# Материалы для консультации
## 15 января 2024 г.

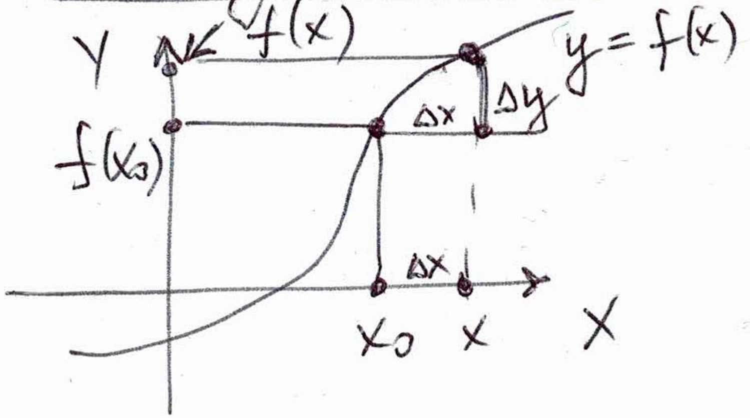
# Достаточное условие ∃-ния локального экстремума.

Пусть ф-ция $y=f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема внутри него.

Пусть при $x \to x_0+0$ $f'(x) \geq 0$, а
при $x \to x_0-0$ $f'(x) \leq 0$.

Тогда $x_0 \equiv$ локальный минимум.

Доказательство:




$$f'(x) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(\overbrace{x_0+\Delta x}^{x}) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

1) Справа от $x_0$ имеем: $x - x_0 > 0$ и $f'(x) \geq 0$
(по условию)

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

2) слева от $x_0$ имеем: $x - x_0 < 0$ и $f'(x) \leq 0$
(по условию)

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$ где знаменатель $< 0$

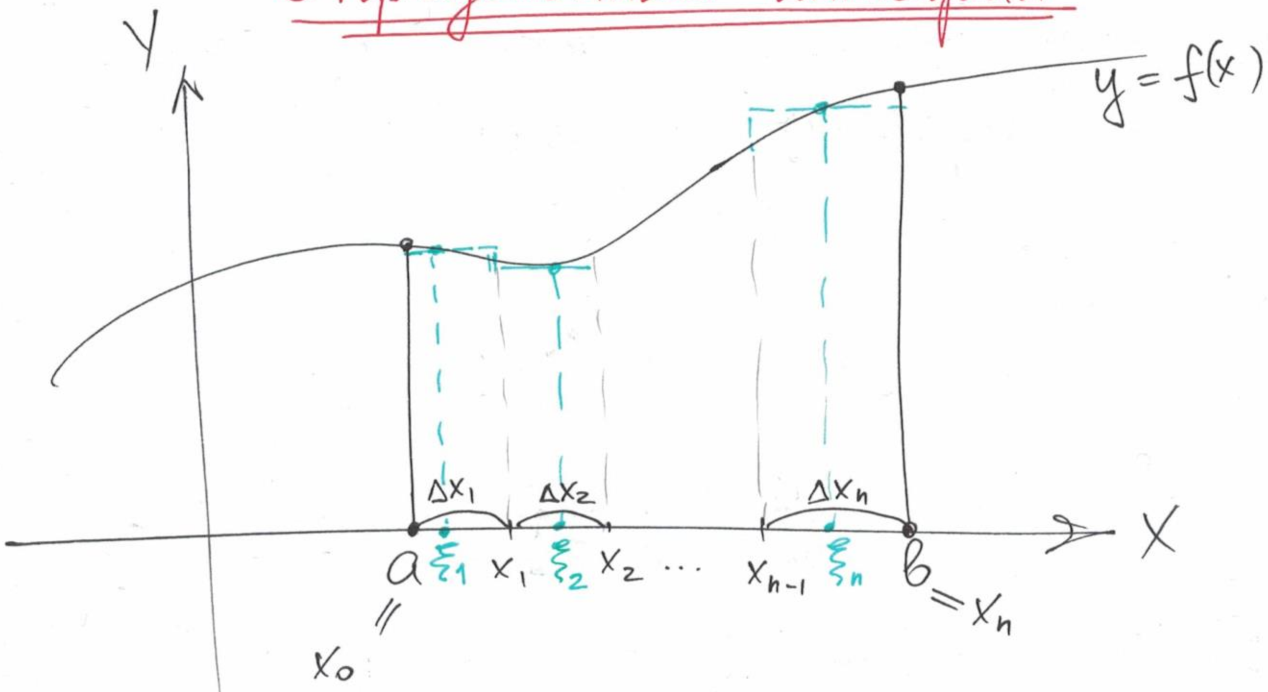
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

$\overset{1)+2)}{\Longrightarrow}$ при $x \to x_0$ всегда $f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow$

т. $x_0$ – т. локального минимума.

Ч. и т.д.

# Определенный интеграл




Пусть $y = f(x) \geqslant 0$ на $[a; b]$.
Устроим некоторое разбиение $[a; b]$ точками $\{x_0; x_1; \ldots; x_n\}$. На каждом $\Delta x_i$ выберем промежуточные точки $\xi_i$ и рассмотрим сумму всех прямоугольников $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

Пусть максимальные $\Delta x_i \to 0$, рассмотрим

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum f(\xi_i) \cdot \Delta x_i .$$

Если этот предел $\exists$ и конечен, то $f(x)$ называется интегрируемой на $[a;b]$ по Риману, а этот предел называется определенным интегралом:

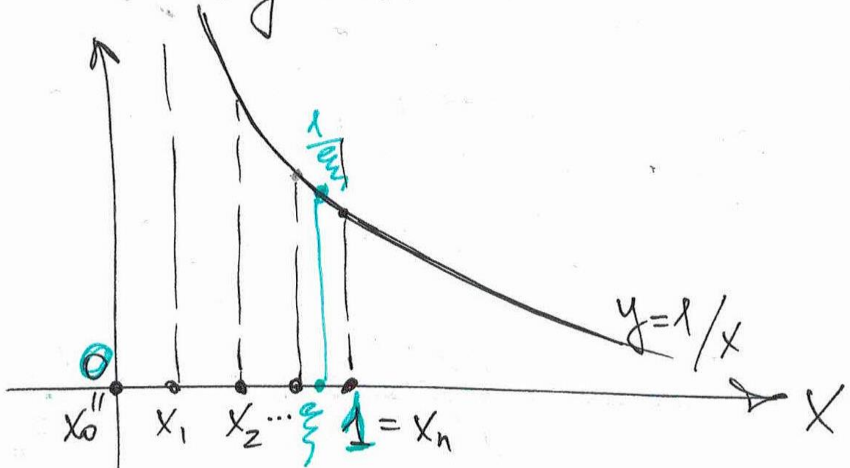
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{\substack{\xi_i \in \Delta x_i \\ i=1}}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

интегральные суммы

Пример, когда не $\exists$ конечного предела интегральных сумм:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$

$$\parallel$$




$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum f(\xi_i)\cdot \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum \left(\frac{1}{\xi_i}\right)^2 \cdot \Delta x_i =$$

В случае равномерного разбиения $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum \left(\frac{1}{\xi_i^2}\cdot \Delta x\right) =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \sum \frac{1}{\xi_i^2} \to +\infty,$$ т. к. все $\xi_i \in (0;1) \Rightarrow$

$$\Downarrow$$

$$i \to \infty$$

$\frac{1}{\xi_i^2} > 1 \ \forall i$ и при $i \to \infty$

$$\sum \frac{1}{\xi_i^2} \to \infty$$

# Необходимое условие интегрируемости

Если $\exists$ определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx =$

$= \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_i f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ , то $f(x)$ ограничена на $[a;b]$.

Интегральные суммы можно рассматривать как последовательности, для которых $\exists$ теорема:

Любая сходящаяся последовательность является ограниченной.

# Несобственные интегралы I рода

появляются, когда вместо отрезка интегрирования возникает бесконечный интервал:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = \lim_{a\to-\infty} \left(F(b) - F(a)\right) =$$

$$= F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

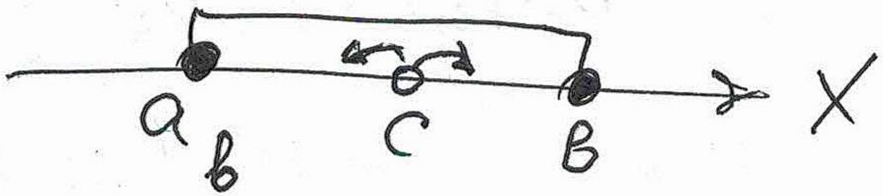
# Несобственные интегралы II-го рода

появляются, когда нарушается непрерывность на отрезке интегрирования $[a;b]$:

1) в точке $b$: $\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$


2) в точке $a$: $\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$

3) в точке $c \in (a; b)$:




$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\delta \to +0} \left( \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx \right) =$$

$$= \lim_{\delta \to +0} \left( F(c-\delta) - F(a) + F(b) - F(c+\delta) \right) =$$

$$= F(b) - F(a) + \lim_{\delta \to +0} \left( F(c-\delta) - F(c+\delta) \right)$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left( \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2} \right) =$$

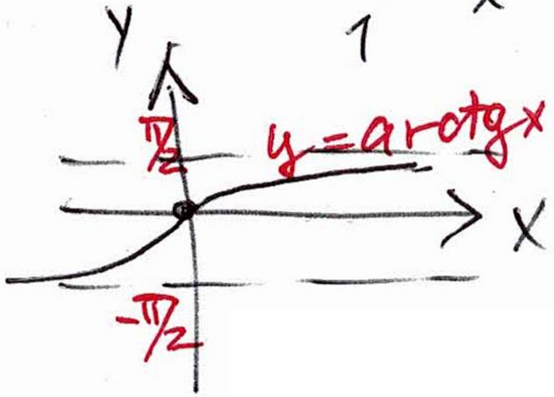
$$= \underbrace{-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}} + \lim_{\varepsilon \to +0} \left( -\frac{1}{-\varepsilon} - \left( -\frac{1}{\varepsilon} \right) \right) =$$

$$= -2 + \underbrace{\left( \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{2}{\varepsilon} \right)}_{\to +\infty} = +\infty$$

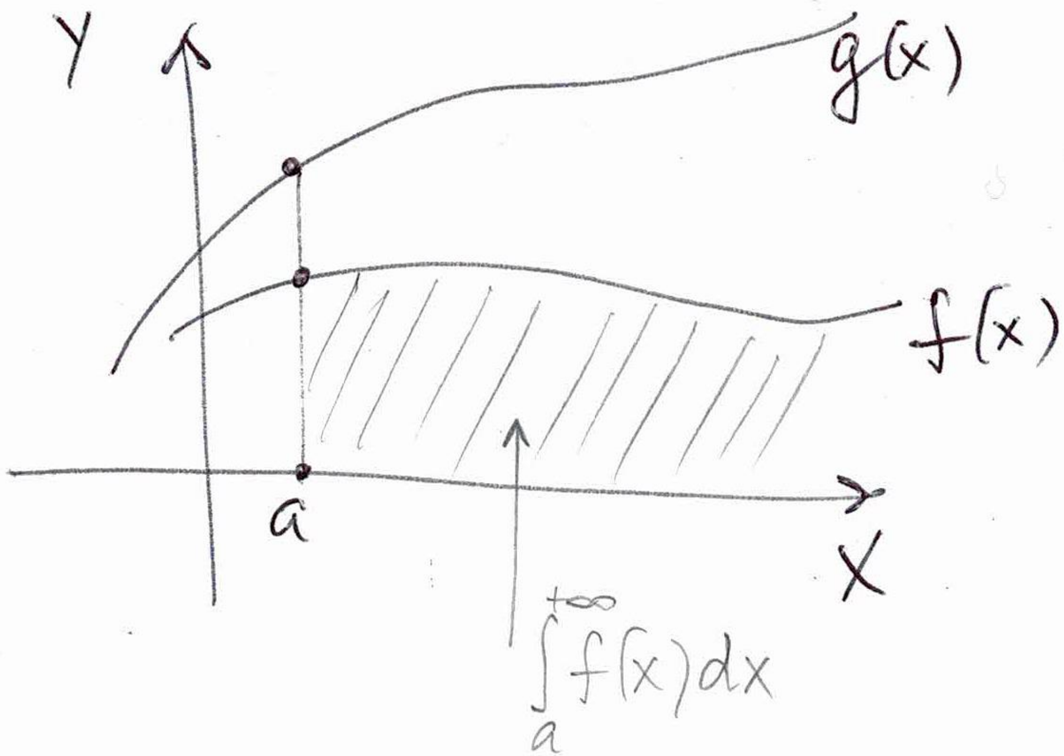
# Признаки сходимости несобств. интегралов I рода:

I. "В лоб": если $\exists$ конечный $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$, то интеграл сходится.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \left(\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x\right) - \underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\pi/4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{сх.}$$



II. Признак „Сравнения": пусть $0 \le f(x) \le g(x)$, тогда




1) если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится,

то и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ тоже сходится

2) если меньший ∫-л $\left(\int_a^{+\infty} f(x)dx\right)$ расходится, то

и больший интеграл $\left(\int_a^{+\infty} g(x)dx\right)$ тоже расх.

## III. Замена функции на эквивалентную:

Пусть $f(x)>0$, $g(x)>0$ и $f(x)\sim g(x)$ при $x\to+\infty$
$\left(\exists \text{ кон. } \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\neq 0\right)$

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся и расходятся одновременно.

## IV. "Абсолютная сходимость":

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx - \text{сх.} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx - \text{сх.}$$

(абсолютно)

Обычно используются ф-ции вида $\frac{1}{x^\alpha}$, т.к. легко вычислить (первые два табл. ∫-ла)

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \stackrel{\text{об}}{=} \mathcal{Y}$$

ⓐ $\alpha \neq 1$

$$\mathcal{Y} = \int_a^{+\infty} x^{-\alpha}\, dx \Big| = \underbrace{\left(\lim_{b\to+\infty} \frac{b^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right)}_{\frac{1}{1-\alpha}\cdot\left(\lim_{b\to+\infty} b^{-\alpha+1}\right)} - \underbrace{\frac{1}{a^\alpha}}_{\equiv \text{const}}$$

1) при $1-\alpha>0$ расх.

2) при $1-\alpha<0$ сх.

ⓑ $\alpha = 1 \Rightarrow$ имеем

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \underbrace{\left(\lim_{b\to+\infty} \ln b\right)}_{+\infty} - \underbrace{\ln a}_{\equiv\text{const}}$$

$+\infty \Rightarrow$ расх.

ⓐ+ⓑ $\Rightarrow$ при $\alpha > 1$ $\mathcal{Y}$ сходится;

при $\alpha \le 1$ $\mathcal{Y}$ расходится.

Пример: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx \underset{x\to+\infty}{\sim} \int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{x^{3/2}}\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ интеграл расходится.

Для $\int$-лов II-го рода обычно используют:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad ; \quad \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

$\alpha < 1 \Rightarrow$ сх.

$\alpha \geqslant 1 \Rightarrow$ расх.

**Примеры:** 1. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

Найдем функцию, эквивалентную подинтегральной функции, с помощью ряда Маклорена для натурального логарифма:

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Этот ряд имеет место при $x \to 0$, а подинтегральная функция имеет разрыв в точке $x = 1$, поэтому имеем право сделать замену аргумента логарифма в формуле Маклорена ($x$+1) на аргумент $x$, как в подинтегральной функции. Получаем при $x \to 1$ $\ln x = (x-1) + o(x-1)$ и, следовательно, $\ln x \sim (x-1)^1$ ,

Таким образом, подинтегральная функция $\frac{1}{\ln x}$ эквивалентна функции $\frac{1}{(x-1)^{\alpha}}$ при $\alpha = 1$ и, следовательно, заданный интеграл 2го рода расходится.

2) $\int\limits_0^1 \frac{2x^2+\sqrt{x}}{tg x - x}\,dx$

$x \to +0 \Rightarrow 2x^2+\sqrt{x} \sim x^{\frac{1}{2}}$

Ф-ла Маклорена: $\underset{x\to 0}{} \; tg x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \Rightarrow$

$tg x - x = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{1}{3}x^3 \Rightarrow$

$\frac{2x^2+\sqrt{x}}{tg x - x} \sim -\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{3}x^3} = -3\frac{1}{x^{5/2}} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{2} \Rightarrow$ расх.