Материалы для консультации
15 января 2025 г.

Просьба объяснить **свойство определителя**:

произведение элементов одной строки на алгебраические дополнения к другой строке равно 0.

Второе свойство определителей:

При перестановке двух строк (или столбцов) знак определителя меняется.

Теорема Лапласа: Определитель матрицы $A_{n\times n}$ может быть вычислен путём разложения по любой строке или столбцу.

Разложение по i-й строке:

$$\det A = a_{i1}\cdot A^{i1} + a_{i2}\cdot A^{i2} + \ldots + a_{in}\cdot A^{in}$$

Разложение по j-й строке:

$$\det A = a_{j1} A^{j1} + a_{j2}\cdot A^{j2} + \ldots + a_{jn}\cdot A^{jn}.$$

Рассмотрим произведение элементов i-й строки на алг. дополнения к j-й строке:

$a_{i1} \cdot A^{j1} + \ldots + a_{in} \cdot A^{jn}$ = det матрицы, в которой в j-й строке записаны элементы i-й строки, т. е. i-я строка записана дважды $\Rightarrow$ такой det $= 0$, ч. и т. д.

(это — следствие 1 из второго свойства определителей)

Решение совместной неопределенной системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений, записанную в матричном виде:

$$AX = B,$$ где A – матрица $n \times m$, X и B – столбцы

Совместной неопределенной системе лин. ур-й отвечает случай, когда после применения метода Гаусса расширенная матрица $(A|B)$ имеет нулевые строки:

$$n\left\{\begin{pmatrix} 0 & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right. \begin{array}{l} \}r \\ \\ \\ \\ \end{array}.$$

Здесь n – общее число строк, и r – число ненулевых строк.

Это означает, что для записи ответа нам потребуется $(m - r)$ параметры

Пример: $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Методом Гаусса, опираясь на 2ю строку, получаем $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ (1)

Здесь $m = 4$, $r = 2$

Читаем задачу снизу вверх (обратный ход метода Гаусса):

$\Rightarrow$ потребуется 2 параметра:

$$11x_2 + 5x_3 - x_4 = 10 \Leftrightarrow x_4 = 11x_2 + 5x_3 - 10$$

Пусть $x_2 = a$, $x_3 = b$, тогда $x_4 = 11a + 5b - 10$.

Подставляем в уравнение (1):

$$3x_1 + 5\cdot a + 2\cdot b + 2(11a + 5b - 10) = 4$$

$$3x_1 = -27a - 12b + 24 \Rightarrow x_1 = -9a - 4b + 8.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -9a - 4b + 8 \\ a \\ b \\ 11a + 5b - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$

Текст из курса О.В. Александровой:

5. Системы линейных уравнений. Общий вид системы из m линейных уравнений с n неизвестными следующий:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & \ldots & +a_{1j}x_j + & \ldots & +a_{1n}x_n & = & b_1, \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{i1}x_1 + & \ldots & +a_{ij}x_j + & \ldots & +a_{in}x_n & = & b_i, \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & \ldots & +a_{mj}x_j + & \ldots & +a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Эту же систему можно записать в компактной матричной форме

$$AX = B,$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$, называемая матрицей системы, $X = (x_j)$ — столбец неизвестных размера $n \times 1$, $B = (b_i)$ — столбец свободных членов размера $m \times 1$.

Если $m = n$, т.е. число неизвестных совпадает с числом уравнений, то матрица системы A будет квадратной. Если к тому же она невырождена и, следовательно, обладает обратной матрицей A^{-1}, то единственное решение системы находится по правилу $X = A^{-1}B$ (в матричной форме), что равносильно правилу Крамера (см. пример 14 ниже).

В общем случае $m \neq n$, т.е. число неизвестных не совпадает с числом уравнений.

Метод Гаусса. Универсальным и достаточно эффективным методом решения системы линейных уравнений является метод элементарных преобразований, часто называемый методом Гаусса.

Пусть имеется система из m линейных уравнений с n неизвестными, записываемая в матричной форме $AX = B$. Рассмотрим расширенную матрицу $(A \mid B)$ размера $m \times (n+1)$.

Элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы (умножение строки матрицы на ненулевое число, перестановка местами любых двух строк матрицы, прибавление к одной строке матрицы другой строки, умноженной на некоторое число) приводим её к виду $(C \mid D)$, где C — ступенчатая матрица, а D — новый столбец свободных членов. Отметим, что при элементарных преобразованиях строк множество решений системы не меняется, поэтому новая система $CX = D$ будет равносильна исходной.

Далее проанализируем уравнения новой системы $CX = D$. Если встретится противоречивое уравнение вида $0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = d_i$, где на самом деле $d_i \neq 0$, то исходная система не имеет решений (несовместна). Если же таких уравнений нет, то система будет совместной.

Пусть теперь система совместна, а ступенчатая матрица C имеет r ненулевых строк (это означает, что ранг матриц A и C равен r). Пусть также $c_{1,j_1}, \ldots, c_{r,j_r}$ — первые ненулевые элементы строк матрицы C. Соответствующие неизвестные x_{j_1}, …, x_{j_r} называются *главными* (или *связанными*) в отличие от остальных $n-r$ неизвестных, которые называются *свободными* и могут принимать любые действительные значения независимо друг от друга.

Например, если

$$(C \mid D) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

то главными неизвестными будут x_1, x_2 и x_5, а неизвестные x_3, x_4 и x_6 будут свободными.

Далее надо, двигаясь по ступенчатой системе «снизу вверх», последовательно выразить главные неизвестные x_{j_r}, …, x_{j_1} через $n-r$ свободных неизвестных. Пусть, например, получилась ступенчатая матрица

$$(C \mid D) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

отвечающая системе

$$\begin{cases} x_1 & -4x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & 7, \\ & x_2 & -3x_3 & +5x_4 & = & 2, \\ & & x_3 & -2x_4 & = & 1. \end{cases}$$

Главными неизвестными будут x_1, x_2, x_3, а свободной неизвестной будет x_4.

Из третьего уравнения выражаем x_3 через x_4, перенося $2x_4$ в правую часть:

$$x_3 = 2x_4 + 1.$$

Из второго уравнения находим x_2, используя только что полученное выражение для x_3, аналогичным образом:

$$x_2 = 3x_3 - 5x_4 + 2 = 3(2x_4 + 1) - 5x_4 + 2 = x_4 + 5.$$

Наконец, из первого уравнения находим x_1:

$$x_1 = 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 7 = 4(x_4 + 5) - 2(2x_4 + 1) - 2x_4 + 7 =$$
$$= -2x_4 + 25.$$

Свободная неизвестная x_4 может принимать любое значение $t \in \boldsymbol{R}$. Общее решение системы будет выглядеть так:

$$\begin{cases} x_1 & = & -2t + 25, \\ x_2 & = & t + 5, \\ x_3 & = & 2t + 1, \\ x_4 & = & t; & t \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Подставляя различные значения параметра t, мы будем получать различные частные решения системы.

Таким образом, мы всегда сможем записать ответ. Главные неизвестные будут выражены через свободные, а свободные неизвестные могут принимать любые действительные значения независимо друг от друга.

Замечание. Система линейных уравнений с действительными коэффициентами либо несовместна, либо имеет единственное решение (если свободных неизвестных нет), либо имеет бесконечное число решений (если имеется хотя бы одна свободная неизвестная).

Системы линейных однородных уравнений

Система линейных однородных уравнений имеет вид $AX=0$, где A – матрица $n\times m$
X – вектор-столбец $m\times 1$
0 – нулевой n-вектор.

Т.к. эта система всегда имеет нулевое решение, то она всегда совместна.

В соответствии с правилом Крамера:

1) если $\det A \neq 0$, то $\exists!$ решение системы, которое можно найти по формулам $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\det A}$. В случае, когда столбец свободных членов нулевой, все $\Delta_i = 0 \Rightarrow \exists!$ нулевое решение.

2) если $\det A = 0$, то по правилу Крамера система либо имеет беск. много решений, либо не имеет их вовсе, чего не м.б. у однородной системы.

$\Rightarrow$ если $\det A = 0$ для СЛОУ, то эта система имеет беск. множество решений, кот. можно найти методом Гаусса.

В матричном виде:

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений $AX = 0$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Эта система всегда совместна, т.к. всегда $\exists$ решение $X = 0$.

Число строк m и число неизвестных n могут быть разными.

① Пусть $m \geq n$.

Если rang $A = r < n\ (\leq m)$, это означает, что после применения метода Гаусса матрица A имеет вид A':

$$\left(\begin{array}{ccccccc} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2r} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3r} & \dots & a'_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{array}}\right\} r \text{ ненулевых строк} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ a \end{array}}\right\} \text{остальные } (m-r) \text{ строки — нулевые} \end{array}$$

Этой матрице соответствует система из r уравнений с n неизвестными, где $r<n$:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1r}x_r + \ldots + a'_{1n}x_n = 0 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2r}x_r + \ldots + a'_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3r}x_r + \ldots + a'_{3n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad a'_{rr}x_r + \ldots + a'_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Чтобы получить решение, применяем "обратный ход" метода Гаусса:

из последнего ур-я находим

$$x_r = -\frac{1}{a'_{rr}}\Big(\underbrace{a'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n}_{\text{всего } n-r \text{ слагаемых}}\Big) =$$

$$\overset{\text{об}}{=} k_{r1}\cdot x_{r+1} + \ldots + k_{rn}\cdot x_n \;;$$

подставляя это решение в предпоследнее ур-е, получим

$$x_{r-1} = k_{r-1,1}\, x_{r+1} + \ldots + k_{r-1,n} x_n \quad \text{и т.д.}$$

Таким образом будут получены все x_i для i от r до 1:

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} k_{11} \\ \vdots \\ k_{r1} \end{pmatrix} \cdot x_{r+1} + \begin{pmatrix} k_{12} \\ \vdots \\ k_{r2} \end{pmatrix} \cdot x_{r+2} + \ldots + \begin{pmatrix} k_{1n} \\ \vdots \\ k_{rn} \end{pmatrix} x_n}_{\text{всего } n-r \text{ слагаемых}},$$

② Пусть $m < n$.

Т.к. не может быть: $r \equiv$ ранг матрицы, состоящей из m строк, больше числа её строк, то $r \leqslant m$.

После применения метода Гаусса получится матрица вида A' $\Rightarrow$ рассуждения не меняются.

Отметим, что в случае $r = m$ $\exists$ единственное решение $X = 0$.

Фундаментальная система решений однородной системы.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и ранг матрицы коэф-тов $= r$. Тогда фунд. система состоит из $(n-r)$ векторов ($\equiv$ степени свободы).

Пример 3.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rank $= 2$

$\Rightarrow$ ФСР состоит из трех векторов

2) $8x_2 = 7x_3 - 25x_4 + 4x_5$

$$x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5$$

$\Rightarrow$ пусть $x_3 = 8a$, $x_4 = 8b$, $x_5 = 2c$

$$\Rightarrow x_2 = 7a - 25b + c$$

3) $x_1 = 5x_2 - 2x_3 + 16x_4 - 3x_5 = 35a - \underbrace{5\cdot 25b}_{-125} + 5c - 16a + \underbrace{16\cdot 8b}_{128} - 6c$

$$= 19a + 3b - c$$

Итак,
$$x_1 = 19a + 3b - c$$
$$x_2 = 7a - 25b + c$$
$$x_3 = 8a$$
$$x_4 = 8b$$
$$x_5 = 2c$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 3 \\ -25 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{ФСР}}$$

ФС

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & +1 & +2 & +2 & +6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & +1 & +2 & +2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank} = 2$

$\Rightarrow$ ФСР состоит из трех $(5-2)$ векторов.

2) $x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \Rightarrow$

пусть $x_3 = a$, $x_4 = b$, $x_5 = c$, тогда

$x_2 = -2a - 2b - 6c$.

3) $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 2a + 2b + 6c - a - b - c =$

$= a + b + 5c$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c \equiv$ общее решение системы

Матрица билинейной (квадратичной) формы зависит от выбора базиса: чтобы ее написать в некотором базисе $E = \{\vec{e}_1; \ldots; \vec{e}_n\}$, нужно вычислить значения формы на базисных векторах

Пример: Рассмотрим $A(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$,

а) в базисе каноническом

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

б) в базисе $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Вычисляем A': $a_{11}' = 1 + 2 + 3 = 6$

$a_{12}' = 1 + 2 - 3 = 0$

$a_{13}' = 1 - 2 - 3 = -4 \quad \ldots$

$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Оказывается, между матрицами одной и той же форм, но в разных базисах есть связь:

$$\boxed{A' = C^t \cdot A \cdot C}, \text{ где}$$

C – матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{e_i'\}$.

Доказательство: Пусть в некотором базисе $\{e_i\}$ $X = \sum^n x_i e_i$ и $Y = \sum^n y_i e_i$.

Пусть задана некоторая билинейная форма

$$A(X;Y) = A\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i ; \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) \stackrel{\downarrow}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j A(e_i; e_j) =$$

$$(*) \quad = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j, \text{ где } a_{ij} = A(e_i; e_j).$$

В другом базисе $\{e_i'\}$ $X = \sum_{i=1}^n x_i' e_i'$, $Y = \sum_{i=1}^n y_i' e_i'$

$\Rightarrow$ та же самая билинейна форма имеет вид $A(X,Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}' \cdot x_i' \cdot y_j'$. $(**)$

В матричной форме формулы $(*)$ и $(**)$ можно записать как:

$$(\star) \quad A(X;Y) = (x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1', \dots, x_n') A' \begin{pmatrix} y_1' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

Т.к. $\left.\begin{matrix} (x_1,\dots,x_n) \text{ и } (x'_1,\dots,x'_n) \\ (y_1,\dots,y_n) \text{ и } (y'_1,\dots,y'_n) \end{matrix}\right\}$ — координаты тех же векторов, но в разных базисах, то

между ними $\exists$ связь с помощью матрицы перехода C: $X = C\cdot X'$ и $Y = C\cdot Y'$

$$\Longrightarrow (\star): (x_1,\dots,x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (CX')^t\cdot A\cdot (CY') =$$

$$=(X')^t\cdot C^t\cdot A\cdot C\cdot Y' = (X')^t\cdot \boxed{\underbrace{C^tAC}_{A'}}\cdot Y' \overset{\text{должно быть}}{=}$$

$$=(X')^t\cdot A'\cdot Y',$$ но X, Y — любые $\Rightarrow$ ч.т.д.

Метод собственных векторов для приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Пример. $A(x,x) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

1. Матрица кв. формы в каноническом базисе

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Найдем собственные числа для A:

$$\det(A - \lambda E| = 0 \iff \begin{aligned} \lambda_1 &= 3 \\ \lambda_2 &= 6 \\ \lambda_3 &= 9 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ искомый вид $A(\underline{\underline{x}};\underline{\underline{x}}) = 3u_1^2 + 6u_2^2 + 9u_3^2$

Нужно найти связь между x и u.

(3) Найдем соответствующие собственные вектора:

а) при $\lambda_1 = 3$ имеем

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \cancel{-2}\,1 & \cancel{4}\,2 \\ 0 & \cancel{-2}\,1 & \cancel{-4}\,2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

Обозначим $x_3 = -a \Longrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} a \quad \forall a \neq 0$

Длина $|X_1| = \sqrt{4+4+1} = 3 \Longrightarrow$ нормируем этот вектор и получаем $e_1' = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{-1}{3}\right)$

б) при $\lambda_2 = 6$ имеем

$$(A-\lambda E) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

Пусть $2x_1 = -b_1$, тогда $x_3 = +b_1$, $x_2 = +b_1$

Обозначим $\frac{b_1}{2} = b$

$\Updownarrow$

$b_1 = 2b$

$$\Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} b \quad \forall b \neq 0$$

Длина $|X_2| = 3 \Rightarrow$ нормируем его:

$$e_2' = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

в) при $\lambda_3 = 9$ имеем

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases}$$

Пусть $x_2 = -c$, тогда $x_1 = +2c$; $x_3 = +2c$

$$\Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} c \quad \forall c \neq 0 \text{ и длина } |X_3| = 3$$

$$\Rightarrow e_3' = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right)$$

$\exists$ теорема: Любая симметрическая матрица A может быть представлена в виде

$$\underline{A = U \cdot D \cdot U^t}, \text{ где}$$

$D \equiv diag(\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n)$

$U \equiv$ ортогональная матрица, столбцы которой есть координаты некоторого ортонормированного базиса, в котором A имеет диагональный вид.

$\Rightarrow$ у нас

4 $\quad U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ и связь с X:

$$\boxed{X = U \cdot X'}$$

$\Rightarrow$ искомое ортогональное преобразование:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(2u_1 - u_2 + 2u_3) \\ x_2 = \frac{1}{3}(2u_1 + 2u_2 - u_3) \\ x_3 = \frac{1}{3}(-u_1 + 2u_2 + 2u_3) \end{cases}$$

Здесь x_1, x_2, x_3 – координаты в базисе $\{e_i\}$;

u_1, u_2, u_3 – координаты в базисе $\{e_i'\}$

Если нужно записать u_i через x_i, то достаточно найти U^{-1} т.к. U – ортогональная матрица, то в евклидовом пространстве

$\underline{U^{-1} = U^t} \underset{\text{у нас}}{=} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$u_1 = \frac{1}{3}(2x_1 + 2x_2 - x_3)$$
$$u_2 = \frac{1}{3}(-x_1 + 2x_2 + 2x_3)$$
$$u_3 = \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 + 2x_3)$$

Определение функции, непрерывной в точке x_0,

можно дать тремя способами:

Определение 1. *Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется* **непрерывной** *при $x = x_1$ (или* **непрерывной в точке** *x_1), если:*

1) *функция определена при $x = x_1$* (т. е. $x_1 \in X$);

2) *приращение функции в точке x_1 стремится к нулю, когда приращение аргумента $\Delta x_1 = x - x_1$ стремится к нулю,* т. е.

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} [f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)] = 0, \tag{4}$$

где бесконечно малое приращение Δx_1 пробегает лишь те значения, для которых $f(x_1 + \Delta x_1)$ имеет смысл. При этом мы, как всегда, предполагаем (см. гл. VII, § 3), что x_1 является предельной точкой множества X и, таким образом, в любой окрестности U_{x_1} найдутся точки $x_1 + \Delta x_1 \in X$, отличные от x_1 ($\Delta x_1 \neq 0$), для которых функция $f(x)$ определена.

Определение 2.

Используя понятие предела функции получаем развернутое определение непрерывности функции в точке: *функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_1 *тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_1) > 0$ *такое, что*

$$|f(x) - f(x_1)| = |f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)| < \varepsilon,$$

если $x = x_1 + \Delta x_1$ *и* $0 < |\Delta x_1| < \delta$ (Δx_1 — любое допустимое приращение). Заметим, что неравенство (5), очевидно, выполнено и при $\Delta x_1 = 0$, т. е. здесь δ-окрестность точки x_1 можно трактовать как полную: $|\Delta x_1| < \delta$.

Определение 3.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x) = f(x_0)}$.

Для доказательства теоремы о непрерывности сложной функции (см. ниже) удобнее использовать определение 3.

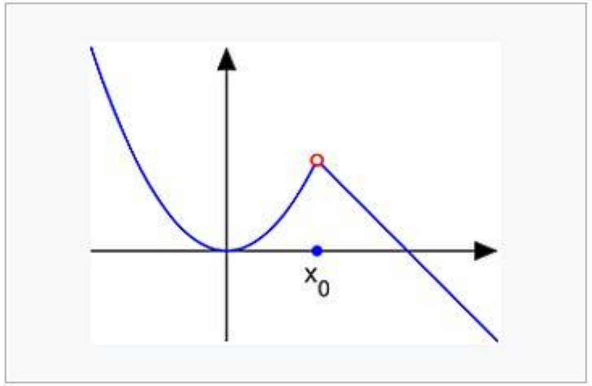
Теорема 4. *Непрерывная функция от непрерывной функции есть функция также непрерывная*; иначе говоря, сложная функция, состоящая из непрерывных функций, непрерывна.

Доказательство. Пусть x_1 — произвольная точка области определения сложной функции $f(\varphi(x))$, причем функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_1, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_1 = \varphi(x_1)$. На основании усиленного свойства перестановочности непрерывной функции и предела (§ 1) имеем

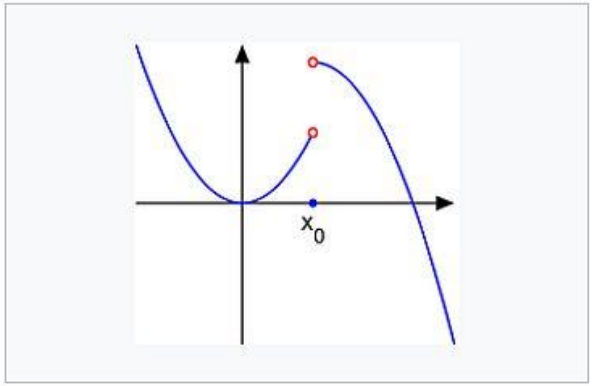
$$\lim_{x \to x_1} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x \to x_1} \varphi(x)\right) = f(\varphi(x_1)),$$

т. е. сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_1.

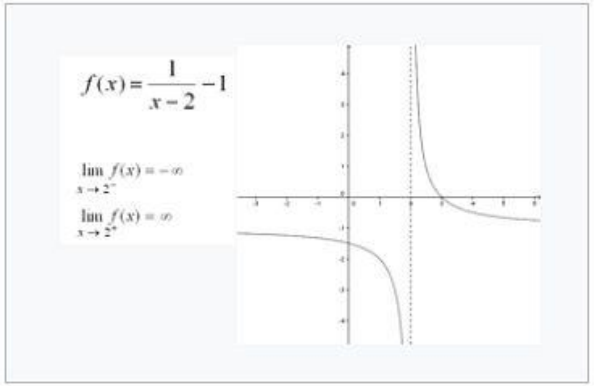
В силу теоремы 4, например, функции $(\sin x)^2 = \sin^2 x$ и $\sin(x^2)$ непрерывны вследствие непрерывности функций x^2 и $\sin x$.



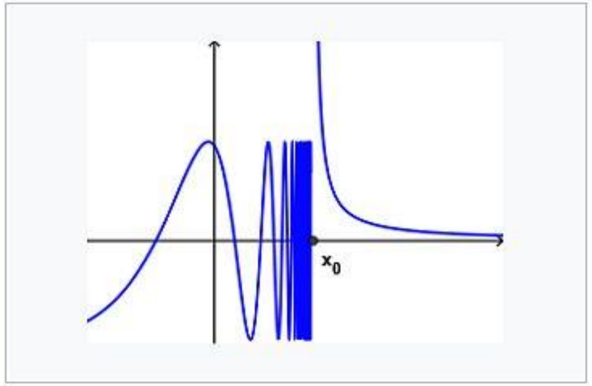
Устранимый разрыв



Разрыв типа «скачок»



Особая точка типа «полюс».



Точка существенного разрыва

Точки разрыва 1 рода

Точки разрыва 2 рода

Устранимая точка разрыва [править | править код]

Если предел функции *существует и конечен*, но функция не определена в этой точке, либо предел не совпадает со значением функции в данной точке:

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a),$$

то точка a называется *точкой устранимого разрыва* функции f (при отсутствии $f(a)$ — устранимая особая точка).

Если «поправить» функцию f в точке устранимого разрыва и положить $f(a) := \lim\limits_{x\to a} f(x)$, то получится функция, непрерывная в данной точке. Такая операция над функцией называется *доопределением функции до непрерывной* или *доопределением функции по непрерывности*, что и обосновывает название точки, как точки *устранимого* разрыва.

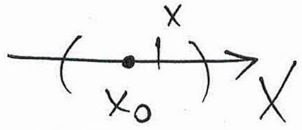
Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Формула Тейлора позволяет любую (дифференцируемую нужное число раз) функцию, записать в виде многочлена по степеням x, НО эта запись будет НЕ точной $\Rightarrow$ возникает

остаточный член

погрешность, которую математики изучали и в разных случаях по-разному записывали.

<u>Идея</u>: есть "плохая" функция $f(x)$ и мы в окрестности некоторой точки x_0 хотим представить её многочленом (аппроксимировать) от x. Тогда мы выстраиваем ряд, опираясь на близкое к x значение x_0



$\Delta x = x - x_0$

Δx – мало

$$f(x) = f(x_0) + k_1 \cdot (x - x_0) + k_2 (x - x_0)^2 + \ldots,$$

где k_i – некоторые коэффициенты, которые можно найти.

1. Рассмотрим сначала просто многочлен

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n \quad (*)$$

— пусть это искомое разложение и нужно найти коэффициенты A_i

1) положим в $(*)$ $x = x_0 \Rightarrow$

$$P_n(x_0) = A_0 + A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 0 + \ldots + A_n \cdot 0$$

$$\Rightarrow A_0 = P_n(x_0)$$

2) чтобы найти A_1, вычислим производную $(*)$:

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + \ldots + nA_n(x - x_0)^{n-1}$$

При $x = x_0$ имеем $A_1 = P_n'(x_0)$.

3) с помощью второй производной

$$P_n''(x) = 2A_2 + 3 \cdot 2 A_3(x - x_0) + \ldots + n \cdot (n-1) A_n (x - x_0)^{n-2}$$

при $x = x_0$ получаем $A_2 = \frac{1}{2} \cdot P_n''(x_0)$ и т.д.

Можно записать, что $A_k = \frac{1}{k!} \cdot P_n^{(k)}(x_0)$.
Доказывается эта формула методом математической индукции.

(2) Перейдем к функции $f(x)$, которую мы изучаем на каком-то $(a;b)$ и выберем $x_0 \in (a;b)$. Поскольку при вычислении коэффициентов разложения использовалось дифференцирование, то требуем, чтобы существовала нужная производная (т.е. производная n-го порядка)

Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+ \underbrace{R_n(x)}_{\text{остаток в нужной}}$$

(3) Покажем, что остаточный член $R_n(x)$ будет бесконечно малой более высокого порядка, чем n, т.е.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (\text{или } \Delta x \to 0)}} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \ ?$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\left(\overset{\equiv const}{f(x_0)}+\overset{\equiv const}{f'(x_0)}(x-x_0)+\frac{1}{2}\overset{\equiv const}{f''(x_0)}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{\overset{\equiv const}{f^{(n)}(x_0)}}{n!}(x-x_0)^n\right)}{(x-x_0)^n}$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{п.Л.}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\left(f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{\cancel{n}\,f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{\cancel{n}\cdot(n-1)!}\right)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

$$\overset{\substack{\text{правило}\\ \text{Лопиталя}}}{=}\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}=\left[\frac{0}{\text{число}}\right]=0$$

$$\Rightarrow R_n(x)=o(x-x_0)^n \text{ при } x\to x_0.$$

Итак, формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n$$

при $x \to x_0$, где $x_0 \in (a, b)$, на которой ф-ция $y = f(x)$ дифференцируема n раз.

Примеры разложения функций в ряд Тейлора:

1. $y = e^x$ при $x_0 = 0$

$$e^x = e^0 + e^0 \cdot x + \frac{e^0}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{e^0}{n!} \cdot x^n + o(x^n)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

2. $y = e^x$ при $x \to 1$

$$e^x = \underbrace{e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2}_{P_n(x) = e\left(1 + (x-1)\left(\underbrace{1 + \frac{1}{2}(x-1)}_{\frac{1}{2}(x+1)}\right)\right)} + \underset{x \to 1}{o}(x-1)^2$$

$$= e\left(1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)\right)$$

(3) $y = \ln(x+1)$ при $x \to 0$

$$\ln(x+1)\Big|_{x=0} = \ln 1 = 0$$

$$y' = \frac{1}{x+1} \Rightarrow y'(0) = 1$$

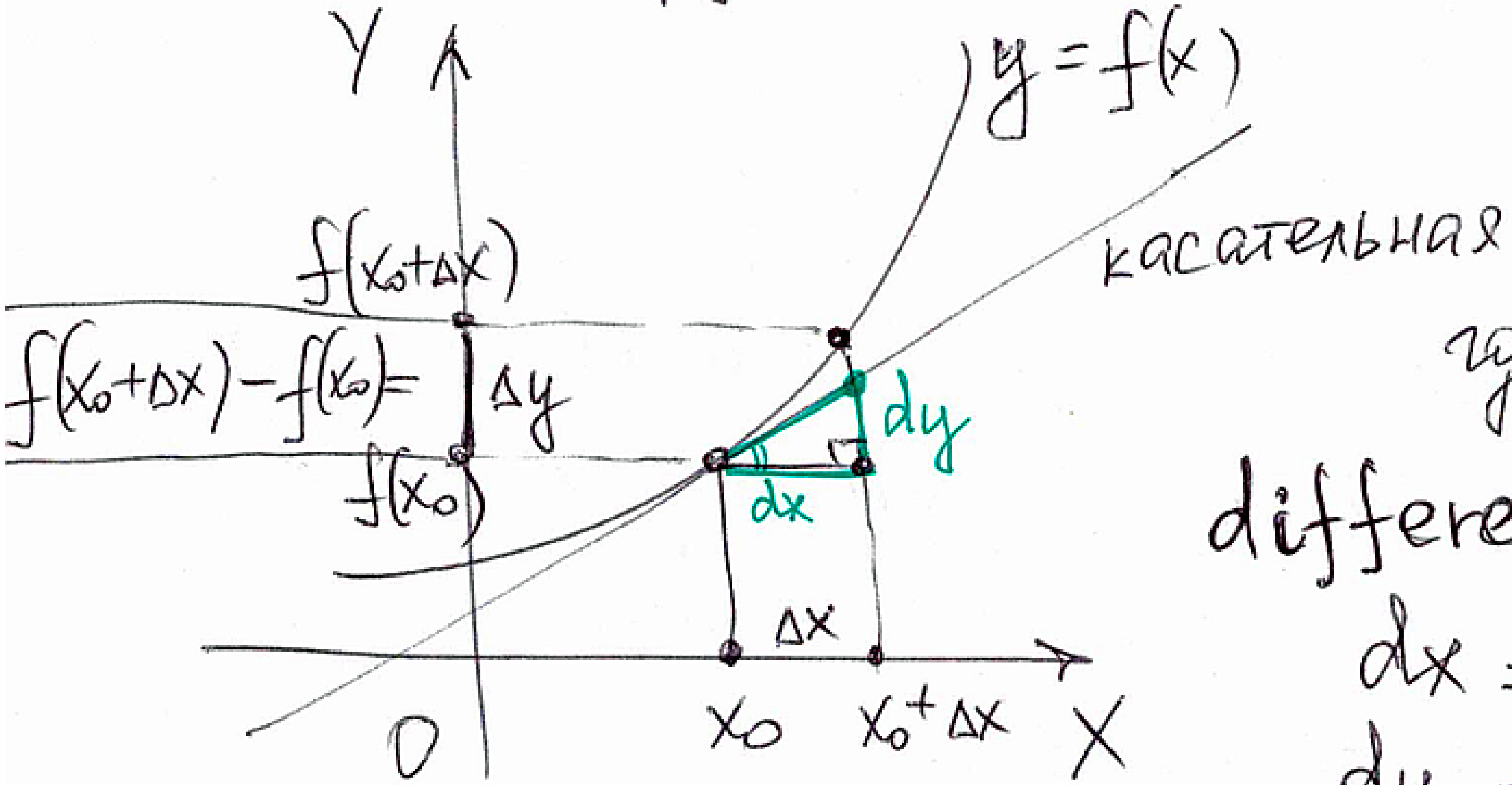
$$y'' = \left((x+1)^{-1}\right)' = \frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow y''(0) = -1$$

$$y''' = \left(-(x+1)^{-2}\right)' = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow y'''(0) = 2$$

$$y^{IV} = \left(\frac{2}{(x+1)^3}\right)' = \frac{-2\cdot 3}{(x+1)^4} \Rightarrow y^{IV}(0) = \frac{-2\cdot 3}{1} \quad \ldots$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Геометрический смысл дифференциала функции в точке x_0:



$y = kx + b$,

где $k = f'(x_0)$

differentio $\equiv$ разность

$$dx = \Delta x$$

$dy \neq \Delta y$, а

$\boxed{\Delta y = dy + o(\Delta x)}$, но

Определение Дифференциалом $f(x)$ в т. x_0 наз-ся главная линейная часть приращения ф-ции при произвольном изменении независимой переменной Δx:

$$\Delta y = dy + \alpha(x)\cdot\Delta x, \text{ где } \alpha(x)\to 0, \text{ если } \Delta x \to 0.$$

Можно доказать, что $dy = y'\cdot dx$.

Тогда, пренебрегая вторым слагаемым как величиной большего порядка малости, из определения получаем:

$$f(x) - f(x_0) = \Delta y \approx dy = y'\cdot dx$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot dx$$

§ 5. Приближенное вычисление малых приращений функции

Если Δx мало по абсолютной величине, то для дифференцируемой функции $f(x)$ ее приращение

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$$

отличается от дифференциала

$$df(x) = f'(x)\Delta x$$

на величину, бесконечно малую относительно Δx. Отсюда имеем приближенное равенство

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x, \tag{1}$$

или

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{1'}$$

Эти равенства весьма полезны при приближенных расчетах. Заметим, что формула (1′) представляет собой линейный член формулы Тейлора

Пример 1. Найти $\sqrt[3]{1,1}$. Полагая в формуле (1′) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x = 1$, $\Delta x = 0,1$, будем иметь $\sqrt[3]{1,1} = \sqrt[3]{1} + 0,1\dfrac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} = 1 + 0,1\cdot\dfrac{1}{3} = 1,033.$

По таблицам же находим $\sqrt[3]{1,1} = 1,032.$

• Замена переменной в НЕОПРЕДЕЛЁННОМ ИНТЕГРАЛЕ:

Пусть $y = f(x)$, $\exists F(x)$ - первообр., т.е. $\exists F'(x) = f(x)$ и $f(x)$ – непрерывная, если мы говорим о неопределенном интеграле.

$f: X \to Y$

Пусть 1) $x = \varphi(t)$, 2) $\varphi(t) \in D(\alpha; \beta)$, 3) $\varphi(t): (\alpha; \beta) \longrightarrow (a, b)$, тогда $x \in (a; b)$

$\varphi: T \to X$

$\Downarrow$ φ – непрерывна на (α, β)

Тогда имеем сложную (непрерывную) ф-ю $y = f(\varphi(t))$

Покажем, что для ф-и $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ $\exists$ первообразная: 1) вычислим по теореме о производной сложной ф-ции

$$F'(x) = F'_t(\varphi(t)) = F'_x(\varphi(t))\varphi'(t) = f(x) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \Rightarrow$$

2) $\int f(\underbrace{\varphi(t)}_{x}) \cdot \varphi'(t)\,dt =$ т.к. $d(\varphi(t)) = dx$

$= F(x) + C$

таким образом $\int f(x)dx = F(x) + C = \int \left(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \right) dt$

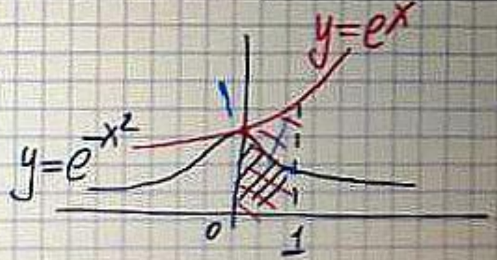
Тогда:

$$\boxed{\int f(x)dx \xrightarrow[dx = \varphi'(t)dt]{x = \varphi(t)} \int f(\varphi(t)) \cdot \overbrace{\varphi'(t)dt}^{d\varphi(t) = dx}}$$

Интеграл Пуассона: $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

Исслед-ть на сходимость

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{1} e^{-x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$



$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,d\frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2\pi},$$ т.к.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$$

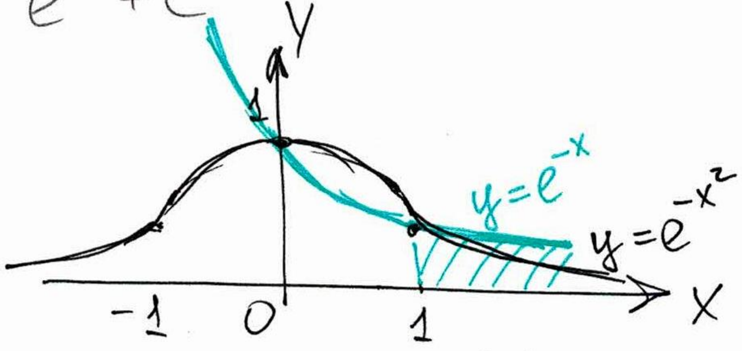
Интеграл Эйлера – Пуассона.

$y = e^{-x^2}$ – четная $\Rightarrow$ достаточно исследовать $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

I. Исследуем его на **сходимость** при $x \geq 1$

Выберем для сравнения ф-цию $g(x) = e^{-x}$.

$$\int g(x)\,dx = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$$



1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = e^{-x^2} > 0$

$\qquad g(x) = e^{-x} > 0$

2) покажем, что при $x \xrightarrow[]{x \geq 1} +\infty$ $\quad \boxed{f(x) \leq g(x).}$

действительно, т.к. при $x \to +\infty$, $x \geq 1$

$$x^2 \geq x, \text{ то } -x^2 \leq -x$$

$$e > 1 \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x} \text{ ч.и т.д.}$$

3) $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\,dx = \left(-e^{-x}\right)\Big|_1^{+\infty} = -\left(\underbrace{e^{-\infty}}_{0} - e^{-1}\right) = \dfrac{1}{e}$, т.е.

бо́льший интеграл сходится $\Rightarrow$

ме́ньший сходится тоже, т.к.

$$\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}dx \le \int\limits_1^{+\infty} e^{-x}dx.$$

Ч. и т. д.

II. При $x \in [0;1]$ выберем для сравнения $y = e^{x}$

Здесь $-x^2 < x$

$$\int\limits_0^1 e^{x}dx = e-1$$

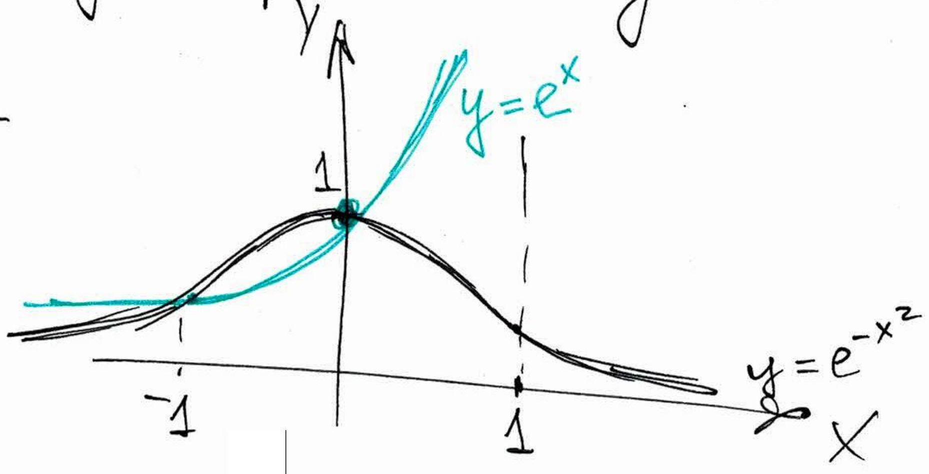
$\Downarrow$

сходится

$\Downarrow$

$e>1 \Rightarrow e^{-x^2} < e^{+x}$

$f(x) < g(x)$



Примеры: 1. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

Найдем функцию, эквивалентную подинтегральной функции, с помощью ряда Маклорена для натурального логарифма:

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Этот ряд имеет место при $x \to 0$, а подинтегральная функция имеет разрыв в точке $x = 1$, поэтому имеем право сделать замену аргумента логарифма в формуле Маклорена (x+1) на аргумент x, как в подинтегральной функции. Получаем при $x \to 1$ $\ln x = (x-1) + o(x-1)$ и, следовательно, $\ln x \sim (x-1)^1$,

Таким образом, подинтегральная функция $\frac{1}{\ln x}$ эквивалентна функции $\frac{1}{(x-1)^\alpha}$ при $\alpha = 1$ и, следовательно, заданный интеграл 2го рода расходится.