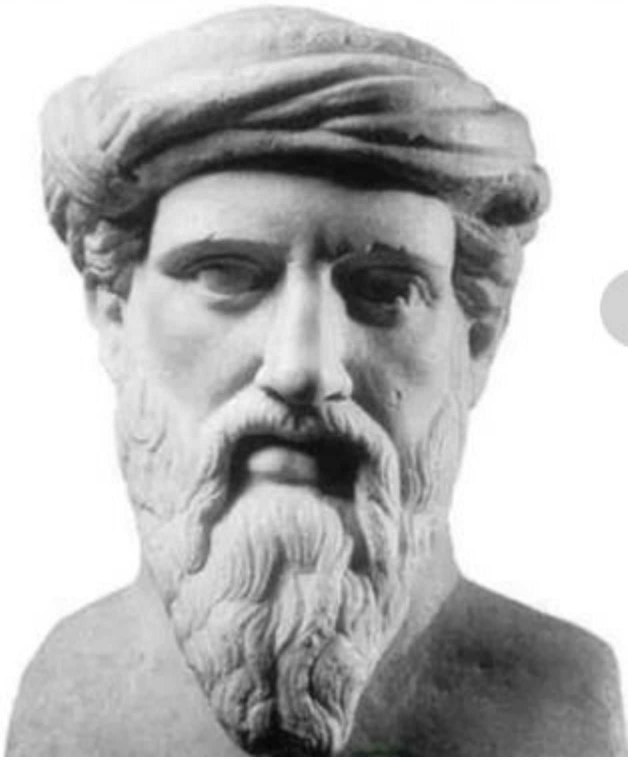
История уравнения неразрывности Эйлера

Овсянников Владислав Михайлович

OvsyannikovVM@yandex.ru

Биография Пифагора

- Пифагор(с греч. «убеждающий речью») - древнегреческий философ и математик, создатель религиозно-философской школы пифагорейцев. Родился в Сидоне, Финикия около 570 года до нашей эры. Он обучался в нескольких храмах Греции. Первыми его учителями были Ферикид Сиросский и старец Гермодамант. В юном возрасте Пифагор отправился в Египет.

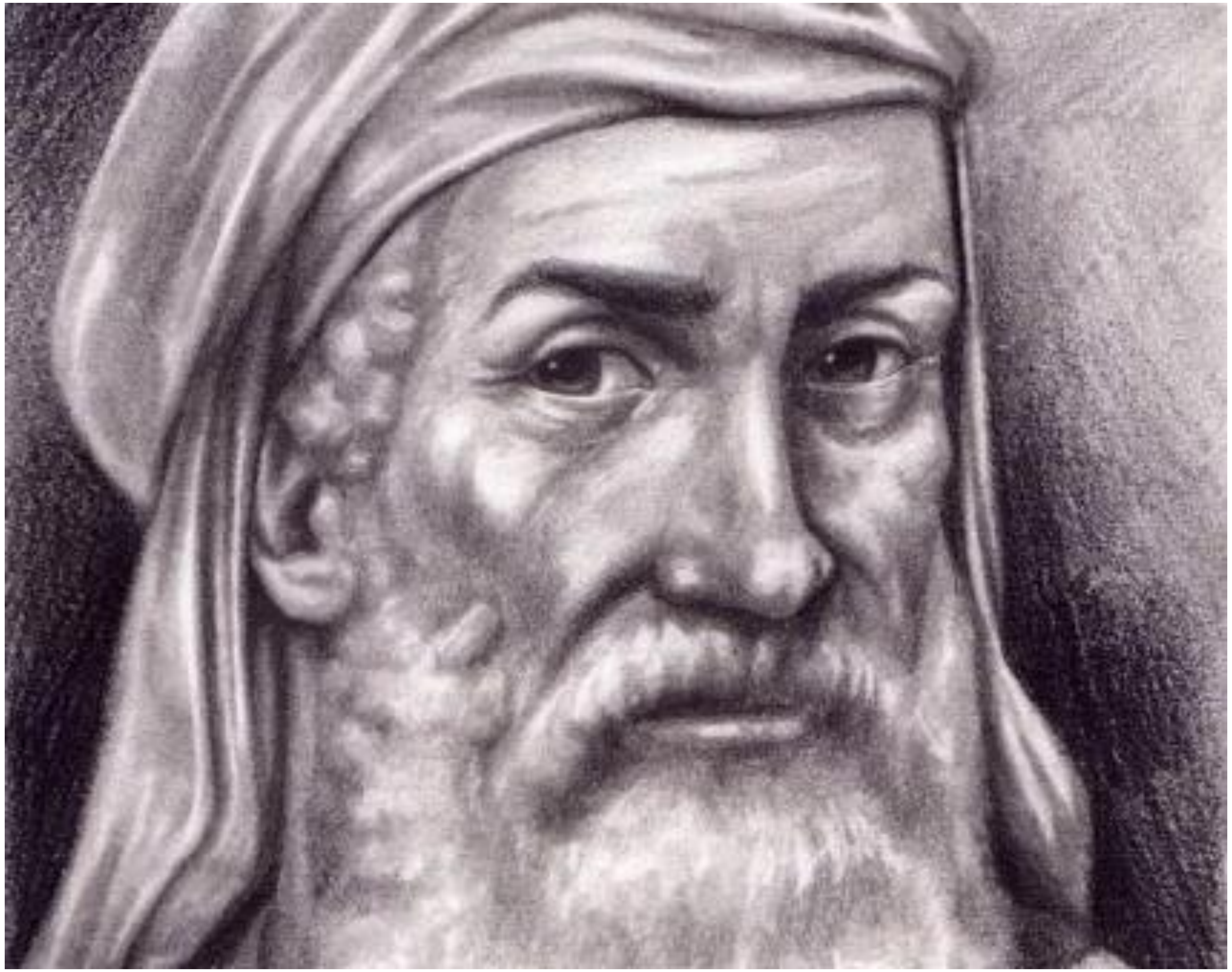


Школа Пифагора просуществовала еще около 100 лет после его смерти в 490 г. до н.э.

Фёдор Бронников. Гимн пифагорейцев солнцу

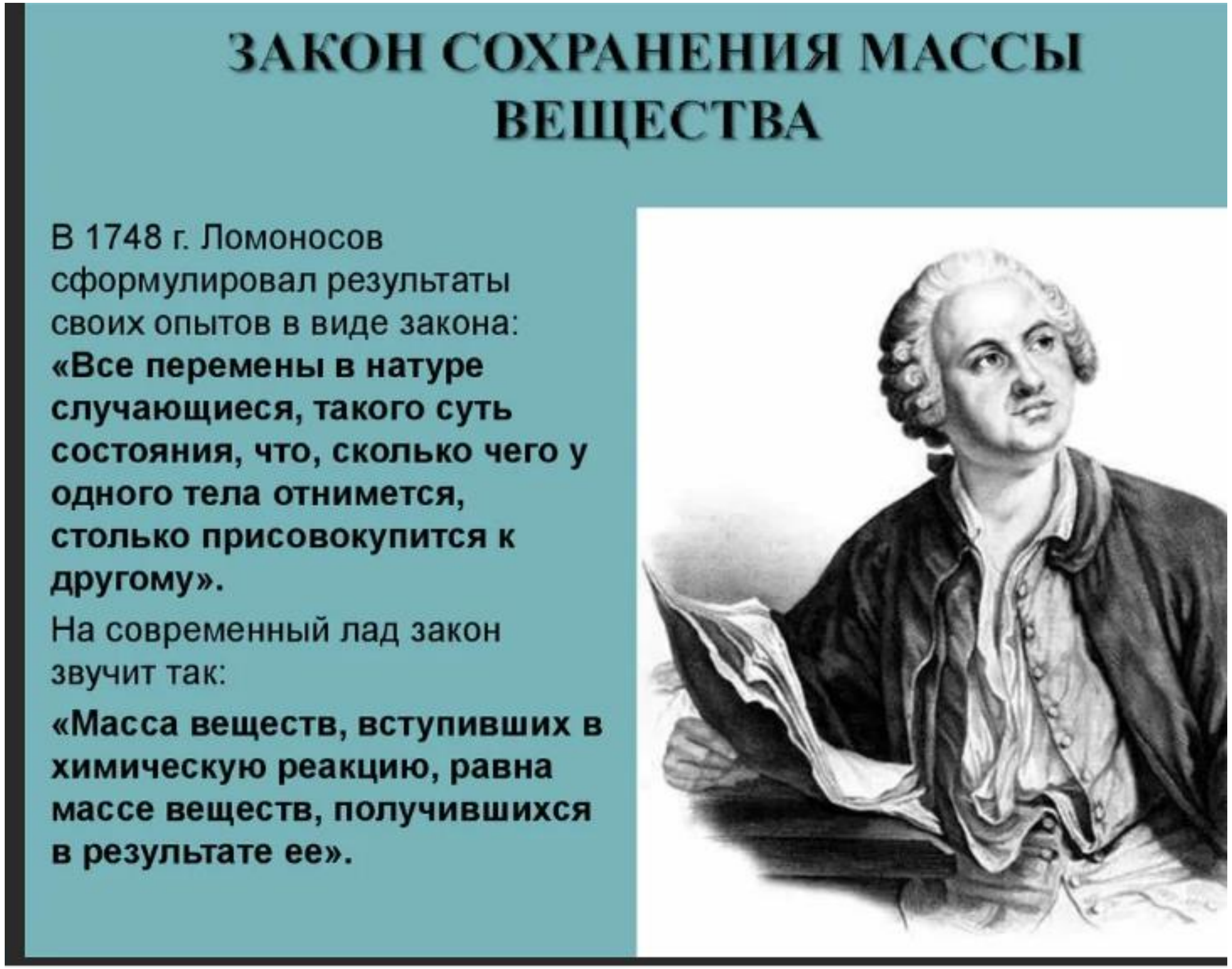
Эмпедокл (490-430 до н.э.) - участник школы Пифагора в стихотворной форме выразил закон сохранения в такой формулировке

«Ничто не может произойти из ничего, и никак не может то, что есть, уничтожиться»



Формулировка Ломоносова 1748 г.

Формулировка Древних и Ломоносова закона сохранения относится к интегральному описанию сохранения (а не к дифференциальному) в одном замкнутом, изолированном от окружающего пространстве.



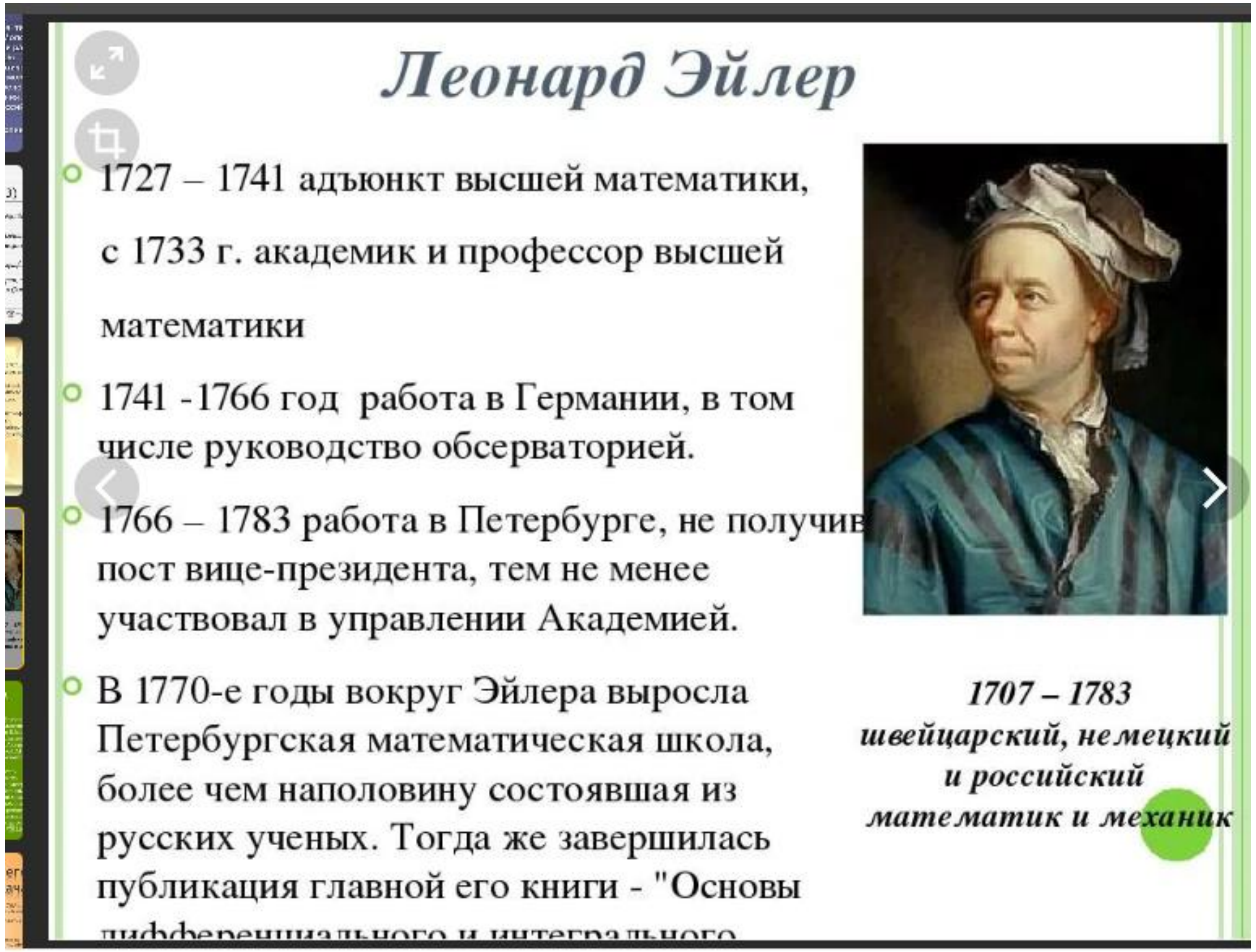
Жан Лерон Д'Аламбер 1717–1783

В 1745 г. опубликовал мемуар «Рассуждения об общей причине ветров», получивший награду от Прусской Королевской АН.

В работе были опубликованы правила составления дифференциальных уравнений движения и неразрывности для расчетов приливов в воздушной атмосфере Земли под воздействием притяжения Луны и Солнца

Леонард Эйлер
1707–1783

Эйлер вывел и доложил в 1752 г. в Прусской Академии Наук дифференциальные уравнения движения жидкости и дифференциальное уравнение неразрывности несжимаемой жидкости. На латыни текст статьи по докладу опубликован в 1761 г. в Петербурге.



Уравнение неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости для несжимаемой жидкости

L. Euler. Principia motus fluidorum. 1752.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+(t-t_0)\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right]$$
$$+(t-t_0)^2\partial(u,v,w)/\partial(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+(t-t_0)\begin{vmatrix}\partial u/\partial x & \partial u/\partial y\\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y\end{vmatrix}+$$

$$(t-t_0)\begin{vmatrix}\partial v/\partial y & \partial v/\partial z\\ \partial w/\partial y & \partial w/\partial z\end{vmatrix}+(t-t_0)\begin{vmatrix}\partial w/\partial z & \partial w/\partial x\\ \partial u/\partial z & \partial u/\partial x\end{vmatrix}+(t-t_0)^2\begin{vmatrix}\partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z\\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial z\\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial w/\partial z\end{vmatrix}=0$$

Выражение уравнения неразрывности через три инварианта тензора скоростей деформаций

- $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+(t-t_0)\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right]+(t-t_0)^2\partial(u,v,w)/\partial(x,y,z)=0$

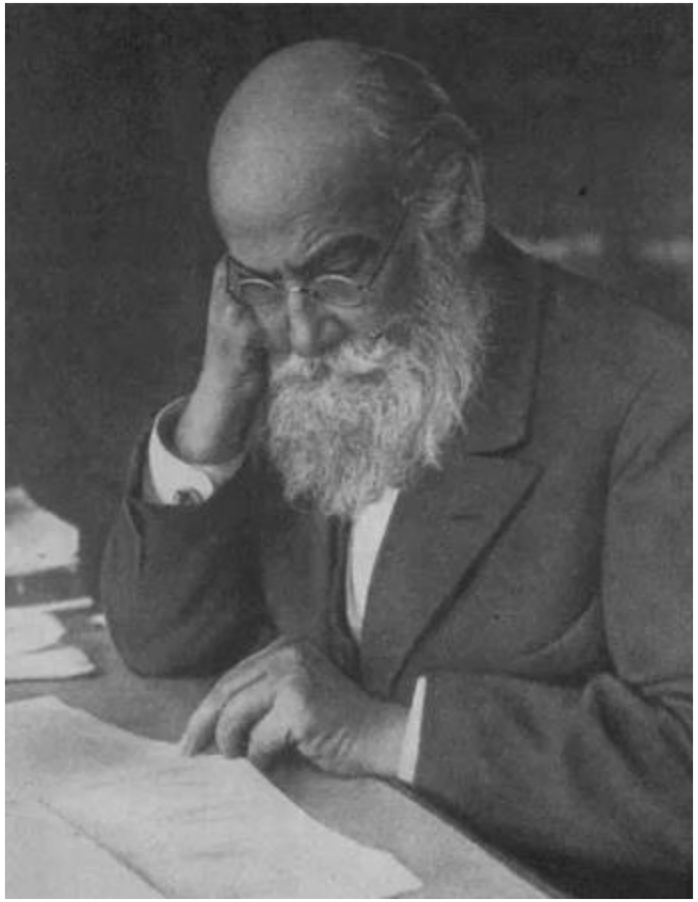
- $I_1+(t-t_0)I_2+(t-t_0)^2 I_3=0$
- I_1- *линейный инвариант*
- I_2- *квадратичный инвариант*
- I_3- *кубичный инвариант*

Зависимость дифференциального уравнения неразрывности от времени означает несохранение количества вещества в каком-то дифференциальном объеме, которых много. Имеется узкая лазейка совместить локальное местное несохранение с выполнением интегрального сохранения – это расчет гармонических волновых процессов, которые возможны в сжимаемой среде.

- При экспоненциальном лагранжевом законе движения жидкой частицы, где эйлерово поле компонент скорости линейно по координатам x, y, z, слагаемых, зависящих от времени не возникает. div V=0
- Эйлер и все другие математики использовали линейный закон движения жидкой частицы, при котором объем изменяется по кубическому закону от времени, а в уравнении неразрывности квадратичная зависимость. В выводах Остроградского, Ламба тоже появляются квадратичные члены, но уничтожаются неправомерным использованием направляющих косинусов.

Николай Егорович Жуковский

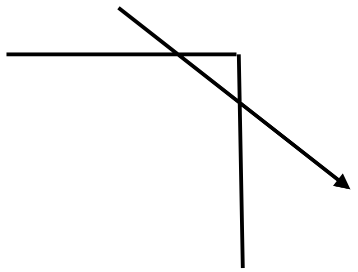
- В магистерской диссертации 1876 г. вывел уравнение неразрывности. При выводе вычислил, но не учел в балансе вещества члены второго порядка малости.

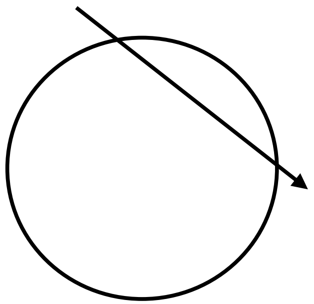


Профессор **Бубнов Владимир Алексеевич** в 1997 г. обратил внимание на существование членов второго порядка малости в выводе уравнения неразрывности **Н.Е. Жуковского 1876 г.** Об этом написано в двух его статьях в сборнике Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике за 1997 и 1999 годы и в монографии, изданной в США . Bubnov V.A. *Convective Heat and Mass Transfer in an Insulated Trailing Swirl* // Begell House Inc. Publishers. New York:1998. 174 p. Это позволило отыскать слагаемые высокого порядка малости в выводе Эйлера уравнения неразрывности.

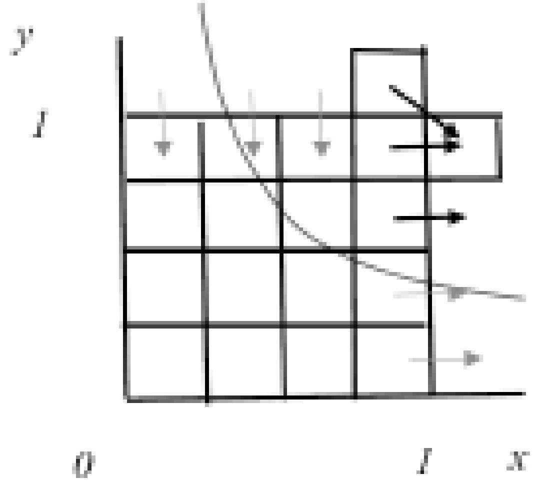
- В магистерской диссертации Н.Е. Жуковского при построении эллипсоида деформаций были вычислены члены второго порядка малости уравнения неразрывности, которые Николай Егорович не стал учитывать в балансе вещества. Об этом написано на стр. 10 первого тома курса Теоретической гидромеханики Н.Е. Кочина, И.А. Кибеля и Н.В. Розе: «… с точностью до величин второго порядка малости.»

Остроградский 1831 г. при выводе уравнения неразрывности поменял действительные траектории жидких частиц на искаженные использованием направляющих косинусов в понятии потока вещества. Таким образом он в балансе вещества не учел частиц, которые за конечный интервал времени успеют дважды пересечь границу контрольной фигуры. Учет этого эффекта можно делать использованием конечно-разностных уравнений или дифференциальных уравнений третьего и второго порядка по времени – волновых уравнений.

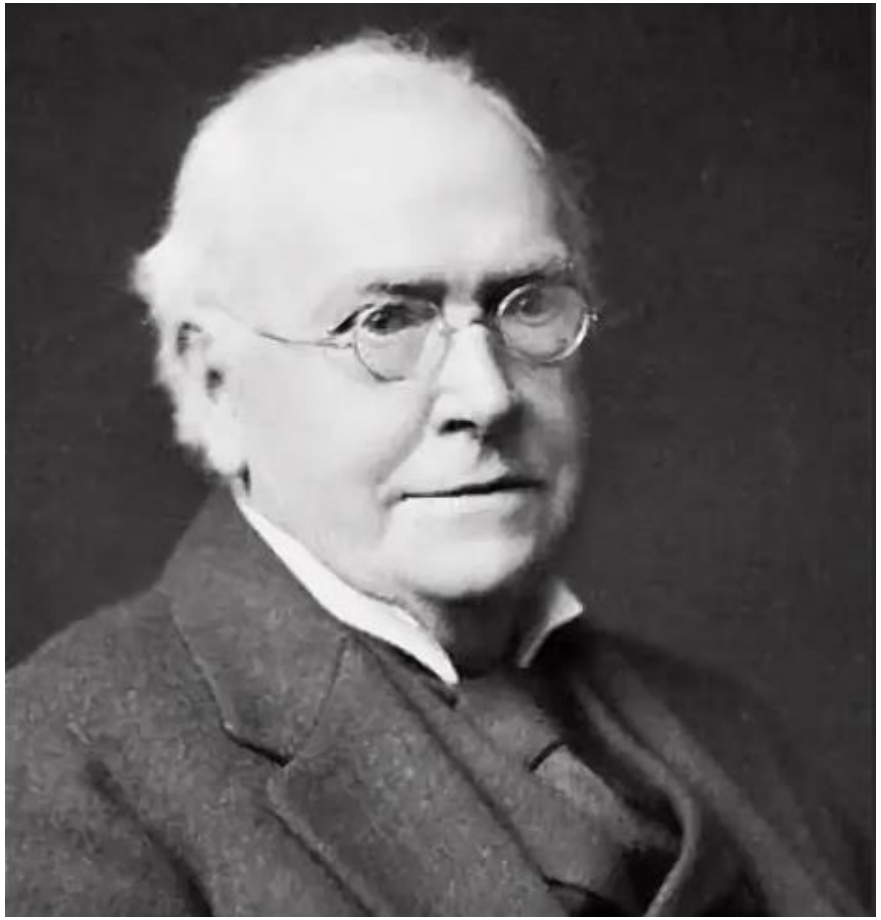




В течении обтекания прямого угла потенциальным потоком числа жидких частиц, дважды пересекающих границу по секущей в построениях Остроградского вывода уравнения неразрывности согласуется с дополнительными слагаемыми высокого порядка малости вычисленными Эйлером.



Гораций Лэмб 1849 –1934



- Шестое издание книги Lamb. Treatise on Hie Mathematical Theory of the Motion of Fluids 1879 года переведена и издана в 1947 г. как Ламб «Гидродинамика» с редактором перевода Н.А. Слезкиным.
- При изложении вывода уравнения неразрывности направляющими косинусами уничтожены члены высокого порядка малости.

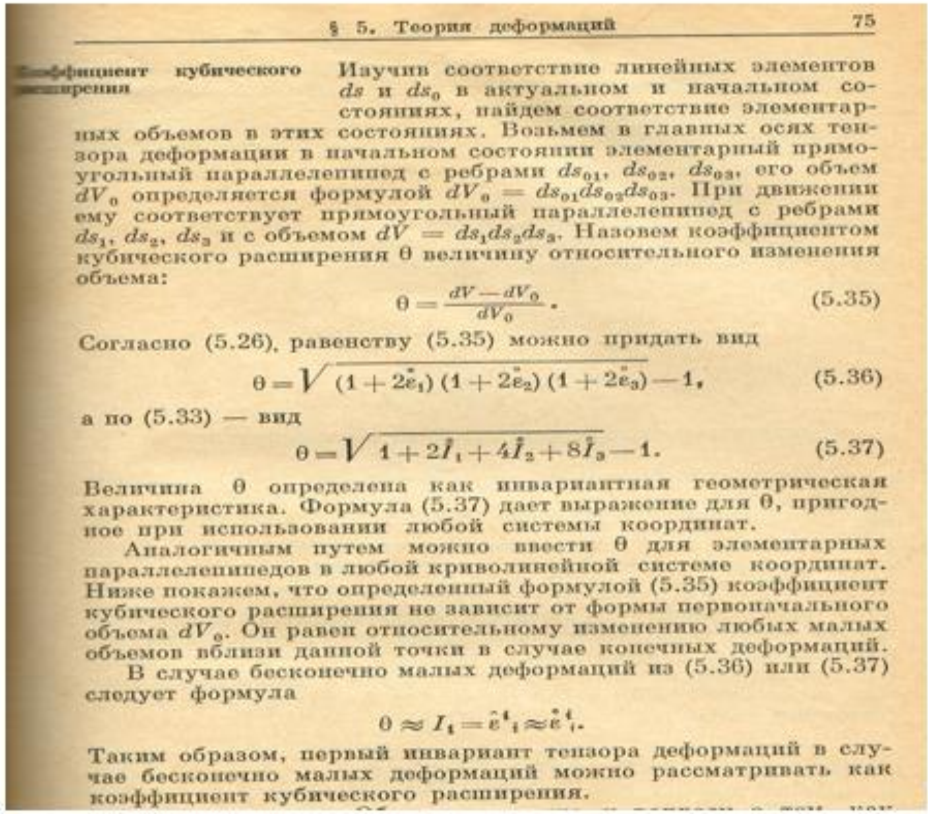
Предложенное в 1951 г. С.В. Валландером и Н.А. Слезкиным уравнение неразрывности при учете только термодиффузии имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u - \beta \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v - \beta \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho w - \beta \frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0 \qquad (11)$$

Здесь β – коэффициент термодиффузии, T – температура.

Леонид Иванович Седов

Л.И.Седов. Механика сплошной среды. Том I, 1973. Уравнение неразрывности без учета второго и третьего инвариантов записано Л.И. Седовым с использованием знака приближенного равенства ≈



…фициент кубического …ширения Изучив соответствие линейных элементов ds и ds_0 в актуальном и начальном состояниях, найдем соответствие элементарных объемов в этих состояниях. Возьмем в главных осях тензора деформации в начальном состоянии элементарный прямоугольный параллелепипед с ребрами ds_{01}, ds_{02}, ds_{03}, его объем dV_0 определяется формулой $dV_0 = ds_{01}ds_{02}ds_{03}$. При движении ему соответствует прямоугольный параллелепипед с ребрами ds_1, ds_2, ds_3 и с объемом $dV = ds_1ds_2ds_3$. Назовем коэффициентом кубического расширения θ величину относительного изменения объема:

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0}. \tag{5.35}$$

Согласно (5.26), равенству (5.35) можно придать вид

$$\theta = \sqrt{(1 + 2\overset{*}{\varepsilon}_1)(1 + 2\overset{*}{\varepsilon}_2)(1 + 2\overset{*}{\varepsilon}_3)} - 1, \tag{5.36}$$

а по (5.33) — вид

$$\theta = \sqrt{1 + 2\overset{*}{I}_1 + 4\overset{*}{I}_2 + 8\overset{*}{I}_3} - 1. \tag{5.37}$$

Величина θ определена как инвариантная геометрическая характеристика. Формула (5.37) дает выражение для θ, пригодное при использовании любой системы координат.

Аналогичным путем можно ввести θ для элементарных параллелепипедов в любой криволинейной системе координат. Ниже покажем, что определенный формулой (5.35) коэффициент кубического расширения не зависит от формы первоначального объема dV_0. Он равен относительному изменению любых малых объемов вблизи данной точки в случае конечных деформаций.

В случае бесконечно малых деформаций из (5.36) или (5.37) следует формула

$$\theta \approx I_1 = \hat{\varepsilon}^{1}{}_{1} \approx \overset{*}{\varepsilon}{}^{1}{}_{1}.$$

Таким образом, первый инвариант тензора деформаций в случае бесконечно малых деформаций можно рассматривать как коэффициент кубического расширения.

В 2006 г. Овсянниковым В.М. выписано уравнение неразрывности Эйлера со слагаемыми высокого порядка малости для сжимаемой жидкости, позволяющее вывести неоднородное волновое уравнение, генерирующее волны плотности и давления.

Для сжимаемой жидкости уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}+(t-t_0)\rho\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right]$$
$$+(t-t_0)^2\rho\,\partial(u,v,w)/\,\partial(x,y,z)=0$$

Здесь ρ - плотность. Выведенное Эйлером уравнение неразрывности может быть записано через инварианты тензора скоростей деформаций, приведенных в учебнике Валландера [8] в виде

$$I_1+(t-t_0)I_2+(t-t_0)^2I_3=0$$

Для сжимаемой жидкости оно принимает вид

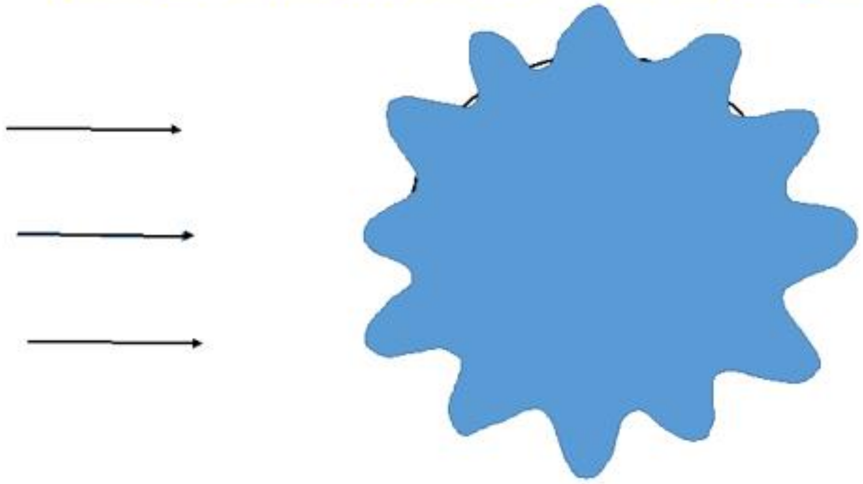
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}+(t-t_0)\rho I_2+(t-t_0)^2\rho I_3=0$$

Неоднородное волновое уравнение гидродинамики с высшими инвариантами в неоднородной, источниковой части. 2007. Овсянников В.М.

- $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \left(\frac{1}{c_\circ{}^2}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_\circ \left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right] + (t - t_0)\rho_\circ 2\,\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$
- Второй инвариант генерирует периодические волны плотности и давления, а третий – гидравлический удар
- $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \left(\frac{1}{c_\circ{}^2}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_\circ I_2 + (t - t_0)\rho_\circ 2 I_3$

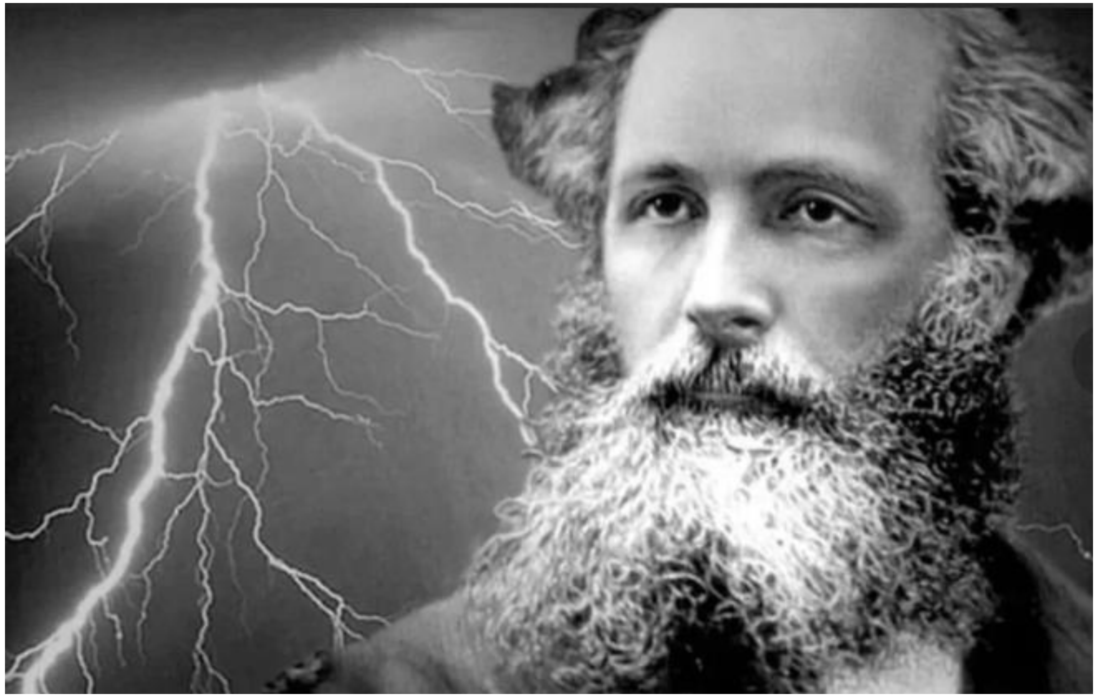
Результат расчета потенциального обтекания цилиндра с образованием системы стоячих волн с максимумами через каждые 30 градусов по окружности

Слайд 7 Система стоячих волн на цилиндре и регмаглипты на метеорите



Уравнения электродинамики Максвелла

- Уравнение неразрывности для магнитного поля Максвелл выписал по аналогии с гидродинамическим уравнением неразрывности без учета членов высокого порядка малости. Имеются основания их включить, чтобы иметь возможность описывать турбулентные свойства поля и анализировать степень неустойчивости



В системе уравнений электродинамики Максвелла аналогичные члены, определяющие неустойчивость, должны присоединяться к оператору дивергенции

для компонент напряженности магнитного поля четвертого уравнения Максвелла в виде

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}+(t-t_0)\left[\frac{\partial(H_x,H_y)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(H_y,H_z)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(H_z,H_x)}{\partial(z,x)}\right]+(t-t_0)^2\frac{\partial(H_x,H_y,H_z)}{\partial(x,y,z)}=0$$

Здесь H_x, H_y, H_z компоненты напряженности магнитного поля в направлениях осей координат. Остальные три уравнения Максвелла имеют классический вид

$$rot\ \boldsymbol{E}=-\mu\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},$$

$$rot\ \boldsymbol{H}=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{J},$$

$$div\ \boldsymbol{E}=0,$$

Здесь $\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H}-$ векторы напряженности электрического и магнитного полей, c – скорость света, ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, ε и μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, $\boldsymbol{J}$ – вектор плотности электрического тока.

Выражение неизвестного коэффициента через дебаевский радиус r_D действия кулоновских сил в плазме

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}-\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}$$

$$=\frac{\partial J_y}{\partial z}-\frac{\partial J_z}{\partial y}-\ 6\pi e r_D A\,(t-t_0)^{\left\{\partial\left[\frac{\partial(H_x,H_y)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(H_y,H_z)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(H_z,H_x)}{\partial(z,x)}\right]\Big/_{\partial x}\right\}}$$

$$-\ [6\pi e r_D A\,(t-t_0)]^{2\,\partial\left[\frac{\partial(H_x,H_y,H_z)}{\partial(x,y,z)}\right]\Big/_{\partial x}}$$

$$r_D=\left(\frac{kT}{4\pi n e^2}\right)^{0.5}=\left(\frac{kT}{4\pi n e e}\right)^{0.5}=r_D=\left(\frac{kT}{4\pi q e}\right)^{0.5}$$

$$\frac{1}{q\tau}\sim\frac{4\pi e r_D^2}{kT}\,\frac{v_T}{r_D}=\frac{6\pi e r_D kT}{kT}=6\pi e r_D$$

Польза истории науки состоит в том, чтобы с позиций столетий или двух тысячелетий окинуть взглядом путь развития дисциплины, усмотреть в нем ветви, упущенные в суете текущих задач, и развить их с позиций современных возможностей и накопленного опыта.