Мемуар Лагранжа остался в некотором смысле незавершенным. Для доказательства неразрешимости уравнения 5й степени в радикалах **Лагранжу не хватало**:

1) доказательства невозможности построения при $n \geq 5$ рациональной функции от корней, которая удовлетворяла бы уравнению более низкой, чем *n*, степени (теорема Бертрана (1822–1900)):

При $n \geq 5$ *симметрическая группа* S_n *не имеет подгрупп индексов от 2 до n*.

2) доказательства того, что всякий промежуточный радикал является рациональной функцией корней уравнения. Абель позже показал, что это верно для всех методов, рассмотренных Лагранжем. В общем виде – теорема Кронекера о натуральных иррациональностях.

Метод исследования у Лагранжа гораздо более современный, чем даже в более поздних работах **Руффини** и **Абеля**. Этот метод полностью воспринял **Галуа**, существенно дополнив его. Одним из главнейших его дополнений стало четко сформулированное понятие **группы**.

После Лагранжа – **два направления исследований**:

Исследование уравнений с <u>буквенными</u> коэффициентами:

Паоло **Руффини** 1799

Огюстен-Луи **Коши** 1815

Основы теории подстановок

Нильс Генрик **Абель** 1824/26

Доказательство неразрешимости уравнений с буквенными коэффициентами степени ≥ 5

Эварист **Галуа** 1832

Классы разрешимых уравнений и уравнения с <u>числовыми</u> коэффициентами:

Карл Фридрих **Гаусс** 1801

Уравнение деления круга

Нильс Генрик **Абель** 1828/29

Разрешимость нормальных уравнений и с абелевой группой

Эварист **Галуа** 1832

Теория Галуа.

Критерий разрешимости уравнения. Группы, поля.

Паоло **РУФФИНИ** (1765–1822) в статье

1799 «***Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto***» (около 500 стр.):

– рассмотрел подстановки для $n = 5$ и их произведения;

– показал: если у функции от 5 переменных менее 5 различных значений, то их не больше двух $\Rightarrow$ невозможно построить резольвенту Лагранжа степени ниже 5.

НО посылка Руффини о том, что все промежуточные радикалы в выражении для корня нового уравнения являются рациональными функциями корней исходного уравнения, ***не была обоснована***.

Нильс Хенрик АБЕЛЬ (1802–1829)

– из бедной пасторской семьи, шестеро детей, Нильс – старший;

– застенчивый, впечатлительный, болезненный;

1819 Школьный учитель Б.М. Хольмбоэ:

"*С превосходнейшим гением он сочетает ненасытный интерес и тяготение к математике, поэтому, если он будет жить, то, вероятно, станет великим математиком*".

На последнем курсе школы Абель заинтересовался решением уравнений пятой степени с помощью радикалов.

1821 – начал учиться в университете в Христиании (Осло, Норвегия), где преподаватели установили ему стипендию из личных средств.

– счел, что решил *квинтику* и представил статью датскому математику Фердинанду Дегену для публикации Королевского общества Копенгагена. Деген попросил Абеля привести численный пример, и, пытаясь его найти, Абель обнаружил ошибку в своей статье (нет у Оре).

1823 Первые статьи посвящены функциональным уравнениям и интегралам: впервые сформулировал и решил интегральное уравнение. Его друзья убеждали норвежское правительство предоставить ему стипендию для обучения в Германии и Франции.

1824 – ожидая выхода королевского указа, ***за свой счет*** опубликовал **доказательство невозможности** алгебраического решения общего уравнения пятой степени. Отправил брошюру Гауссу, который не счел доказательство верным.

1825–1826 – учеба в Берлине и знакомство с Августом Леопольдом Крелле (1780–1855), самоучкой, но ставшим членом Берлинской академии наук, основателем "*Journal für die reine und angewandte Mathematik*".

1826 – подробное «*Доказательство невозможности*…» + конкретные примеры неразрешимых уравнений. На эту работу опирался Галуа.

В том же 1826 – путешествие в Италию, поездка в Париж, завершение крупной работы по теории интегралов от алгебраических функций (основа для обобщения теории эллиптических функций на функции нескольких переменных), но – «холодный» прием и утеря мемуаров, представленных в Парижскую академию наук…

1827 – возвращение домой с большими долгами, болезнь обострилась;

– репетиторство + небольшой грант от университета Христиании, где с 1828 – временная преподавательская должность.

Появление чисто математических журналов

1795 ***Журнал Политехнической школы***

1810–1831 «Анналы» Жергонна
«Annales des mathématiques pures et appliques »

1826 журнал Крелля
«Journal für die reine und angewandte Mathematik»

1836 Лиувилль продолжает «Анналы» Жергона
– **журнал Лиувилля**

1866 ***«Математический сборник»*** Московского математического общества

1868 ***«Mathematische Annales»*** основали Альфред Клебш и Карл Нейман. В разное время главными редакторами были Ф. Клейн, Д. Гильберт и др.

1871 **Реферативные журналы**:
первый в Германии – отреферированы работы до 1868 г., около 900 работ 650 авторов.
В 31м томе за 1900 г. – более 2600 работ 1500 авторов.

1828 – избран членом Королевского научного общества Норвегии.

В этот период он написал большое количество статей, главным образом по теории уравнений (Крелле, 1829 "*О специальном классе алгебраически разрешимых уравнений*") и по теории эллиптических функций, которую разработал, соперничая с берлинским математиком Карлом Густавом Якоби (1804–1851).

К этому времени слава Абеля распространилась на все математические центры. Видные французские математики обратились к королю Норвегии-Швеции Бернадоту, пытаясь обеспечить Абелю подходящую должность. Крелле старался найти для Абеля должность профессора в Берлине.

Осенью 1828 болезненное состояние Абеля ухудшилось и во время поездки к своей невесте во Фролани в 1829 он умер.

В 1839 учитель Хольмбоэ издал в Христиании 2 тома «*Oeuvres completes*». Французская академия обнаружила и опубликовала его мемуары лишь в 1841, отметив мемуар об абелевых функциях Большой премией Парижской Академии.

1829 Н.Х. АБЕЛЬ *«Мемуар об одном особом классе алгебраических разрешимых уравнений»*

– ввел «***область рациональности***» уравнения – множество всех величин, которые рационально выражаются через коэффициенты уравнения и рациональные числа (т.е. множество рациональных функций от коэффициентов уравнения).

Мы: *алгебраическое расширение поля*, полученное присоединением коэффициентов и корней уравнения, основное поле.

– **нашел** (еще один, после уравнений деления круга) специальный, очень широкий **класс уравнений любой степени, разрешимых в радикалах**:

1) ***нормальное*** уравнение, т.е. любой корень рационально выражается через какой-нибудь один;

2) группа корней ***коммутативна***: $\vartheta_i(\vartheta_j(x_1)) = \vartheta_j(\vartheta_i(x_1))$.

Фактически **АБЕЛЬ исследовал структуру коммутативных групп** и доказал, что они являются произведением циклических.

НО понятий группы и терминов нет.

Последний год своей жизни искал общий критерий разрешимости в радикалах любого уравнения с заданными числовыми коэффициентами, но не успел.

Полное решение – **<u>ГАЛУА.</u>**