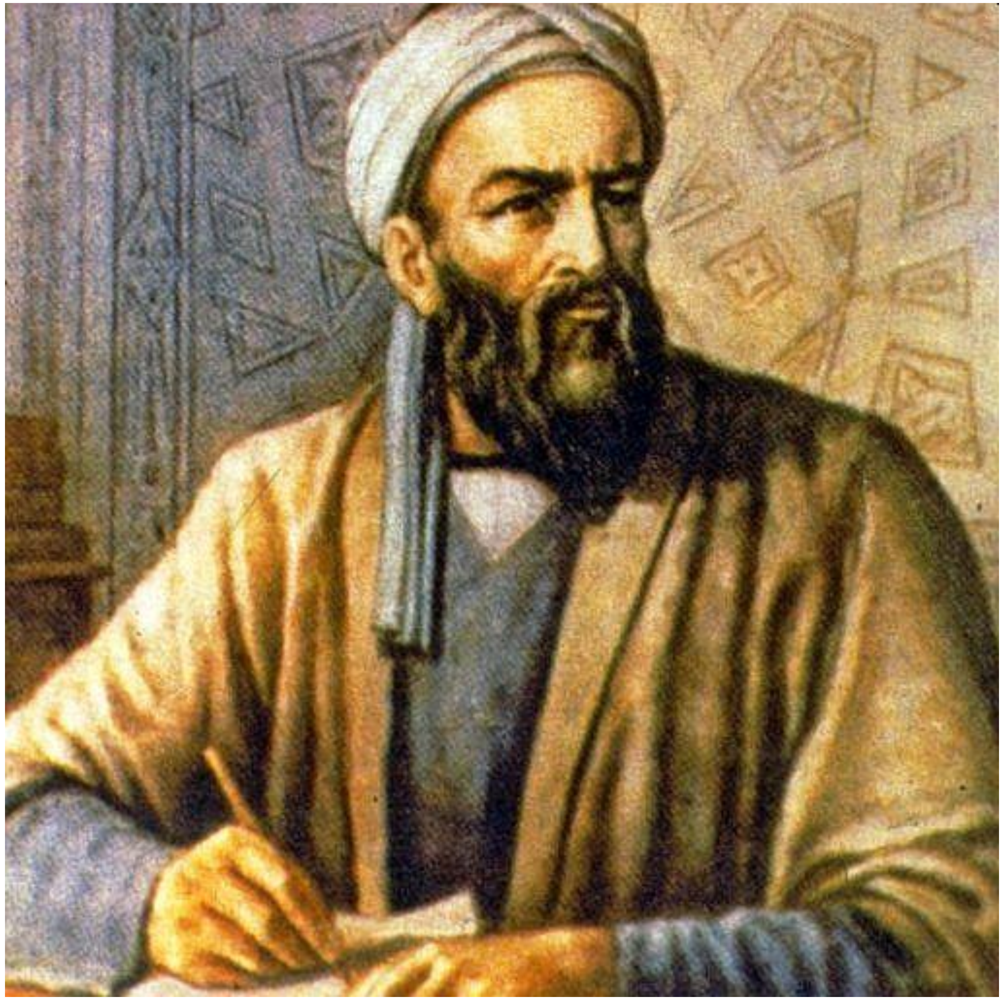
1 0005 0010 0010 0005 0001

1 0004 0006 0004 0001

1 0003 0003 0001

1 0002 0001

1 0001



5. Абу-р-Рейхан **аль-БИРУНИ** из Хорезма

(973 – около 1050)

История, география, филология, астрономия, математика, геодезия, минералогия, геология, фармакология и др.

«***Канон Масуда»*** посвящен астрономии и звездам.

– в отличие от других зиджей в нем есть ***математические доказательства*** всех утверждений;

– в задаче о стороне правильного девятиугольника возникают ***кубические уравнения*** $x^3+1 = 3x$, $x^3 = 3x+1$, и аль-Бируни указывает, что эта задача неразрешима с помощью циркуля и линейки, т.к. сводится к трисекции угла. Поскольку интересует лишь численное решение, то отказ от геометрического пути и *метод последовательных приближений*.

Работы **аль-Бируни** по тригонометрии:

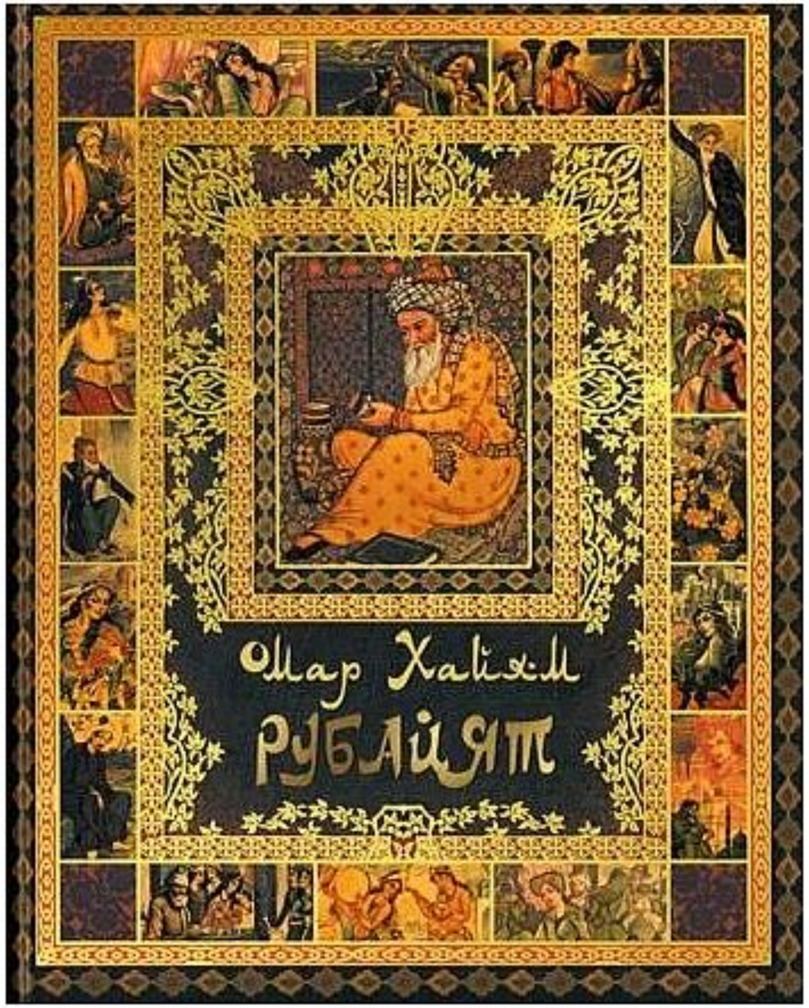
1. Об определении хорд в круге при помощи вписанной в него ломаной линии.
2. Об индийских рашиках (содержит тройное правило).
3. «Сферика».
4. «Книга жемчужин о плоскости сферы».

Уже в IX в. на арабском Востоке уже появились понятия **синуса, косинуса, тангенса, были известны основное тригонометрическое тождество, формулы синуса суммы или разности, формулы приведения**.

6. ОМАР ХАЙЯМ (1048 – 1131)

Гияс-ад-Дин Абу-л-Фатх ***Омар*** *ибн Ибрахим ал-****Хайям***

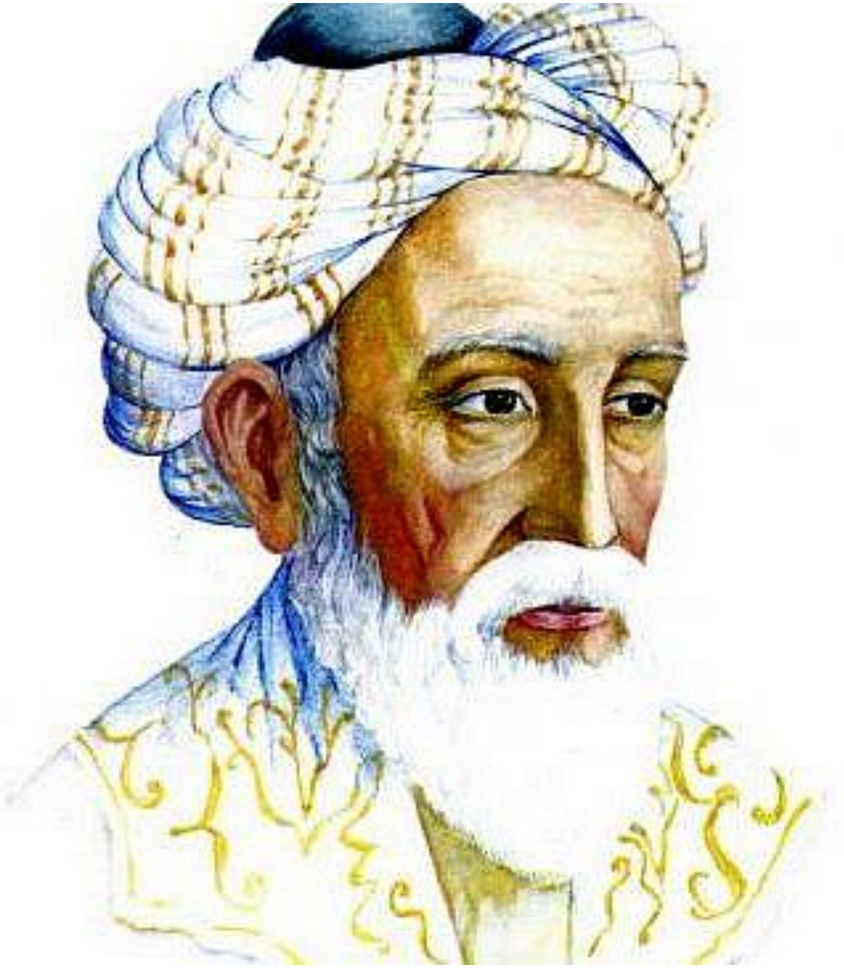
Известный персидский поэт; родом из Хорасана. Часто переезжал, работал в Исфахане, Самарканде и др.



Чтоб мудро жить прожить, знать надобно немало,
Два важных правила запомни для начала:
Ты лучше голодай, чем что попало есть,
И лучше будь один, чем вместе с кем попало.

***

Знайся только с достойными дружбы людьми,
С подлецами не знайся, себя не срами,
Если подлый лекарство нальет тебе – вылей!
Если мудрый подаст тебе яду – прими!



Мне мудрость не была чужда земная,
Разгадки тайн ища, не ведал сна я.
За семьдесят перевалило мне,
И что ж узнал я? – Что ничего не знаю.

***

Я познание сделал своим ремеслом,
Я знаком с высшей правдой и с низменным злом.
Все тугие узлы я распутал на свете,
Кроме смерти, завязанной мёртвым узлом»

***

Вино запрещено, но есть четыре «но»:
Смотря кто, с кем, когда и в меру ль пьет вино.
При соблюдении сих четырех условий
Всем здравомыслящим вино разрешено.

А. Суханов. Романс о старости.
https://www.youtube.com/watch?v=irhtTlC-aZg

Омар **ХАЙЯМ** – <u>математик</u>:

развивал геометрическое направление. Образец – Архимед, придерживался принципа однородности древних греков.

Особое внимание уделял теории отношений, теории параллельных (четырехугольник Саккери).

«О доказательствах задач алгебры и мукабалы»

содержит геометрическую теорию кубических уравнений:

– утверждает, что их невозможно решить с помощью циркуля и линейки;

– дает классификацию кубических уравнений и для каждого случая геометрическое доказательство существования решения с помощью окружности и конического сечения.

<u>**НО**</u>: нигде не отметил, что возможны три различных решения. Есть ошибки.

ТРАКТАТ ДОСТОЧТИМОГО УЧЕНОГО ГИЯСЭДДИНА АБУ-Л-ФАТХА ОМАРА ИБН ИБРАГИМА ХАЙЯМА ИЗ НИШАПУРА

(Да освятит Аллах его драгоценную душу!)

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ И АЛМУКАБАЛЫ [1])

Во имя Аллаха всемилостивого, всемилосердного!

Хвала Аллаху, господину миров, добрый конец добродетельным, никакой вражды ко всем, кроме несправедливых, и благословение всем пророкам, в особенности Мохаммеду и всему его святому потомству.

Один из поучительных вопросов, необходимый в разделе философии, называемом математикой, это искусство алгебры и алмукабалы [1], имеющее своей целью определение неизвестных, как числовых, так и измеримых. В нем встречается необходимость в некоторых очень сложных видах предложений, в решении которых потерпело неудачу большинство этим занимавшихся. Что касается древних, то до нас не дошло сочинение, в котором они рассматривали бы этот вопрос: может быть они искали решение и изучали этот вопрос, но не смогли преодолеть трудностей, или их исследования не требовали рассмотрения этого вопроса, или, наконец, их труды по этому вопросу

[1]) Рисāлат ал-хакӣм ал-фāдил Гийāс ад-дӣн Абӯ-л-Фатх ʿУмар ибн Ибрāхӣм ал-Хаййāмӣ ан-Нишāбӯрӣ фӣ-л-барāхӣн ʿала масāил ал-джабр ва-л-мукāбала.

Я говорю, с помощью Аллаха и при его прекрасно поддержке, что искусство алгебры и алмукабалы ест научное искусство, предмет которого составляют абсо лютное число и измеримые величины [6], являющиес неизвестными, но отнесенные к какой-нибудь известно вещи, по которой их можно определить. Эта вещь ест или количество или отношение, не связанное ни с че другим. В это ты должен глубоко вникнуть. Цель этог искусства состоит в нахождении соотношений, связываю щих его предмет с вышеуказанными данными. Совершен ство этого искусства состоит в знании методов изучения посредством которых можно постигнуть способ определе ния вышеупомянутых неизвестных, как числовых, так и геометрических.

Сложные уравнения бывают трехчленные и четырехчленные. Видов трехчленных уравнений двенадцать, три первые из которых суть:

1. Квадрат и корни равны числу,
2. Квадрат и число равны корням,
3. Корни и число равны квадрату [12].

Эти три вида упоминаются в сочинениях алгебраистов и доказываются там геометрическим, а не числовым способом.

Вторые три вида суть:

1. Куб и квадраты равны корням,
2. Куб и корни равны квадратам,
3. Корни и квадраты равны кубу [13].

Алгебраисты говорят, что три вторые вида пропорциональны трем первым, каждый—своему соответственному, т. е. уравнение: куб и корни равны квадратам—равносильно уравнению: квадрат и число равны корням [14] и также по отношению к двум другим. Но они не доказали этого, когда предметы задач суть измеримые количества.

1) $x^3 = qr$,
2) $x^3 + px^2 = r$,
3) $x^3 + r = qx$,
4) $x^3 + r = px^2$,
5) $x^3 + qx = r$,
6) $x^3 = px^2 + r$,
7) $x^3 = qx + r$,
8) $x^3 = px^2 + qx + r$,
9) $x^3 + qx + r = px^2$,
10) $x^3 + px^2 + r = qx$,
11) $x^3 + px^2 + qx = r$,
12) $x^3 + px^2 = qx + r$,
13) $x^3 + qx = px^2 + r$,
14) $x^3 + r = px^2 + qx$.

7. Насир ад-Дин **ат-Туси**

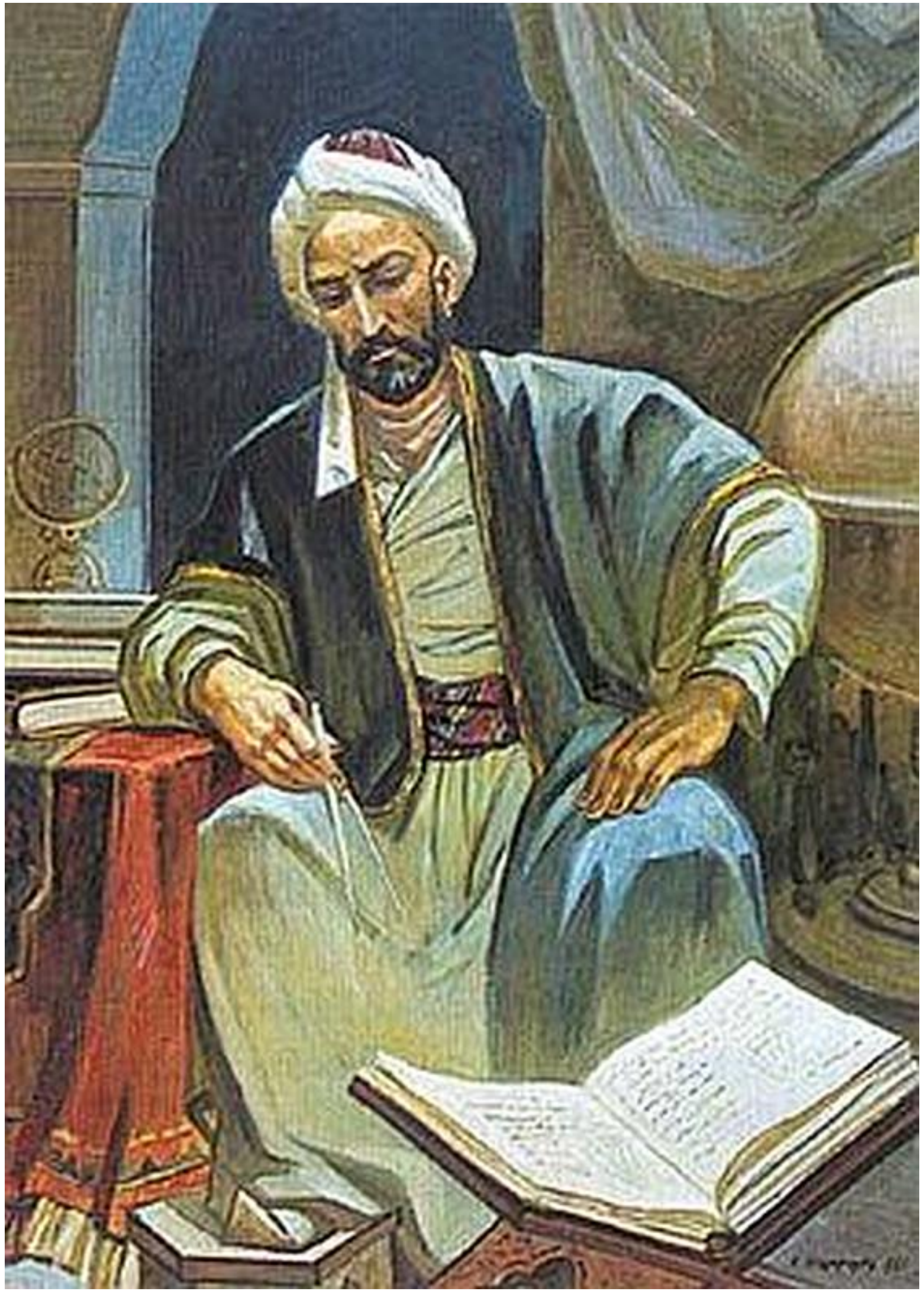
(конец XII – 1213)

Родился в Мараге (Азербайджан), жил в Иране.

Составлял астрономические таблицы и в них **сферическая тригонометрия** наконец отрывается от астрономии, **становится самостоятельной дисциплиной.**

В алгебре – последователь Хайяма + добавил систематическое исследование существования положительных корней, используя рассуждения, напоминающие вычисление первой производной.

Много занимался поиском численных решений кубических уравнений.



8. Гияс ад-Дин **Аль-КАШИ** (умер в 1429 г.)

Крупный математик, вычислитель и астроном. Работал в обсерватории Улугбека (Самарканд) в период ее наивысшего расцвета (1394–1449).

«***Ключ к арифметике***» – ввел десятичные дроби.

«***Трактат об окружности***» – вычислил число π с точностью до 16 верных знаков π = 3,14159265358979325 (ошибка в последнем знаке: вместо 5 должно быть 38) как полусумму периметров вписанного и описанного правильного многоугольника. Лишь 150 лет спустя Ван-Роумен улучшил этот результат.

«***Зидж Улугбека***» – астрономические таблицы высокой точности, в основе – более точное значение sin1°.

В 1500 г. Мариам Челеби в комментариях к «Зиджу Улугбека»:

«*Перл славы и чести своего времени* ***Гиясэддин Джемшид****, применяя метод алгебры и алмукабалы и считая синус вещью, свел эту задачу* [вычисления синуса 1° – Г.С.] *к задаче: 45, умноженное на вещь, равно кубу и числу…» :*

$$45x = x^3 + 0.785\,039\,343\,364\,400\,6,$$

откуда $\sin 1^\circ = 0.017\,452\,406\,437\,283\,571.$

1449 г. – Улугбек убит, научная школа распалась, исследования пошли на убыль.