ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ АЛГЕБРЫ

О.Ю. Шмидт, А.Г. Курош

БСЭ, 2е издание, 1950. Т. 1

АЛГЕБРА

"*может быть определена как* ***наука о системах объектов*** *той или иной природы,* ***в которых установлены операции****, по своим свойствам более или менее сходные со сложением и умножением чисел. Такие операции называются алгебраическими. Алгебра классифицирует системы с заданными на них алгебраическими операциями по их свойствам и изучает различные задачи, естественно возникающие в этих системах, включая и задачу решения и исследования уравнений, которая в новых системах объектов получает новый смысл*".

1948 Н. Бурбаки "*Архитектура математики*":

Дать в настоящее время общее представление о математической науке – значит заняться таким делом, которое, как кажется, с самого начала наталкивается на почти непреодолимые трудности благодаря обширности и разнообразию рассматриваемого материала.

В соответствии с общей тенденцией в науке с конца XIX в. число математиков и число работ, посвященных математике, значительно возросло. Статьи по чистой математике, публикуемые во всем мире в среднем в течение одного года, охватывают многие тысячи страниц. Не все они имеют, конечно, одинаковую ценность; тем не менее после очистки от неизбежных отбросов оказывается, что ***каждый год математическая наука обогащается массой новых результатов****, приобретает все более разнообразное содержание и постоянно дает ответвления в виде теорий, которые беспрестанно видоизменяются, перестраиваются, сопоставляются и комбинируются друг с другом.*

1948 **Н. Бурбаки** "***Архитектура математики***":

Ни один математик не в состоянии проследить это развитие во всех подробностях, *даже если он посвятит этому всю свою деятельность. Многие из математиков устраиваются в каком-либо закоулке математической науки, откуда они и не стремятся выйти, и не только* ***почти полностью игнорируют все то, что не касается предмета их исследований***, *но* ***не в силах даже понять язык и терминологию своих собратьев***, *специальность которых далека от них.*

Нет такого математика, даже среди обладающих самой обширной эрудицией, который бы не ***чувствовал себя чужеземцем а некоторых областях огромного математического мира***; *что же касается тех, кто подобно Пуанкаре или Гильберту оставляет печать своего гения почти во всех его областях, то они составляют даже среди наиболее великих редчайшее исключение.*

1948 Н. Бурбаки "*Архитектура математики*":

... в начале этого века ... почти полностью отказались от взгляда на математику как на науку, характеризуемую единым предметом и единым методом; наблюдалась тенденция рассматривать ее как «ряд дисциплин, основывающихся на частных, точно определенных понятиях, связанных тысячью нитей», которые позволяют методам, присущим одной из дисциплин, оплодотворять одну или несколько других. В настоящее время, напротив, ***мы думаем, что внутренняя эволюция математической науки*** *вопреки видимости более чем когда-либо упрочила единство ее различных частей и* ***создала своего рода центральное ядро****, которое является гораздо более связным целым, чем когда бы то ни было. Существенное в этой эволюции заключается в систематизации отношений, существующих между различными математическими теориями; ее итогом явилось направление, которое обычно называют «****аксиоматическим методом****»...*

1948 Н. Бурбаки "***Архитектура математики***":

*"В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм – **математических структур**..."*

*"...чтó надо понимать в общем случае под **математической структурой**. Общей чертой различных понятий, объединенных этим родовым названием, является то, что они <u>применимы к множеству элементов, природа которых не определена</u>. Чтобы определить структуру, **задают** одно или несколько **отношений**, в которых находятся его элементы (в случае групп – это отношение* $x\ \tau\ y = z$ *между тремя произвольными элементами); затем **постулируют**, что данное отношение или данные отношения удовлетворяют некоторым условиям (которые перечисляют и которые являются **аксиомами** рассматриваемой структуры). **Построить аксиоматическую теорию** данной структуры – это значит вывести логические следствия из аксиом структуры, **отказавшись от каких-либо других предположений** относительно рассматриваемых элементов (в частности от всяких гипотез относительно их «природы»)."*

… Можно, например, взять три следующих свойства, которые мы выразим с помощью наших символических обозначений, но которые, конечно, легко перевести на язык каждой из этих теорий:

a) каковы бы ни были элементы x, y, z имеем (xτy)τz = xτ(yτz) (ассоциативность операции xτy);

b) существует элемент e такой, что для всякого элемента x eτx = xτe = x (для сложения действительных чисел – число 0, для умножения по модулю p – число 1, для композиции перемещений – «тождественное перемещение», которое оставляет на своем месте каждую точку пространства);

c) для каждого элемента x существует элемент x' такой, что xτx' = x'τx = e (для сложения действительных чисел – противоположное число –x, для композиции перемещений – обратное перемещение, т. е. такое, которое каждую точку, перемещенную смещением x, возвращает в исходное положение; для умножения по модулю p существование x' следует из очень простого арифметического рассуждения).

*"…То отношение, которое фигурирует в групповых структурах, называют «**законом композиции**»; это такое отношение между тремя элементами, которое определяет однозначно третий элемент как функцию двух первых. Когда отношения в определении структуры являются «законами композиции», соответствующая структура называется **<u>алгебраической структурой</u>** (например, **структура поля определяется двумя законами композиции** с надлежащим образом выбранными аксиомами: сложение и умножение действительных чисел определяют структуру поля на множестве этих чисел).*

*Другой важный тип представляют собой **<u>структуры, определенные отношением порядка</u>**; на этот раз это – отношение между двумя элементами x, y, которое чаще всего мы выражаем словами «x меньше или равно y» и которое мы будем обозначать в общем случае xRy. Здесь больше не предполагается, что это отношение однозначно определяет один из элементов x, y как функцию другого.*

Аксиомы, которым оно подчиняется, таковы: а) для всех x xRx; b) из соотношений xRy, yRx следует x=y; c) из соотношений xRy, yRz следует xRz. Очевидным примером множества, снабженного такой структурой, является множество целых чисел (или множество действительных чисел)…

*…еще несколько слов о третьем важном типе структур – **<u>топологических структурах</u>** (или топологиях); в них находят абстрактную математическую формулировку интуитивные понятия окрестности, предела и непрерывности, к которым нас приводит наше представление о пространстве…*"

По-видимому, **первое определение алгебры как математической дисциплины** мы находим у **Омара ХАЙЯМА** (1048–1131):

Алгебра – наука об уравнениях, в которой четко разделяются числа и величины.

Это определение, лишь немного изменившись, дошло до XIX века, например, в известном учебнике **Ж.А. Серре** "*Cours d'algèbre supérieure*" (1877–1879). НО были и другие точки зрения:

И. НЬЮТОН (1643–1727):

"***Алгебра*** *есть ничто иное как* ***математический язык****, слова которого величины, а уравнения – его предложения*".

Математическая энциклопедия, 1977

АЛГЕБРА –

1. *Часть математики*. В этом понимании термин "*Алгебра*" употребляется в таких сочетаниях как "гомологическая алгебра", "коммутативная алгебра", "линейная алгебра", "полилинейная алгебра", "топологическая алгебра".

2. Частный случай *операторного кольца*: Алгебра (иногда – линейная, или векторная, А.) над полем, телом, коммутативным кольцом. Ассоциативная Алгебра (прежнее название "гиперкомплексная система"), неассоциативная алгебра, альтернативная алгебра – алгебры именно в этом понимании.

3. То же, что *универсальная алгебра*. В этом понимании алгебрами будут, например, булевы алгебры, унарные алгебры.

Б.Н. Делоне.

Пути развития алгебры // УМН. Т.7, вып. 3(49). **1952**. С. 155–178.

"…*обычно принято считать началом алгебры введение Виэтой буквенных обозначений, причём немало сделал в этом вопросе и Декарт*…"

Brandon P. Emnace.

History of Algebra. **2014**.

"*Как раздел математики алгебра возникла **в Европе** в конце 16-го века с работ Франсуа Виета. По сути, алгебра может рассматриваться как выполнение вычислений, аналогичных вычислениям арифметики, но с нечисловыми математическими объектами. Однако до 19-го века алгебра в основном состояла из теории уравнений.*"

⇒ чтобы сделать вывод о возникновении алгебры, мы должны определить, что для нас важно. Если, **в соответствии с Бурбаки**, современная алгебра – наука об алгебраических структурах, то для ответа на вопрос "есть ли алгебра" мы должны обращать внимание на следующие аспекты:

1. Существует **класс задач**, которые мы умеем решать.
2. Существует **алгоритм решения**, в котором не так важно интерпретировать выкладки, достаточно уметь интерпретировать окончательный результат.
3. Есть буквенная **символика** и существуют **законы арифметических операций**.
4. Существуют **алгоритмы**, позволяющие **сводить** неизвестные задачи к тем, которые уже решены.

ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ АЛГЕБРЫ

1.	до VI в. до н.э.	возникновение элементов алгебры Древний Вавилон
2.	VI в. до н.э. до Р.Х.	геометрическая алгебра Древняя Греция
3.	Р.Х. до XVII в.	возникновение и развитие буквенной алгебры (основную роль играют неопределенные уравнения) 1591 – Франсуа Виет
4.	1630 – 1770	построение теории алгебраических уравнений Декарт, Ньютон, Чирнгаузен, Эйлер, Безу, Даламбер, Крамер, Лаплас…
5.	1770 – 1870	период формирования современной алгебры Лагранж, Гаусс, Абель, Галуа, Кэли, Куммер…
6.	1870 – наст. время	становление и развитие абстрактной алгебры, построенной на аксиоматике и теории множеств

1 этап: **Вавилонская математика**

Вавилоняне знали некоторые законы алгебраических операций, осуществляли подстановки и решали с помощью алгебраических методов **квадратные уравнения** и эквивалентные им **системы**.

НО никакой символики не было.

Все законы – на числах $\Rightarrow$ алгебра у вавилонян ЧИСЛОВАЯ.

Доказательств нет или мы не знаем, что для них являлось доказательством.

Зато есть решения **неопределенных уравнений** в рациональных числах:

$$x^2 + y^2 = z^2,$$
$$u^2 + v^2 = 2w^2$$

2й этап: VI в. до н.э. до Р.Х.

Классическая геометрическая алгебра

Математические знания превращаются в абстрактную науку, основанную на системе ***доказательств***. При этом доказательство служит не только для установления истины, но и для выяснения сущности предложения, открытия новых утверждений.

К концу VI в. до н. э. построены основы элементарной теории чисел и теория отношений (теория положительных рациональных чисел). После открытия несоизмеримых отрезков была создана геометрическая алгебра, в рамках которой доказывались алгебраические тождества и решались алгебраические задачи. Аналогичные построения можно найти и в математике Древнего Вавилона, Индии и Китая.

И, вообще, средствами геометрической алгебры (иначе говоря — циркулем и линейкой) можно решить любое алгебраическое уравнение, корни которого выражаются через вещественные квадратные радикалы (или еще которое может быть сведено к последовательному решению цепочки квадратных уравнений, имеющих вещественные корни, и таких, что коэффициенты каждого последующего являются рациональными функциями от корней предыдущего). Таким образом, проблема решения определенных уравнений в радикалах выступает на втором этапе развития алгебры как проблема решения уравнений в квадратных радикалах. Например, уравнения $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ и $x^{16}+$ $+x^{15}+\quad +x+1=0$ разрешимы средствами геометрической алгебры, а уравнение $x^6+x^5+\quad +x+1=0$ неразрешимо[1].

Интересно отметить, что две из знаменитых задач древности (V в. до н.э.), которые могут быть сведены к решению кубического уравнения, практически никакого влияния на развитие алгебры не оказали – были введены новые линии, с помощью которых можно искать решение.

Если говорить о решении неопределенных уравнений, то

В теоретических сочинениях V—III вв. до н. э. встречаются еще два вида неопределенных уравнений. Это — пифагорово уравнение $x^2+y^2=z^2$ и уравнение

$$x^2-ay^2=1 \qquad (10)$$

(где a — целое неквадратное число), получившее впоследствии название уравнения Пелля — Ферма. В обоих случаях речь шла об отыскании целых положительных решений.

Изучение пифагорова уравнения проходит красной нитью через всю античную математику. Формулы для его решения предлагали ранние пифагорейцы (VI—V вв. до н. э.), Платон (IV в. до н. э.), наконец, самое общее его решение содержится в «Началах» Евклида, где доказано, что все решения можно представить в виде:

$$x=p^2-q^2; \qquad y=2pq, \qquad z=p^2+q^2.$$

Еще один пример: Архимед в письме к александрийским ученым поставил свою знаменитую «**задачу о быках**», которая сводится к уравнению Пелля при N = 410 286 423 278 424. Наименьшее решение этого уравнения записывается в десятичной позиционной системе с помощью 206 545 цифр, т.е. выписать его практически невозможно. Архимеда **интересовал**, не ответ, а **общий алгоритм** нахождения наименьшего решения этого уравнения.

Творчество Евклида, Архимеда и Аполлония было вершиной античной математики. После Аполлония начался **спад**. Все исследования, которые проводились в последующие два столетия, не выходили из описанного круга проблем. Среди них не встречается ни новых идей, ни новых теорий. Во второй половине 1 века до н.э. исследования по математике практически прекращаются, наступает **перерыв в передаче научной традиции**.

3й этап: I в. н.э. – XVII век

Возникновение и развитие буквенной алгебры

После упадка классической греческой традиции и перерыва в традиции математики постепенно отходят от геометрического языка и возвращаются к числовой алгебре (Герон, Птолемей, Диофант, Гипатия).

Неопределенные уравнения встречаются в "Метрике" Герона и, совершенно неожиданным образом, мы обнаруживаем теоретические исследования решения неопределенных уравнений в творчестве Диофанта Александрийского, что и позволяет нам говорить о совершенно новом периоде в развитии алгебры.

Диофант в "Арифметике" аксиоматически строит **поле** рациональных чисел (область, замкнутую относительно четырех арифметических действий), вводит буквенную символику, формулирует правила действий с многочленами и уравнениями.

Все это сделано для решения **неопределенных уравнений**.

«Арифметика» Диофанта – поворотный пункт в развитии алгебры и теории чисел.

– окончательный отказ от геометрической алгебры;

– рождение буквенной алгебры.

Это – сборник задач (189), каждая из которых снабжена решением (или несколькими различными) и необходимыми пояснениями. В начале первой книги – краткое алгебраическое введение, которое можно считать первым изложением основ алгебры. Позже (в XI в.) **аль-Караджи**, опираясь на это введение, написал большой трактат по алгебре.

1. Построение поля рациональных чисел.
2. Введение буквенной символики и формулировка правил оперирования с уравнениями.

1. На протяжении всех книг Диофант каждое положительное рациональное решение называет словом «число».

Аксиоматически вводит **отрицательные** числа:

определяет новый объект, который называет «недостатком», формулируя правила действий с ним.

«*Недостаток, умноженный на недостаток, дает наличие; недостаток же, умноженный на наличие, дает недостаток; знак же недостатка – укороченная и опрокинутая буква ψ*».

Применяет отрицательные числа только в промежуточных вычислениях.

Всякий раз, когда необходимо, проводит **дополнительный анализ** условий задачи, чтобы существовало положительное решение.

2. **Буквенная символика Диофанта**.

Обозначения для неизвестного и его степеней: первых шести положительных и отрицательных, а также нулевой.

Таблица умножения степеней и специально выделенные два правила, которые мы теперь называем теоретико-групповыми свойствами операции умножения.

Нет знаков сложения и умножения, важен порядок членов уравнения.

Знак вычитания и знак равенства. Знак неопределенного квадрата □. Двойная нагрузка конкретных чисел как произвольных параметров.

В результате **Диофант получает возможность записывать уравнение** или систему уравнений.

Формулирует два правила оперирования с уравнениями $\Longrightarrow$ у Диофанта не арифметика, а **АЛГЕБРА как наука о решении уравнений**! И в ней появляются свои методы, которые можно выделить.

Буквенная символика Диофанта

Обозначения для неизвестной

x^1	ς	*ἀριθμος*
x^2	Δ^{υ}	*Δύναμις*
x^3	K^{υ}	*Κύβος*
x^4	$\Delta^{\upsilon}\Delta$	
x^5	$\Delta^{\upsilon}\mathrm{K}$	
x^6	$\mathrm{K}^{\upsilon}\mathrm{K}$	
x^0	M^{o}	
x^{-2}	$\Delta^{\upsilon}\chi$	

Неизвестное – число, обозначаемое концевой сигмой ς.

Обозначения для первых шести положительных и шести отрицательных + нулевой степеней неизвестной величины ⇒ порывает с геометрической алгеброй.

$$x^3 + 8x - (5x^2 + 1) = x$$

$$\mathrm{K}^{\upsilon}\bar{\alpha}\varsigma\bar{\eta} \pitchfork \Delta^{\upsilon}\bar{\varepsilon}\mathrm{M}^{o}\bar{\alpha}\ \ \iota\sigma\ \ \varsigma\bar{\alpha}$$

Фактически до Диофанта никаких уравнений не было. Рассматривались задачи, которые мы теперь можем свести к уравнениям.

Уже во Введении Диофант формулирует два основных правила оперирования с уравнениями (перенос и приведение подобных членов), т.е. занимается не арифметикой, но алгеброй – наукой о решении уравнений! При этом создает **общие методы решения**, уделяя основное внимание неопределенным уравнениям. Поскольку введение новых обозначений было обусловлено задачами, сводящимся к неопределенным уравнениям, то именно с ними мы и связываем рождение буквенной алгебры!

Известный историк математики Г. Ганкель писал: "...*современному математику после изучения 100 решений Диофанта трудно решить 101-ю задачу...* ***Диофант*** *скорее* ***ослепляет****, чем приводит в восторг*".

Однако при более внимательном чтении становится ясно, что тщательный подбор и продуманное расположение задач направлены на то, чтобы проиллюстрировать применение вполне определенных общих методов.

Подведем итог: Диофант первым систематически сводил неопределенные и определенные задачи к уравнениям. Можно сказать, что для обширного круга задач арифметики и алгебры он сделал то же, что впоследствии сделал Декарт для обширного класса задач геометрии, а именно свел их к составлению и решению алгебраических уравнений. При этом основной проблемой для Диофанта было исследование и решение неопределенных уравнений. Именно с ними оказалось связанным рождение буквенной алгебры.

Заметим, что Диофант нашел основные методы решения в рациональных числах уравнений второй степени от двух неизвестных $F_2(x, y)=0$, если такое уравнение имеет одно рациональное решение. Еще более тонкие и интересные методы он применил для нахождения рациональных решений неопределенных уравнений 3-й и 4-й степени от двух неизвестных. Историю этих методов можно проследить вплоть до работ Анри Пуанкаре, относящихся к началу нынешнего века, в которых на основе этих методов была построена арифметика алгебраических кривых.

Арабские математики:

Определенные уравнения – Аль-Хорезми (VIII–IX) и др.

Неопределенные уравнения занимали почетное место в алгебраических трактатах Абу Камила (начало X в.) и аль-Караджи (X—XI вв.) Методы исследования и решения они применяли те же, что и Диофант (за исключением решения неопределенных уравнений 3-й степени, метод трактовки которых остался им неизвестен). В книге «Аль-Фахри» аль-Караджи преобразует небольшое алгебраическое введение Диофанта в обширный трактат по алгебре. В нем он вводит бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных степеней неизвестного и определяет правила действий с ними. Для отрицательных чисел здесь формулируется не только правило умножения, как это было у Диофанта, но и правила их сложения и вычитания. В этом трактате аль-Караджи определяет, по существу, алгебру как науку о решении уравнений, не делая различий между определенными и неопределенными уравнениями. При решении задач он также чередует неопределенные задачи с определенными, причем последних у него больше, чем в «Арифметике» Диофанта .

Классификация кубических уравнений Омара Хайяма (XI–XII), но ни одной попытки решить уравнение в радикалах.

Отказ арабских математиков ***от*** предложенной Диофантом ***буквенной символики***.

Европа, XIII в. **Леонардо Пизанский** (около 1180 – после 1250)

1202 “***Liber abaci***” – энциклопедия математических знаний

– вводится индийская позиционная система счисления с нулем;

– рассматриваются ряды (арифметические и геометрические прогрессии);

– вводится ряд Фибоначчи: 1+1+2+3+5+8+…+144=376 – первый возвратный ряд;

– ***квадратные уравнения*** по аль-Хорезми;

– ***неопределенные уравнения*** (новые приемы для некоторых задач Диофанта);

– ***терминология как перевод с арабского***.

Уровень знаний в книге намного превышает знания той эпохи.

При блестящем дворе Фридриха II Гогенштауфена (1194—1250), первого из просвещенных деспотов Италии, устраивались научные диспуты. В одном из них прославился Леонардо Пизанский. Придворный философ Фридриха II – магистр Иоганн Палермский предложил ему два вопроса, которые в современных обозначениях выглядят так:

1) найти корень уравнения $\boldsymbol{x^3 + 2x^2 + 10x = 20}$;

2) найти рациональные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + 5 = u^2} \\ \boldsymbol{x^2 - 5 = v^2} \end{cases}$$

Леонардо провел тщательные исследования обеих задач и написал две книги “***Flos***” (*Цветок*) и “***Liber quadratorum***” (*Книга квадратов*), вышедшие в **1225** г. и посвященные решению соответственно первого и второго вопросов. Хотя эти книги были изданы типографским способом только в 1862 г., они были хорошо известны математикам Средневековой Европы, которые почти дословно повторяли изыскания Леонардо.

Прежде, чем приступить к решению системы, Леонардо решает две задачи из “Арифметики” Диофанта (II_8 и II_9):

(1) Разложить квадрат на два других квадрата.

(2) Разложить сумму двух квадратов, не являющуюся квадратом, в сумму двух других квадратов.

Метод решения этих задач у Леонардо отличен от решения Диофанта и является совершенно оригинальным. Для нахождения рациональных решений уравнения (1) Леонардо предлагает взять любой прямоугольный треугольник ABC с целыми или рациональными сторонами (p, q, r) и, отложив на гипотенузе отрезок, равный стороне заданного квадрата, через подобие треугольников получает одно из возможных решений задачи. Поскольку прямоугольных треугольников бесконечное число, то и решений будет бесконечное множество.

После решения этой задачи Леонардо **формулирует в общем виде формулу композиции**, которая была известна и в древнем Вавилоне, и Диофанту, и арабским математикам. Чтобы использовать ее в решении второй задачи Диофанта, Леонардо впервые **доказывает** ее с помощью геометрической алгебры.

Решение задачи Иоганна Палермского Леонардо проводит без вспомогательного прямоугольного треугольника, хотя арабские математики, в отличие от Диофанта, при решении системы «двойных равенств» $\begin{cases} x^2 + y = u^2 \\ x^2 - y = v^2 \end{cases}$, $\quad x^2 = p^2 + q^2, \quad y = 4S = 2pq$

использовали прямоугольный треугольник с гипотенузой x и его учетверенную площадь. **Леонардо** провел теоретико-числовое исследование вопроса, какие значения может принимать выражение площади S прямоугольного треугольника, стороны которого являются натуральными числами, и на этом пути **получает утверждение, эквивалентное Великой теореме Ферма для четвертых степеней** (!)

Интересно, что Ферма сформулировал это предложение так же, как и Леонардо: в своих замечаниях на полях “Арифметики” Диофанта он записал: “*Площадь прямоугольного треугольника в числах не может быть квадратом*”. Ферма привел полное доказательство этой теоремы, и это единственное теоретико-числовое доказательство, которое дошло до нас от Ферма. Проведено оно “методом спуска”.

Возрождение буквенной символики: коссисты, Лука Пачоли…

Решение алгебраических уравнений 3й и 4й степеней в радикалах: Сципион дель-Ферро, Тарталья, Кардано, Феррари.

Знакомство с "Арифметикой" Диофанта:

1) введение комплексных чисел: Бомбелли, Кардано, Виет;
2) публикация и развитие неопределенных задач Диофанта;
3) создание первого буквенного исчисления: Виет.

4й этап: 1630 – 1770 гг.

Построение теории алгебраических уравнений

Начало – Виет и Декарт. Чирнгаузен, Эйлер, Безу, Варинг и др. пытались **решить уравнение 5й степени в радикалах**. Эйлеру удалось найти некоторые такие классы – уравнения с циклической группой Галуа и с полуметациклической группой. Также Эйлер нашел общий вид корней уравнения 5й степени, если оно разрешимо (отсюда позже отталкивался Абель).

Доказательство Основной теоремы алгебры (Даламбер, Эйлер). У Эйлера возникают идеи и факты, послужившие основой теории Галуа (симметрические функции корней уравнения, рациональные функции от корней, которые принимают заданное число значений при перестановках корней и их связь с уравнениями заданной степени).

Неопределенные уравнения сливаются с теорией чисел (работы Ферма, Эйлера и др., расширение понятия целого числа – в т.ч. для комплексных чисел).

В это время неопределенные уравнения хотя и считаются, по традиции, частью алгебры (Эйлер отвел им весь второй том своего «Введения в алгебру» [4]), но, по существу, они сливаются с теорией чисел. Следует отметить, однако, что попытки доказательства неразрешимости в **Q** одного из таких уравнений, а именно уравнения $x^3+y^3=z^3$ (Великая теорема Ферма для $n=3$) привели Эйлера к идее расширения понятия **целого числа.** В ходе своего доказательства Эйлер впервые ввел целые алгебраические числа вида $m+n\sqrt{-3}$, где $m, n\in\mathbf{Z}$. Он перенес на эти новые числа все основные свойства обычных целых, однако не предложил никакого обоснования законности такого переноса.

5й этап: 1770 – 1870 гг.

Период формирования современной алгебры

I. ***Поиски формулы корней алгебраического уравнения в радикалах***.

1770–71 **Ж.Л. Лагранж** "*Размышления об алгебраическом решении уравнений*":

Лагранж показал, что ни одна из попыток решить уравнение 5й степени в радикалах не приведет к успеху. "Истинные принципы решения уравнения" заключаются в **изучении группы подстановок** его корней.

Введя в рассмотрение рациональные функции корней уравнения $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для доказательства их важных свойств он фактически работает с разложением группы S_n по подгруппе H подстановок, при которых $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ остается инвариантной. Следствием этого разложения является известная теорема Лагранжа о порядке подгруппы конечной группы.

Вторая важная теорема Лагранжа:

Две рациональные функции корней уравнения $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, инвариантные при H и меняющиеся при остальных подстановках, выражаются друг через друга рационально, т.е. принадлежат одному и тому же полю разложения.

Отсюда – два потока исследований:

1) доказательство неразрешимости в радикалах алгебраических уравнений 5й степени и выше (П. Руффини (1799), Н.Х. Абель (1826));

2) поиск критерия разрешимости уравнения с заданными числовыми коэффициентами (К.Ф. Гаусс (1801), Н.Х. Абель (1829), Э. Галуа (1831–32)).

1801 **Гаусс** *"Арифметические исследования"*

Построил теорию **уравнений деления круга** $\frac{x^n-1}{x-1}=0$ – прообраз теории Галуа:

1) показал, что при простом уравнение деления круга неприводимо;

2) такое уравнение (с циклической группой подстановок корней) всегда решается в радикалах;

3) дал критерий разрешимости этого уравнения в квадратных радикалах.

1829 **Абель** нашел еще один класс уравнений любой степени, разрешимых в радикалах – **нормальные уравнения с коммутативной** группой Галуа. При этом было введено понятие ***основного поля*** (область рациональности), с которым в дальнейшем работал и **Галуа**, добавив к нему понятия ***группы подстановок***, ***нормального делителя***, ***композиционного ряда*** и ***разрешимой группы***.

Также **Галуа** установил ***соответствие между подгруппами группы Галуа уравнения и подполями поля разложения многочлена***, состоящих из элементов, инвариантных относительно подстановок этих подгрупп. Такое рассмотрение группы вместе со множеством ее инвариантов стало ведущим в математике второй половины XIX в.

Этот способ рассуждений был воспринят не сразу.

1846 – публикация Лиувилем работ Галуа

1854, 1859 **Кэли** рассматривает группу (и дает первое определение) как конечное множество абстрактных символов, для которых определен закон композиции.

1870 **Жордан** "*Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях*"

– первое систематическое изложение теории Галуа и достигнутых результатов в теории групп.

II. Из Великой теоремы Ферма и закона взаимности

$\Rightarrow$ ***Обобщение понятия целого числа***:

1828–1832 **Гаусс** "*Теория биквадратичных вычетов*" – построение теории ***целых комплексных чисел*** вида $m + n\sqrt{-1}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$ (кольцо целых гауссовых чисел): определены единицы, простые и составные числа, доказана однозначность разложения любого целого комплексного числа на простые множители; сформулирован и частично доказан биквадратичный закон взаимности.

Одним из первых полностью доказал этот закон немецкий математик, ученик Дирихле и Куммера **Фердинанд Готтхольд Макс Эйзенштейн** (1823–1852), о котором, по словам М. Кантора, крайне высоко отзывался Гаусс: «*Было только три математика, сделавших эпоху – Архимед, Ньютон и Эйзенштейн*».

1844–1847 **Куммер**

– для ***целых чисел*** ***<u>поля деления круга</u>*** $\mathbb{Q}(\zeta)$, где $\zeta^n = 1$ и $\zeta \neq 1$, однозначности разложения на простые множители не имеет места. Для его восстановления необходимо ввести ***идеальные множители***. В результате была построена арифметика таких полей и доказан закон взаимности для вычетов простой степени и Великая теорема Ферма для обширного класса простых чисел.

Обобщая идеи Гаусса, в 40-е годы XIX в. независимо друг от друга **Эйзенштейн**, **Дирихле** и **Эрмит** определили ***целые алгебраические числа*** как корни алгебраического уравнения с целочисленными коэффициентами. Эйзенштейн показал, что они образуют кольцо.

1848 **Дирихле** определил группу единиц в любом ***<u>поле алгебраических чисел</u>***.

Поле алгебраических чисел – множество $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\theta)$ элементов вида $\alpha = b_0 + b_1\theta + \ldots + b_{n-1}\theta^{n-1}$, где θ – корень неприводимого алгебраического уравнения n-й степени, $b_i \in \mathbb{Q}$.

Р. Дедекинд (1871–1879), **Е.И. Золотарев** (1878), **Л. Кронекер** (1882)

– ***обоснование арифметики в произвольных полях алгебраических чисел и построение теории алгебраических функций***.

Работы Золотарева и Кронекера выполнены в рамках теории алгебраических чисел и алгебраических функций, в то время как обоснование арифметики в полях алгебраических чисел у **Дедекинд**а означало ***переход к абстрактной алгебре*** **(6й этап)**:

чисто аксиоматически и на основе теории множеств введены понятия ***поля, кольца, модуля, идеала***. Для построения теории делимости все ее основные понятия (делитель, НОК, НОД, сравнение по модулю) были выражены в терминах теории множеств. В 1882 в работе с Г. Вебером все это было перенесено в теорию алгебраических функций. Последним шагом в конце XIX в. стало введение тех же понятий для абстрактных множеств произвольных объектов.

III. *Создание теории гиперкомплексных систем*.

Гауссовы целые числа дали начало и этой теории.

1843 **Гамильтон** – кватернионы $q=a+bi+cj+dk$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, i,j,k – мнимые единицы, такие что $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $ij = k$, а $ji = -k$.

С их помощью можно характеризовать движение в реальном мире, но при их рассмотрении (и более сложных систем) утрачиваются важные свойства обычных операций сложения и умножения: появляются делители нуля или отсутствует ассоциативность

$\Rightarrow$ возникает "***теория алгебр***" – учение о таких системах объектов.

Анри Пуанкаре о кватернионах: «*Их появление дало мощный толчок развитию алгебры; исходя от них, наука пошла по пути обобщения понятия числа, придя к концепциям матрицы и линейного оператора, пронизывающим современную математику. Это была* ***революция в арифметике****, подобная той, которую сделал Лобачевский в геометрии*».

IV. ***Развитие линейной и полилинейной алгебр***.

После Лейбница, введшего при решении СЛУ в рассмотрение ***определители***, **Коши** (1815) построил их строгую теорию. Дальнейшие успехи связаны с введением ***многомерного линейного пространства*** (**Грассман**, **Кэли**) и с рассмотрением матриц (**Сильвестр**, Кэли), для которых существуют свои особенные законы операций.

В результате линейная алгебра, импульсы для развития которой были даны линейными алгебраическими и дифференциальными уравнениями, привела к изучению абстрактных объектов, для которых определены те или иные законы композиции.

Все перечисленные направления исследований получили известное завершение в 70-е годы XIX в., когда основные результаты стали систематически освещаться и обсуждаться в монографиях (**Жордан**) и четких статьях (**Дедекинд**). Новые идеи и методы прочно вошли в математику.

6й этап: последняя треть XIX в. до настоящего времени

<u>Становление и развитие абстрактной алгебры, построенной на аксиоматике и теории множеств</u>.

Определенные уравнения отошли на третий план, неопределенные уравнения слились не только с теорией чисел, но с алгебраической геометрией, и продолжают влиять на развитие алгебры, в состав которой, по мнению А.Г. Куроша (1952), теперь входят:

– общая теория полей,
– теория колец и общая теория групп,
– топологическая алгебра и теория структур,
– теория полугрупп и квазигрупп,
– теория универсальных алгебр,
– гомологическая алгебра,
– теория категорий.

1963 **Н. Бурбаки** "*Очерки по истории математики*"

1963 **<u>Н. Бурбаки</u>** "***Очерки по истории математики***" (с. 67–68):

*"… около 1800 г. … понятие **закона композиции** впервые **распространяется** в алгебре в двух различных направлениях на элементы, имеющие с «числами» (в самом широком смысле, который придавали этому слову) лишь очень отдаленные аналогии. Первым из этих расширений мы обязаны К. Ф. Гауссу благодаря его арифметическим исследованиям **квадратичных форм** $ax^2 + bxy + cx^2$ с целыми коэффициентами.*

Лагранж определил отношение эквивалентности во множестве форм с одинаковым дискриминантом и, кроме того, доказал тождество, с помощью которого в этом множестве вводится коммутативный закон композиции (правда, не всюду определенный). Исходя из этих результатов, Гаусс показал, что таким образом определенный закон композиции совместим с введенным отношением эквивалентности… классов. Он приступает затем к изучению «фактор-закона», который он определяет этим способом, и по существу устанавливает, что это закон композиции абелевой группы."

1963 **Н. Бурбаки** "***Очерки по истории математики***" (с. 99–100):

*"Начиная с середины XIX в. Алгебраисты ... значительно расширяют поле своих исследований, до этого почти полностью ограниченное изучением уравнений. В свете открытий Галуа было замечено, что **проблема решения «в радикалах» есть только частный** и довольно искусственный **случай общей проблемы классификации иррациональностей**. Как раз эта последняя проблема и подвергалась атакам с различных сторон в течение всего конца XIX в. и многочисленные разрозненные результаты, накапливаясь мало-помалу, подготовили почву для синтеза **Штейница**.*

*... успехи **теории алгебраических полей** были следствием развития в ту же эпоху теории чисел и алгебраической геометрии. Этот прогресс заключался главным образом в способе изложения теории, и им в большей части мы обязаны **Дедекинду**, который **ввел понятия тела и кольца** и систематически развил (в тесной связи со своими изысканиями по гиперкомплексным системам) линейный аспект **теории расширений**…*

Подробное изложение этого материала можно найти в статье:

Башмакова И.Г. Основные этапы развития алгебры // История и методология естественных наук. М., изд-во МГУ. 1986. Вып. XXXII. С. 50–64.

http://pyrkov-professor.ru/default.aspx?tabid=196&ArticleId=182

Материалы лекций будут выкладываться в день лекции по ссылке *https://math.msu.ru/node/1249*