

Чебышевское направление в теории вероятностей

Начало творческой деятельности П.Л. Чебышева совпало с периодом своего рода кризиса в теории вероятностей. Дело в том, что в XVIII веке в теории вероятностей были достигнуты определенные успехи, были найдены такие важные ее закономерности, как *закон больших чисел* и *центральная предельная теорема*. В результате появились возможности широкого применения ее методов не только в естественных науках, но и в социальной практике. Однако применение вероятностных методов не всегда было корректно, а полученные результаты зачастую ошибочны и даже нелепы. Все это привело к тому, что репутация теории вероятностей как науки была заметно дискредитирована, для дальнейшего ее развитие, требовалось основательно проанализировать и уточнить ее понятия и методы.

Не удивительно поэтому, что молодой П. Л. Чебышев заинтересовался теорией вероятностей. Его первая статья озаглавлена «Опыт элементарного анализа теории вероятностей» [1] опубликована в 1845 г., в 1847 г. защищена в качестве магистерской диссертации.

Цель – точно формулировать общие теоремы теории вероятностей и доказывать их, используя, по возможности, неравенства и оценку погрешности предельных формул. В качестве основных проблем в этой работе П. Л. выбрал уточнение формулировки и строгое математическое доказательство закона больших чисел (теорема Пуассона) и центральной предельной теоремы (теорема Муавра- Лапласа).

Указанная теорема устанавливает отклонение числа x появлений случайного события E от математического ожидания a числа x при n испытаниях, $a = np$, соответствующих элементарной схеме Бернулли, в которой E имеет постоянную вероятность p :

$$G\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

где σ - дисперсия числа x , $\sigma^2 = np(1-p)$.

В диссертации П.Л. доказывает закон больших чисел лишь для случая ограниченного числа различных вероятностей. «По-видимому, в поисках новых путей он только во время печатания диссертации нашел общее элементарное доказательство теоремы Пуассона с соответствующей оценкой погрешности» [2]. Это доказательство изложено в следующей его работе «Demonstration elementaire d'une proposition de la theorie des probabilities» [3, 1846].

После защиты магистерской диссертации одним из направлений научной деятельности П. Л. Чебышева было интегрирование алгебраических функций, в связи с чем ему пришлось изучить алгебраические непрерывные дроби, которые затем стал использовать в качестве аппарата теории вероятностей.

С 1860 г. П. Л. преподавал теорию вероятностей в Петербургском университете. Ему удалось в 1866 г. получить общее элементарное доказательство закона больших чисел, благодаря использованию знаменитого неравенства, известного как *неравенство Чебышева*.

Формулировка закона больших чисел, вытекающая из упомянутого неравенства:

“Если математические ожидания величин $x, y, z, \dots, x^2, y^2, z^2$ будут соответственно $a, b, c, \dots, a_1, b_1, c_1, \dots$, то вероятность, что среднее арифметическое

N величин x, y, z, \dots от среднего арифметического математических ожиданий этих величин разнится не более как на

$$\frac{1}{t} \sqrt{\frac{a_1 + b + c_1 + \dots}{N} - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}{N}},$$

при всяком t , будет превосходить $1 - \frac{t^2}{N}$.

Статья «О средних величинах, содержащая эти результаты, в 1866 г. была доложена Академии наук, а в 1867 г. опубликована в «Математическом сборнике», т. II [4], и в том же году в журнале Лиувилля, в т. XII. Там же была опубликована статья Бьеномэ на тему, близкую к теме, содержащейся в работе П.Л., но эта тема заслуживает отдельного рассмотрения. Коротко говоря, закон больших чисел был сформулирован и обоснован, но вторая проблема, которую поставил перед собой П. Л., - о предельном значении сумм большого числа независимых величин, - еще не была окончательно решена. К ней П.Л. Чебышев вернулся спустя почти 20 лет. Он получил общее доказательство центральной предельной теоремы, используя *метод моментов*.

$\int_0^a f(x)dx$ по величине интегралов $\int_0^A f(x)dx, \int_0^A xf(x)dx, \dots$, где $A > a$,

а $f(x)$ - неизвестная функция, положительная между пределами интегрирования.

Вот формулировка центральной предельной теоремы:

«Если математические ожидания величин u_1, u_2, \dots равны нулю, а математические ожидания всех их степеней имеют числовую величину ниже какого-либо конечного предела, вероятность того, что сумма величин $u_1 + u_2 + \dots + u_n$, деленная на квадратный корень из удвоенной суммы математических ожиданий их квадратов, имеет пределом величину интеграла квадратов, заключается между двумя какими-нибудь величинами t и t' , с возрастанием числа n до ∞ имеет пределом величину интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} e^{-x^2} dx.$$

Однако в доказательстве П. Л. имеется некоторый пробел: помимо независимости случайных событий, следовало предположить, что среднее арифметическое дисперсий при $n \rightarrow \infty$ стремится к некоторому положительному пределу. Этот пробел был устранен А.А. Марковым. Но это произошло не так скоро.

Вернулся П. Л. к предельной теореме после публикации А.А. Марковым статьи «Доказательство некоторых неравенств П. Л. Чебышева» [6]

И здесь мы переходим к вкладу в развитие теории вероятностей в трудах учеников П.Л. Чебышева - А.А. Маркову и А.М. Ляпунову.

А.А. Марков (1856 - 1922) в настоящее время более известен теорией цепей, носящих его имя, - область теории вероятностей также относящуюся к достижениям

Петербургской математической школы. Теория цепей является обобщением метода моментов П.Л. Чебышева, а именно, вместо независимых случайных величин рассматриваются специальным образом связанные случайные величины. Но А.А. Маркову принадлежит и развитие теории моментов, в результате чего он устранил упомянутый выше логический пробел в доказательстве центральной предельной теоремы, допущенный П. Л. Чебышевым.

$\int_0^a f(x)dx$ по величине интегралов $\int_0^A f(x)dx$, $\int_0^A xf(x)dx$, ..., где $A > a$, а $f(x)$ - неизвестная функция, положительная между пределами интегрирования.

Методы Чебышева и его учеников в теории вероятностей.

Аппарат непрерывных дробей

Метод моментов

Метод характеристических функций

Литература

1. *Чебышев П. Л.* Опыт элементарного анализа теории вероятностей. Москва, 1845.
2. *Бернштейн С. Н.* О работах П. Л. Чебышева по теории вероятностей. // Научное наследие П. Л. Чебышева. Вып. 1, 1945. С. 43 – 68.
3. *Chebyshev P. L.* Demonstration elementaire d'une proposition de la theorie des probabilities. // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1846.
4. *Чебышев П. Л.* О средних величинах. // Матем. сб. Т. II, 1867.
5. *Chebyshev P. L.* Sur les valeurs limites des integrals. // Journal de Liouville. Т. XIX, 1874. P. 157 – 160.
6. *Марков А. А.* «Доказательство некоторых неравенств П. Л. Чебышева» // Сообщения Харьковского математического общества, 1883.
7. *Чебышев П. Л.* О двух теоремах относительно вероятностей. Приложение к 55 тому Записок Императ. Акад. Наук. № 6, 1877.