1770(1771) – 1772(1773)

Ж.Л. ЛАГРАНЖ

Réflexions sur la résolution algébrique des équations

Жозеф Луи ЛАГРАНЖ

(фр. *Joseph Louis Lagrange*,
итал. *Giuseppe Lodovico Lagrangia*)
25.01.**1736**, **Турин** – 10.04.**1813**, **Париж**

– французский математик, астроном и механик итальянского происхождения.

Учился в Туринском университете на адвоката, но случайно познакомившись с трактатом по математической оптике, заинтересовался математикой.

1755 – послал Эйлеру работу об изопериметрических свойствах ⟹ создание вариационного исчисления ⟹ в 1759 по рекомендации Эйлера и Даламбера был избран иностранным членом Берлинской АН.

Тюлина И.А. Жозеф Луи Лагранж (1736–1813). М.: Наука, 1977. 222 с.

1755 – преподает математику в Королевской артиллерийской школе и в 1757 организует там частное научное общество (позже –Туринская АН).

С 1759 принимал активное участие в подготовке "**Туринских мемуаров**", где появились его труды по вариационному исчислению, механике твердых и жидких тел, о распространении звука и др.

1762 – первое описание общего решения вариационной задачи. Оно не было ясно обосновано и встретило резкую критику. **Эйлер** в 1766 дал строгое обоснование вариационным методам и в дальнейшем всячески поддерживал Лагранжа.

1764 – Первая премия Французской академии наук за работу о либрации Луны (точки Лагранжа).

1766 – Вторая премия Парижской Академии (ФАН) за исследование по теории движения спутников Юпитера. До 1778 был удостоен ещё трёх премий.

1766 – (по рекомендации Даламбера и Эйлера, решившего вернуться в Петербург) директор математического класса в Берлинской АН. Позже – ее президент.

Прусская АН: иностранный член в 1756–1766 и с 1787; действительный член 1766–1787;

Парижская АН: иностранный член в 1772–1787, действительный с 1787;

Петербургская АН: с 1776 – иностранный член;

Лондонское королевское общество: с 1791.

Берлинский период (1766–1787) – самый плодотворный: алгебра и теория чисел, аналитическая механика – вершина научной деятельности Лагранжа.

1787 – переезд в Париж, 1788 – "знаменитая "Аналитическая механика" два года пролежала на столе автора нераскрытой".

Но преподавание в Политехнической школе (1797) привело к созданию нового курса по анализу: 1797 Теория аналитических функций;
1801 Лекции об исчислении функций.

По количеству областей исследования и их разнообразию уступает только Эйлеру.

Чеботарёв Н.Г. О значении работ Лагранжа по теории чисел и алгебре // УМН. 1936. Вып. 2. С. 17–31.

Основные результаты Лагранжа в области алгебры:

1) ***подготовка аппарата для общей теории решения уравнений в радикалах*** (теории Галуа); исследование так называемых „буквенных уравнений";

2) способ приближенного вычисления корней алгебраического уравнения при помощи непрерывных дробей;

3) первый метод отделения корней алгебраических уравнений;

4) метод исключения переменных из систем уравнений (составление результанта);

5) разложение корней буквенных уравнений в ряды (так называемый "ряд Лагранжа"). Этот результат относятся скорее к анализу, но он сыграл немалую роль в развитии алгебры.

1771 – Лагранж начинает публикацию своего мемуара «***Размышления о решении числовых уравнений***» (*Réflexions sur la résolution algébrique des équations*) и дополнений к нему. Впервые в математике появляется **конечная группа подстановок**.

Позднее Абель и Галуа черпали вдохновение в этой блестящей работе.

Впервые в математике Лагранж высказывает предположение, что **не все уравнения выше 4-й степени разрешимы в радикалах**.

Строгое **доказательство** этого факта дал **Абель** в 1824–1826, а **общие условия разрешимости** нашёл **Галуа** в 1830–1832.

1770 (1771) – 1772 (1773) Ж.Л. Лагранж

"***Размышления об алгебраическом решении уравнений***"

носит отчасти историко-критический характер:

– в первых двух частях Лагранж анализирует все существовавшие до него методы решения уравнений 3й и 4й степеней (Декарт, Чирнгаузен, Эйлер, Безу и др.) и показывает, почему ни один из них не годится для уравнения 5й степени:

... *Весьма сомнительно, чтобы методы, о которых мы только что говорили, могли дать полное решение уравнений пятой степени и, тем более, уравнений более высоких степеней; и эта неуверенность, соединенная с длиной вычислений, которых требуют эти методы, должна впредь отбивать охоту у всех, кто мог бы захотеть применить их для решения одной из самых знаменитых и самых важных Проблем Алгебры.*

Также мы видим, что сами Авторы этих методов довольствуются тем, что применяют их к [уравнениям] третьей и четвертой степеней и что никто еще не брался за то, чтобы продвинуть их работу дальше.

– в третьей части обсуждаются частные типы разрешимых уравнений высших степеней – уравнения деления круга, циклические уравнения, уравнения с полной метациклической группой порядка *n*(*n-1*).

Примеры разрешимых в радикалах уравнений высоких степеней первыми **получили**:

Карл Фридрих **Гаусс** **1801** $\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$

Уравнение деления круга при *n* = $2^{2^k} + 1$ разрешимо в квадратных радикалах.

Нильс Генрик **Абель** **1828/29**

Разрешимость нормальных уравнений и с абелевой группой.

– в четвертой части Лагранж делает теоретические выводы из всего рассмотренного материала.

Из мемуара **Ж. Л. Лагранж**а
«***Размышления об алгебраическом решении уравнений***» (1771–1773)

... Мы должны были видеть из только что данного анализа основных известных методов решения уравнений, что ***все эти методы сводятся к одному и тому же*** *общему принципу, а именно –* ***найти функции от корней*** *предложенного уравнения, которые будут такими:*

1° *что уравнение или уравнения, которыми они задаются, так сказать, корнями которых они являются (уравнения, обыкновенно называемые приведенными), окажутся меньшей степени, чем предложенное, или, по крайней мере, будут разлагаться на другие уравнения степени меньшей, чем исходное;*

2° *чтобы можно было легко вычислить значения искомых корней.*

Итак, искусство решения уравнений заключается, следовательно, в нахождении функций от корней, которые обладали бы свойствами, нами только что высказанными; но ***всегда ли возможно*** *найти такие функции для уравнений любой степени, так сказать, для такого числа корней, которое мы только захотим? Это вопрос, на который, кажется, вообще очень трудно дать ответ.*

Подход Лагранжа чисто алгебраический: пусть дано уравнение

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

с произвольными буквенными коэффициентами и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корни этого уравнения. Рассмотрим рациональную функцию от корней

$$y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

1. Лагранж показывает, что **если она не изменяется** при всех возможных перестановках корней (т.е. при действии симметрической группы подстановок S_5), **то она рационально выражается** через коэффициенты уравнения (1). Это – предложение **(А)**, использованное Эйлером без доказательства.

2. Пусть теперь при всех перестановках корней $y = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ принимает **ровно *k*** различных значений. **Лагранж показывает**, что такая функция будет удовлетворять **уравнению *k***-й степени, коэффициенты которого **рационально выражаются** через коэффициенты исходного – предложение **(Б)** у Эйлера.

I. Составим вслед за **Лагранжем** для $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – некоторой рациональной функции от корней уравнения (1) уравнение

$$(y - y_1)\dots(y - y_k) = y^k - (y_1 + \dots + y_k)y^{k-1} + \dots + (-1)^k(y_1 \dots y_k) = 0,$$

где $y_1, y_2, \dots, y_k$ – все возможные значения функции y.

Коэффициенты этого уравнения – симметрические функции корней $x_1, x_2, \dots, x_n$ уравнения (1) (это утверждение в общем виде в **1765** доказал Э. **Варинг**), поэтому они рационально выражаются через коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Из этих рассуждений видно, что

(С): ***степень k вспомогательного уравнения зависит не от вида функции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а лишь от того, сколько различных значений она принимает при всех подстановках из S_n.***

И именно это утверждение **(С)** для Лагранжа является "*истинным принципом и, так сказать, метафизикой решения уравнений*..."

Вообще говоря, число (k) значений y при подстановках из S_n равно $n!$, но иногда можно найти такие функции $y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые примут $k < n$ значений. Например, функция

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

при любом n принимает только два различных значения: φ и $-\varphi$, отличающиеся знаком.

В результате глубокого анализа проблемы Лагранж приходит к выводу:

вопрос о решении уравнений в радикалах сводится к рассмотрению *(на современном математическом языке)* ***группы подстановок корней уравнения и ее подгрупп***!

Лагранж не вводит понятий группы и подгруппы, но широко пользуется частным случаем – **подстановками** – преобразованиями, переводящими корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в другую последовательность тех же корней.

Принятые сегодня определения и обозначения подстановок разработал, занимаясь теорией определителей, **О.Л. Коши** в **1815** г. в мемуаре "***Основы теории подстановок***":

Подстановкой называется преобразование, переводящее корни уравнения $x_1, x_2, \dots, x_n$ в другую последовательность тех же корней $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$ и обозначается

$$\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_{k_1} \dots x_{k_n} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots n \\ k_1 & k_2 & \dots k_n \end{pmatrix}.$$

Произведением двух подстановок называется результат их последовательного выполнения. Тождественная подстановка переводит каждый корень в себя. Каждая подстановка имеет обратную: для нее меняются местами строки.

Группа всех подстановок *n* элементов называется симметрической группой и обозначается S_n. Порядок этой группы равен n!

Легко видеть, что все подстановки, оставляющие неизменной некоторую рациональную функцию от корней $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, образуют в S_n подгруппу *H*.

Если подстановка σ меняет φ: $\sigma\varphi = \varphi_1$, то и все подстановки класса σH переведут φ в φ_1.

Чтобы узнать, сколько значений примет φ, Лагранж, не пользуясь терминами "*группа*" и "*смежный класс*", фактически разбивает группу S_n на смежные классы по подгруппе *H*:

$$S_n = H + \sigma_1 H + \sigma_2 H + \dots + \sigma_{k-1} H$$

Он устанавливает, что в каждом классе $\sigma_i H$ содержится столько же элементов *h*, сколько и в подгруппе *H*, и что $\sigma_i H$ и $\sigma_j H$ либо совпадают, либо не пересекаются. Следовательно, $hk = n!$, т.е. число различных значений φ есть $k = \frac{n!}{h}$.

Домашнее задание 1.1:

Изложите на современном языке теории групп доказательство утверждения (С).

II. Исследуя рациональные функции от корней уравнения, Лагранж строит **учение о подобных функциях**, позволяющее (в современной терминологии) **связать подгруппы группы перестановок корней уравнения с подполями поля разложения многочлена** – соответствие, впоследствии занявшее центральное место в исследованиях Гаусса и в теории Галуа.

Две функции от корней уравнения Лагранж называет ***подобными***, если они ***не меняются при одной и той же подгруппе подстановок H:***

"… *Итак, если имеется несколько функций от одних и тех же количеств, то подобными будем называть такие, которые одновременно меняются или одновременно остаются неизменными, если производят одинаковые перестановки количеств, из которых они составлены*…"

Переформулируя результаты Лагранжа, можно сказать, что подобными будут функции φ и ψ, принадлежащие одной и той же подгруппе, т. е. $H\varphi=\varphi$, $H\psi=\psi$, все же остальные подстановки из S_n меняют эти функции.

Затем Лагранж доказывает, что ***подобные функции рационально выражаются одна через другую и через коэффициенты уравнения*** и заключает:

Из всего нами доказанного следует, вообще, 1) что все *подобные* функции от корней x', x'', x''', ... одного и того же уравнения необходимо задаются уравнениями одинаковой степени; 2) что эта степень всегда будет равна числу $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \mu$ (где μ — степень данного уравнения) или делителю этого числа; 3) что для нахождения прямым образом наиболее простого уравнения $\Theta = 0$, которое определяет некоторую заданную функцию от x', x'', x''', ..., надо только найти все различные значения, которые может принимать эта функция при всевозможных перестановках между собой количеств x', x'', x''', ... , и, взяв эти значения за корни искомого уравнения, определить с их помощью коэффициенты этого уравнения, что делается известными методами, уже неоднократно примененными в этом мемуаре.

На языке теории полей это означает, что функции, принадлежащие одной и той же подгруппе *H*, лежат в одном и том же поле, которое получается присоединением к полю $\boldsymbol{Q}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ одной из этих функций, и является частным случаем теоремы Галуа, характеризующей подполе нормального расширения как поле инвариантов его группы Галуа.

Этот подход позволяет Лагранжу выбрать из подобных функций **самую простую – резольвенту Лагранжа**:

$$t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n, \qquad \text{где } \alpha^n = 1, \quad \alpha \neq 1,$$

с помощью которой решаются уравнения 3й и 4й степеней, а также циклические уравнения любой степени, которые он рассматривает в третьей части своего мемуара.

Для кубического уравнения Лагранж показывает явно, как с помощью его резольвенты искать корни исходного уравнения x_1, x_2, x_3 (домашнее задание 1.2).

Из мемуара **Ж. Л. Лагранж**а

«***Размышления об алгебраическом решении уравнений***» (1771–1773)

Что касается уравнений, степень которых не превосходит четырех, то самые простые функции, дающие их решения, могут быть представлены формулой

$$x' + yx'' + y^2x''' + \ldots + y^{\mu-1}x^{(\mu)},$$

где x', x'', x''', ..., $x^{(\mu)}$ — корни предложенного уравнения, степень которого μ, а y — отличный от единицы корень уравнения

$$y^\mu - 1 = 0,$$

т. е. некоторый корень уравнения

$$y^{\mu-1} + y^{\mu-2} + y^{\mu-3} + \ldots + 1 = 0,$$

как это следует из всего изложенного в двух первых частях относительно решения уравнений 3-й и 4-й степени.

Рассмотрим, для примера, решение способом Лагранжа общего уравнения 4-й степени

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0.$$

Пусть корни этого уравнения a, b, c, d. Рассмотрим резольвенту

$$a + b - c - d,$$

т. е.

$$a + \varepsilon c + \varepsilon^2 b + \varepsilon^3 d,$$

где $\varepsilon = -1$. Переставляя в ней a, b, c, d всеми $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ различными способами, мы получаем всего шесть различных выражений:

$$\begin{gathered} a + b - c - d, \\ a + c - b - d, \\ a + d - c - b, \\ c + d - a - b, \\ b + d - a - c, \\ b + c - a - d. \end{gathered} \tag{5}$$

Уравнение 6-й степени, корнями которого являются эти шесть выражений, будет, следовательно, иметь коэффициенты, которые не изменяются от всех 24 перестановок a, b, c, d, так как любая из 24 перестановок может только переставить эти выражения друг с другом, а коэффициенты рассматриваемого уравнения 6-й степени не зависят от порядка, в котором мы берем его корни. Таким образом, эти коэффициенты — симметрические многочлены от a, b, c, d. Но тогда, в силу основной теоремы о симметрических многочленах, коэффициенты эти выражаются цело-рационально через коэффициенты m, n, p, q уравнения. Кроме того, так как выражения (5) — попарно обратных знаков, то это уравнение 6-й степени будет содержать только члены четных степеней. Действительно, если выражения (5) обозначить через $\alpha, \beta, \gamma, -\alpha, -\beta, -\gamma$, то левая часть рассматриваемого уравнения 6-й степени будет равна

$$(y-\alpha)(y+\alpha)(y-\beta)(y+\beta)(y-\gamma)(y+\gamma)=(y^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2)(y^2-\gamma^2).$$

Непосредственное вычисление дает уравнение 6-й степени

$$y^6-(3m^2-8n)y^4+3(m^4-16m^2n-16n^2+16mp-64q)y^2-$$
$$-(m^2-4m+8p)^2=0.$$

Полагая $y^2=t$, получаем кубическое уравнение для t, и если t', t'', t''' — его корни, то

$$a+b-c-d=\sqrt{t'},$$
$$a+c-b-d=\sqrt{t''},$$
$$a+d-b-c=\sqrt{t'''}.$$

Кроме того, мы еще имеем

$$a+b+c+d=-m.$$

Складывая эти уравнения после предварительного умножения их на 1, 1, 1, 1 или 1, -1, -1, 1, или -1, 1, -1, 1, или -1, -1, 1, 1, мы получаем

$$a = \frac{1}{4}(-m + \sqrt{t'} + \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}),$$
$$b = \frac{1}{4}(-m + \sqrt{t'} - \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}),$$
$$c = \frac{1}{4}(-m - \sqrt{t'} + \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}),$$
$$d = \frac{1}{4}(-m - \sqrt{t'} - \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}).$$

Таким образом решение уравнения 4й степени сведено к решению кубического уравнения. Аналогично решаются и уравнения 3й и 2й степеней. Другими словами, Лагранжу с помощью его резольвенты удалось найти **общий подход к** решению алгебраических уравнений.

Домашнее задание 1.2: **Решение кубического уравнения с помощью резольвенты** Лагранжа:

$$y^3 + py + q = 0.$$

Пусть $y_1,\ y_2,\ y_3$ – его корни (для этого уравнения $y_1 + y_2 + y_3 = 0$).

Составим выражение $t = y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3,$ где $\alpha^3 = 1,\ \ \alpha \neq 1,$

и затем $\theta = t^3 = (y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3)^3.$

Но циклическая подгруппа H в S_3 имеет индекс 2, т.е. θ будет принимать два различных значения (**показать явно**):

$$\theta_1 = (y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3)^3,$$

$$\theta_2 = (y_1 + \alpha y_3 + \alpha^2 y_2)^3.$$

Можно **вычислить**, что $\begin{cases} \theta_1\theta_2 = -27p^3 \\ \theta_1 + \theta_2 = 27q' \end{cases}$

т.е. θ_1 и θ_2 определяются из квадратного уравнения с рациональными коэффициентами. **Получить** отсюда явные выражения для y_1, y_2, y_3.

Итак, Лагранжу принадлежит

1) идея о том, что решение уравнений в радикалах зависит от группы подстановок корней уравнения и ее подгрупп;
2) идея изучения "подобных" функций, которая приводит его к рассмотрению простейшего вида функций от корней – **резольвенты Лагранжа**:

$$t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n, \qquad \text{где } \alpha^n = 1, \quad \alpha \neq 1.$$

Главнейшие достижения Лагранжа в этом направлении:

1. Отмечена **важность** изучения **рациональных функций от корней**, принимающих при перестановках последних **определенное число значений**. Лагранж подчеркивает, что для решения уравнения не имеет значения выбор той или другой функции из числа "**подобных**".

В переводе на современный язык это означает, что важность имеет выбор подгруппы, к которой принадлежит функция. Важно найти подгруппу наименьшего индекса, т. е. наибольшего порядка (индекс равен степени уравнения, которому удовлетворяет функция).

2. Лагранж показал, что „подобные" функции выражаются рационально одна через другую и через коэффициенты заданного уравнения. Выражаясь современным языком, он показал, что каждой подгруппе соответствует определенный ***делитель поля***. Это уже приближает концепцию Лагранжа к современной.

3. Проведенный Лагранжем анализ носит название ***буквенного***; это означает, что коэффициенты уравнения считаются независимыми переменными.

Лагранж показывает, что в тех случаях, когда между корнями уравнения имеются определенные ***соотношения,*** уравнения высших степеней допускают решение в радикалах.

Впоследствии **Галуа** углубил эту концепцию, рассматривая не полную симметрическую группу подстановок, а ту ее подгруппу, которая не нарушает соотношений между корнями, и перенес на такую группу построенную теорию Лагранжа.

4. Лагранж эмпирически пришел к необходимости изучать рациональные функции от корней, т. е. *натуральные иррациональности*. В последующих теориях это понятие сыграло решающую роль (Абель, Кронекер).

5. Лагранж указал способ решения уравнений, называемых теперь *циклическими*. Этот способ и теперь носит название метода Лагранжа и играет основную роль в современной теории решения уравнений в радикалах.

6. Лагранж вводит в рассмотрение уравнения, корни которых суть линейные функции от корней заданного уравнения, и через каждый корень которого рационально выражаются корни заданного уравнения. Лагранж называет его *réduite* ("разрешающим"). Впоследствии это уравнение получило название *резольвенты Галуа*. Оно служит исходным пунктом при построении теории Галуа.

7. В теории групп существует **теорема Лагранжа** о том, что порядок подгруппы есть делитель порядка группы. В явном виде у Лагранжа этой теоремы нет, но его рассуждения о функциях, принимающих разное число значений, дали все необходимое для ее доказательства.

Вот, если я не ошибаюсь, истинные принципы решения уравнений, и самый тщательный анализ приводит к этому; все сводится, как видим, к некоторому виду исчисления комбинаций (combinaisons), посредством которого находим a priori результаты, которых следует ожидать. Было бы кстати применить их к уравнениям пятой степени и высших степеней, решение которых до настоящего времени неизвестно; но это применение требует очень большого числа исследований и комбинаций (combinaisons), успех которых, впрочем, еще очень сомнителен, чтобы мы могли, если речь идет о настоящем, заняться этой работой; мы, однако, надеемся найти возможность вернуться к ней в другое время и удовольствуемся здесь тем, что заложили основы теории, которая кажется нам новой и общей.

Тем не менее, мемуар Лагранжа остался в некотором смысле незавершенным. Для доказательства неразрешимости уравнения 5й степени в радикалах **Лагранжу не хватало**:

1) доказать невозможность построения при $n \geq 5$ рациональной функции от корней, которая удовлетворяла бы уравнению более низкой, чем *n*, степени (теорема Бертрана (1822–1900)):

При $n \geq 5$ симметрическая группа S_n не имеет подгрупп индексов от 2 до n.

2) доказать, что всякий промежуточный радикал является рациональной функцией корней уравнения. Абель позже показал, что это верно для всех методов, рассмотренных Лагранжем. В общем виде – теорема Кронекера о натуральных иррациональностях.

Метод исследования у Лагранжа гораздо более современный, чем даже в более поздних работах Руффини и Абеля. Этот метод, существенно дополнив его, полностью воспринял Галуа. Одним из главнейших его дополнений стало четко сформулированное понятие **группы**.

Паоло **РУФФИНИ** (1765–1822) в статье

1799 «***Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto***» (около 500 стр.):

– рассмотрел подстановки для $n = 5$ и их произведения;

– показал: если у функции от 5 переменных менее 5 различных значений, то их не больше двух $\Rightarrow$ невозможно построить резольвенту Лагранжа степени ниже 5.

НО посылка Руффини о том, что все промежуточные радикалы в выражении для корня нового уравнения являются рациональными функциями корней исходного уравнения, ***не была обоснована***.

Огюстен Луи КОШИ (1789–1857)

1812 в двойном мемуаре "***О симметрических функциях***"

заложил **основы теории подстановок**:

– удобные обозначения (до сих пор), произведение двух подстановок, обратная подстановка, порядок подстановки и т.п.

В **1815** он обобщил результат Руффини на все n и доказал, что группа подстановок при $n > 5$ не имеет подгрупп индекса, большего 2 и меньше наименьшего простого числа, не превосходящего n.

На этом пути **Нильс Хенрик АБЕЛЬ** (**1826**) получил свое **полное доказательство невозможности** разрешимости алгебраического уравнения в радикалах при $n \geq 5$.

Почти одновременно с Лагранжем к аналогичным выводам, но в менее общей форме, в своем "***Мемуаре о решении уравнений***" (1771) пришел Александр Теофил **ВАНДЕРМОНД** (1735–1796, музыкант и математик).

Л. Кронекер в 1888 г. утверждал, что именно с этой работы Вандермонда началась современная алгебра, а Коши еще ранее писал, что основные идеи теории групп принадлежат Вандермонду, а не Лагранжу.

В своей работе Вандермонд также пытался выразить в радикалах корни уравнения $x^n - 1 = 0$, дойдя только до n = 11. Эти интересные изыскания, тем не менее, остались малоизвестны и влияния на ход развития алгебры не оказали, т.к. мемуар Вандермонда был "обнаружен" и прокомментирован только в XX в.

После Лагранжа – **два направления исследований**:

Исследование уравнений с <u>буквенными</u> коэффициентами:

Паоло **Руффини** 1799

Огюстен-Луи **Коши** 1815
Основы теории подстановок

Нильс Генрик **Абель** 1824/26
Доказательство неразрешимости уравнений с буквенными коэффициентами степени ≥ 5

Эварист **Галуа** 1832

Классы разрешимых уравнений и уравнения с <u>числовыми</u> коэффициентами:

Карл Фридрих **Гаусс** 1801
Уравнение деления круга

Нильс Генрик **Абель** 1828/29
Разрешимость нормальных уравнений и с абелевой группой

Эварист **Галуа** 1832
Теория Галуа.
Критерий разрешимости уравнения. Группы, поля.