

ДРЕВНИЙ ВАВИЛОН



Шумеры – древний народ, некогда населявший территорию долины рек Тигра и Евфрата на юге современного государства Ирак (Южная Месопотамия или Южное Двуречье). На юге граница их обитания доходила до берегов Персидского залива, на севере – до широты современного Багдада.

На протяжении целого тысячелетия шумеры были главными действующими лицами на древнем Ближнем Востоке. **Шумерская астрономия и математика были точнейшими на всем Ближнем Востоке.** Мы до сих пор делим год на четыре сезона, двенадцать месяцев и двенадцать знаков зодиака, измеряем углы, минуты и секунды так, как это впервые стали делать шумеры. Идя на прием к врачу, мы все получаем рецепты лекарств или совет психотерапевта, совершенно не задумываясь о том, что и траволечение, и психотерапия впервые развились и достигли высокого уровня именно у шумеров. Получая повестку в суд и рассчитывая на справедливость судей, мы также ничего не знаем об основателях судопроизводства – шумерах, первые законодательные акты которых способствовали развитию правовых отношений во всех частях Древнего мира. Наконец, задумываясь о превратностях судьбы, сетуя на то, что при рождении нас обделили, мы повторяем те же самые слова, которые впервые занесли на глину философствующие шумерские писцы, – но вряд ли даже догадывается об этом.

Шумеры – "черноголовые". Этот народ, появившийся на юге Месопотамии в середине III тысячелетия до нашей эры неизвестно откуда, сейчас называют "прародителем современной цивилизации", а ведь **до середины 19-го века никто о нем даже не подозревал...**

Уже в середине IV тысячелетия до н.э. в **Шумере была письменность**. Ее памятники по возрасту старше всех других, дошедших до наших дней.

Основным материалом для письма служили каменные, а затем глиняные плитки, на которых острым предметом выцарапывались надписи.

Клинописные глиняные таблички, упомянутые выше, в огромных количествах стали поступать в Европу в результате археологических изысканий в середине прошлого века. Так, в **1849–50** гг. в развалинах древней ассирийской столицы Нина и Семирамиды – города Ниневии археолог Лейярд нашел дворцовую библиотеку, а в **1853** г. Хорзмунд Рассам открыл библиотеку ассирийского царя Ашшурбанипала, правившего в VII в. до н.э.

20 000 табличек из этих раскопок хранятся сейчас в Британском музее в Лондоне. **Всего** же глиняных табличек в мире насчитывается около **500 000**.





Расшифровка шла медленно.

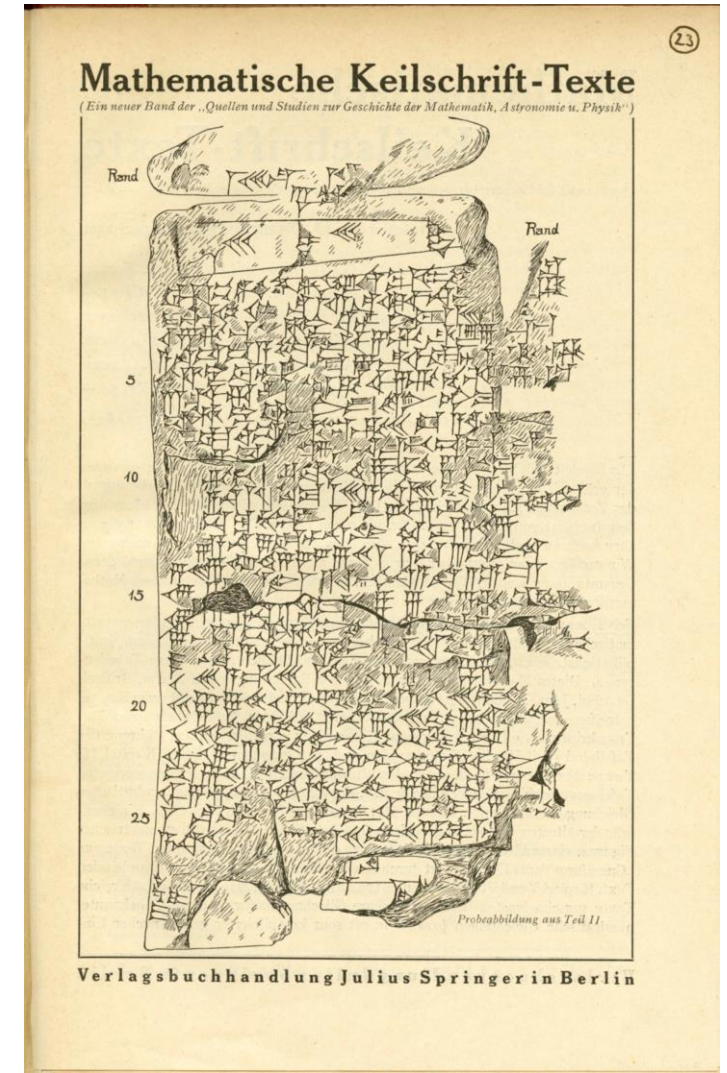
1929–30 гг.

Отто **Нейгебауэр**, ученик
Гильберта и Куранта

с 1935 г. – публикация «Mathematische
Keilschrift-Texte»
(3 тома, 1935–37).

Систематическая публикация текстов
– Ф. Тюр-Данжен.

Занимались: А. Сакс, Э.М. Бройнс,
М.Я. Выгодский, И.Н. Веселовский,
А.А. Вайман и др.





OTTO EDUARD NEUGEBAUER (1899—1990)

Родился в семье железнодорожного инженера. Еще юношей был мобилизован в австрийскую армию и участвовал в Первой мировой войне. После капитуляции Австро-Венгрии был в лагере военнопленных, освобождён и смог заняться образованием: два года (1919—1921) изучал физику и электротехнику в Граце, год — в Мюнхене. С 1922 — в Геттингене, где слушал лекции Р. Куранта, Э. Ландау и Э. Нетер. В 1924—1925 занимался историей математики древнего Египта в Копенгагене.

1926 — диссертация «Основы египетских вычислений с дробями».

В 1928—1933 — преподавал в Гёттингене историю математики.

После прихода нацистов к власти отказался присягнуть новому режиму и вернулся в Копенгаген. В 1939 эмигрировал в США и стал профессором Брауновского университета в Род-Айленде, где в 1947 возглавил созданную им кафедру истории математики.

В Брауновском университете Нейгебауэр работал до 1984; последние 6 лет — в Принстоне (Институт перспективных исследований), членом которого состоял с 1950.

OTTO E. NEUGEBAUER

1899—1990

A Biographical Memoir by
N.M. SWERDLOW

National Academies Press, Вашингтон 1998:

«... В 1929 году он вместе с О. Теплицем (O. Toeplitz) и Дж. Стензелем (J. Stenzel) основал **Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik** (QS), состоящий из двух частей: Abteilung A – для публикации источников, и B – для историко-научных исследований. В первом же номере он

опубликовал свои исследования по египетским вычислительным методам в арифметике и геометрии (QS B 1, 1930-31).

В предыдущем году (1928) он **ездил в Ленинград для оказания помощи В.В. Струве в подготовке к публикации Московского папируса**, важнейшего текст для египетской геометрии, появившегося в QS A 1 (1930).

Однако еще с 1927 он исследовал более важный и интересный ему предмет, а именно вавилонскую математику, для чего выучил аккадский язык и работал в Риме...

...30 января 1933 Гитлер стал канцлером, 7 апреля был издан Закон о восстановлении государственной службы, санкционирующий увольнение государственных служащих неарийского происхождения или неуверенной лояльности.

26 апреля шесть профессоров Геттингена, в том числе Куранта и Нётер, отправили в отпуск, и Курант назначил Нойгебауэра исполняющим обязанности директора, но студенты, агитировавшие за прекращение лекций Ландау и Пола Бернайса, стали нападать и на Нойгебауэра как на «политически ненадежного», хотя его политические взгляды были всегда очень либеральны. Его попросили подписать клятву верности новому правительству и, когда он отказался, то незамедлительно был определен как «неактивный» и ему было отказано в доступе к зданию Института.

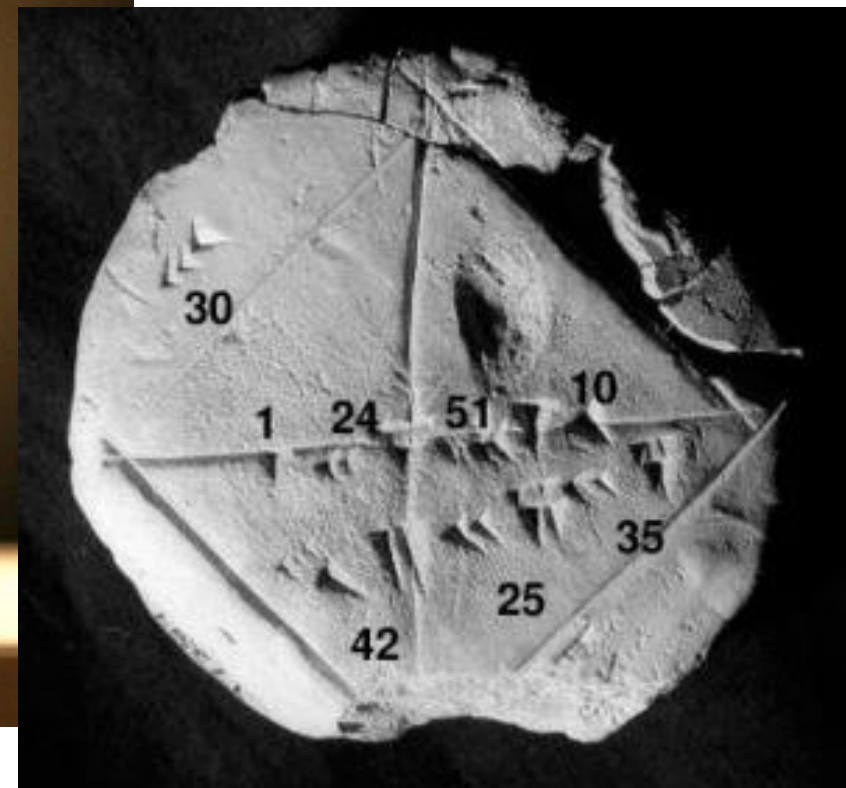
Нацистский чиновник попросил также объяснить, **почему он был в Ленинграде в 1928, т.к. можно было подумать, что втайне он был большевиком.** В ответ Нейгебауэр указал, что в 1930 он был в Ватикане, поэтому возможно, можно заподозрить, что он также тайный иезуит. После нескольких месяцев неуверенности в своем будущем он получил приглашение от Харальда Бора быть три года профессором Копенгагена, куда Нейгебауэр и уехал в январе 1934 ...

Система счисления – позиционная, шестидесятеричная, которая сочеталась с более ранней десятичной.



Такая система счисления позволяла вавилонянам записывать не только целые числа, но и дроби!

Но шестидесятеричные конечные дроби поле не образуют (например, $1/7$ не представима) $\Rightarrow$ **много приближений** – одна из характерных особенностей вавилонской математики.



Математические таблицы

Использование большого количества всевозможных таблиц – еще одна особенность вавилонской математики.

1. **Тексты-таблицы:**
- таблицы умножения;
 - таблицы квадратов;
 - таблицы обратных чисел;
 - таблицы кубов;
 - таблицы квадратных корней;
 - таблицы сумм кубов и квадратов
- $$n^3 + n^2 \dots$$

2. **Тексты-задачники.**

Арифметика древних вавилонян

1. Задачи на арифметические и геометрические прогрессии.

Знали сумму первых членов арифметической прогрессии, знания более развиты, чем у египтян.

2. Много задач на проценты.

3. Формула приближенного вычисления квадратного корня из числа
$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + r/(2a) = x_1 .$$

Использование приближений, которые позже можно встретить у Герона Александрийского (I в. н.э.):

$$x_2 \approx 1/2 (x_1 + N/x_1)$$

Алгебра

1. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ, к ним сводящиеся:

Большое количество однотипных задач, которые **МЫ** можем назвать каноническими и записать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \pm y = a \\ xy = b \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} x \pm y = a \\ x^2 + y^2 = b^2 \end{array} \right. , \quad ax^2 \pm bx = c .$$

Как правило, x – длина, y – ширина (всегда длина больше ширины), xy – площадь, иногда встречается глубина. Но несмотря на геометрические названия принципа однородности древних греков нет.

Зато существуют и более абстрактные названия неизвестных величин: «множимое» и «обратное к нему».

«Квадрат и сторона 0; 45»

$$x^2 + px = q$$

1. Возьми 1.

 p

2. Пополам 0;30.

 $p/2$

3. $0;30 \times 0;30 = 0;15$.

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4}$$

4. $0;15 + 0;45 = 1$.

$$(p/2)^2 + q$$

5. Что на что надо
умножить, чтобы
получить 1: 1.

$$\sqrt{(p/2)^2 + q}$$

6. $1 - 0;30 = 0;30$ –
искомая сторона.

$$\sqrt{(p/2)^2 + q} - \frac{p}{2} = x$$

«Множимое и обратное 2;30»

1. На 0;30 умножь: 1;15
2. 1;15 на 1;15 умножь:
1;33,45
3. 1 вычти отсюда
4. Что на что надо умножить,
чтобы 0;33,45 получить:
0;45
5. 0;45 к 1:15 прибавь: 2 –
множимое
6. 0;45 от 1;15 вычти: 0;30 –
обратное

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

$$a/2$$

$$(a/2)^2$$

$$(a/2)^2 - b$$

$$\sqrt{(a/2)^2 - b}$$

$$\frac{a}{2} + \sqrt{(a/2)^2 - b} = x$$

$$\frac{a}{2} - \sqrt{(a/2)^2 - b} = y$$

Мы видим последовательность решения квадратного уравнения, эквивалентного заданной системе. Никаких пояснений нет, но дается большое число однотипных задач.

Как получен алгоритм решения? Существуют различные гипотезы на этот счет. Одна из них:

Если $b \neq \left(\frac{a}{2}\right)^2$, то множимое и обратное ему различны, тогда в качестве **вспомогательной неизвестной величины** можно взять величину, на которую множимое и обратное отличаются от половины их суммы:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + t \\ y = \frac{a}{2} - t \end{cases}$$

Тогда второе уравнение заданной системы дает простейшее квадратное уравнение

$$t^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b,$$

которое решается извлечением квадратного корня.

Анализ этой гипотезы позволяет сделать вывод, что вавилоняне:

- **знали подстановки;**
- **умели раскрывать скобки;**
- **знали формулу квадрата двучлена.**

Это же подтверждает и еще одна, Неканоническая, задача:

«Длина, ширина. Длину и ширину я перемножил и площадь получил. Затем избыток длины над шириной я прибавил к площади: 183 получилось у меня. Затем длину и ширину я сложил: 27.

Спрашивается: длина, ширина и площадь».

Итак, задана система $\begin{cases} (x - y) + xy = 183 \\ x + y = 27 \end{cases}$ или $\begin{cases} (x - y) + xy = a \\ x + y = b \end{cases}$

«Ты сделаешь так: $27 + 183 = 210$ (*)

$2 + 27 = 29$ » (**)

и затем решается каноническая система
$$\begin{cases} uv = 210 \\ u + v = 29 \end{cases} \quad (***)$$

В результате получено $x = u = 15$, $y = v - 2 = 12$.

Очевидно, что уравнение (*) получено в результате сложения уравнений исходной системы: $xy + 2x = 210$.

Если вынести общий множитель $x(y + 2) = 210$

и обозначить $x = u$, $y + 2 = v$, то получится система (***)

⇒ древние вавилоняне умели выносить общий множитель и делать подстановки! Существуют и другие примеры, подтверждающие этот вывод.

Все только в числах ⇒ речь идет о **ЧИСЛОВОЙ** алгебре.

«История математики с древнейших времен до начала Нового времени» (1970):

Приведенная терминология свидетельствует о происхождении ряда алгебраических задач из геометрии, но сами задачи имели совершенно отвлеченный характер. Это проявляется уже в том, что с неизвестными величинами, по названию имеющими различные измерения, обращались как с однородными, составляя выражения, равносильные нашим $xy + x$ и $xyz + xy$. Следует отметить также, что «длина», «ширина», «площадь» и т. д. изображались шумерскими знаками в текстах, написанных на аккадском языке. Поскольку разговорным был уже аккадский язык, а шумерский вышел из употребления, эти знаки приобретали характер настоящих математических символов. В некоторых случаях употреблялись и вовсе отвлеченные названия «множитель» и «обратное»,

Область, в которой вавилонянам принадлежит основной успех—это решение задач на квадратные уравнения и системы, сводящиеся к ним. Таких задач в клинописных текстах подавляющее большинство.

«История математики с древнейших времен до начала Нового времени»:

Вавилоняне решали также некоторые задачи, выражающиеся кубическими уравнениями. Ставился вопрос об определении ребер прямоугольного параллелепипеда по данной сумме объема и площади одной грани, т. е. $xyz + xy$, и некоторым условиям, наложенным на ребра. В зависимости от этих условий получаются уравнения первой, второй и третьей степеней, последнее, например, в случаях

$$\left. \begin{aligned} xyz + xy &= 1;10, \\ y &= 0;40 x, \\ z &= 12 x \end{aligned} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} xyz + xy &= 1;10, \\ x + y &= 0;50, \\ z &= 12 x. \end{aligned} \right\}$$

В первом случае задача приводится к уравнению

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 4;12$$

и была решена, скорее всего, с помощью таблицы чисел $n^3 + n^2$, о которой упоминалось ранее ($x = 0;30$ и т. д.). Во-втором случае проводился подбор тех же самых значений неизвестных с помощью искусного разложения на множители.

Б.Л. Ван дер Варден «*Пробуждающаяся наука*» (1950, русский перевод 1959):

Но даже и кубических уравнений вавилоняне не боялись. Так, например, в тексте BM 85200, который согласно Нейгабауэру (стр. 193) моложе всех разобранных до сих пор текстов, есть простое кубическое уравнение (задача 22):

$$12x^3 = 1; 30.$$

Следующая за этой задача 23 приводит к смешанному кубическому уравнению

$$x^2(12x + 1) = 1; 45.$$

Умножая обе части на 12^2 , писец получает:

$$(12x)^2 (12x + 1) = 4,12$$

и сразу находит отсюда $12x=6$. Откуда он это взял? Конечно, из таблицы. Мы ведь знаем, что существовали таблицы, которые для чисел вида $n^2(n+1)$ давали их «корень».

Следовательно, при помощи этих таблиц вавилоняне могли смешанные кубические уравнения вида

$$x^2(ux + 1) = v$$

решать так же просто, как чистые квадратные или кубические уравнения.

К.А. Рыбников «История математики» 1960 г. :

Имеется также ряд текстов, посвященных решению задач, которые с современной точки зрения сводятся к уравнениям 1-й, 2-й и даже 3-й степени.

Б. Л. ван дер Варден классифицировал все приемы решения задач в вавилонских табличках. Он пришел к выводу, что эти приемы эквивалентны приемам решения следующих десяти видов уравнений и их систем:

а) Уравнения с одним неизвестным: $ax=b$, $x^2=a$; $x^2 \pm ax=b$; $x^3=a$; $x^2(x+1)=a$.

б) Системы уравнений с двумя неизвестными: $x \pm y=a$, $xy=$
 $=b$; $x \pm y=a$, $x^2 \pm y^2=b$.

2. КУБИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ДРЕВНЕМ ВАВИЛОНЕ

Выгодский М.Я.: «Интересующий нас текст, впервые опубликованный в 1933 Нейгебауером, содержит **23 (в статье 1933 Нейгебауэр пишет «18»)** задачи, однородные по форме, но различные по математическому типу (в свое время текст имел 30 задач, до нас он дошел в поврежденном виде: его удалось составить из двух кусков, один из которых находится в Лондоне, другой в Берлине). Во всех задачах требуется определить «длину», «ширину» и «глубину» объема «выкопанной земли».

Сообразно тому, что мы видели в предшествующих задачах, мы имеем все основания видеть в «длине», «ширине» и «глубине» просто неизвестные числа x , y , z , «объем выкопанной земли» есть произведение $x y z = V$ этих чисел.

В ряде задач фигурирует также и «сечение», на которое мы можем смотреть просто как на произведение $x y = S$. В согласии с этим стоит то, что в некоторых из этих задач «объемы» складываются с «сечениями» и задается величина суммы. Задаются еще два условия; смотря по их характеру, задача сводится к уравнению первой, второй или третьей степени».

В своей статье 1933 о кубических уравнениях Нейгебауэр разбирает шесть задач и выделяет среди них **три типа**: пусть x – длина, y – ширина, z – высота. К сожалению, **оригинальных текстов решений Нейгебауэр в статье не приводит**, заменяя их своими реконструкциями.

$$1. \quad \begin{cases} xyz = 3/2 \\ y = x \\ z = 12x \end{cases} \Rightarrow 12x^3 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$2. \quad \begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} xyz = 7/4 \\ y = x \\ z = 12x + 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} xy(z + 1) = 1/18 \\ y = x \\ z = 12x + 7 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} xy(z + 1) = 7/6 \\ y = \frac{2}{3}x \\ z = 12x \end{cases} \end{array}$$

$$3. \quad \begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} xy(z + 1) = 7/6 \\ x + y = 5/6 \\ z = 12x \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} xy(z + 1) = 7/6 \\ x - y = 1/6 \\ z = 12x \end{cases} \end{array}$$

Задачи типа 2 Нейгебауэр называет задачами «канонического» типа.

Для решения этих задач **важно** учесть **единицы измерения**:

– длина и ширина измерялись в *гарах*, а высота – в *локтях*;

1 *гар* = 12 *локтей*;

– объем – в сарах: 1 *сар* = 1 кубический *гар* = 1 *гар* × 1 *гар* × 1 *гар*.

Задача 2а). Запишем условие в локтях:
$$\begin{cases} 12x \cdot 12y \cdot z = 7/4 \cdot 12 \cdot 12 \\ 12y = 12x \\ z = 12x + 1 \end{cases}.$$

Тогда первое уравнение дает: $(12x)^3 + (12x)^2 = 252$.

Для решения этого уравнения используется таблица $n^3 + n^2$ для всех $n = 1, \dots, 60 \Rightarrow n = 6$ локтей, поэтому $x = 1/2, y = 1/2, z = 7$.

Задача 2б) решается точно так же.

Задача 2с). Запишем условие в локтях $\begin{cases} 12x \cdot 12y \cdot z = 1/18 \cdot 12 \cdot 12 \\ 12y = 12x \\ z = 12x + 7 \end{cases}$

Подставляя все в первое уравнение, получаем:

$$(12x)^3 + 7(12x)^2 = 8.$$

Вавилоняне сразу дают ответ: $12x = 1$. Как он получен, неизвестно.

Может быть, очевидным подбором?

Может быть, существовали таблицы типа $n^3 + 2n^2, \quad n^3 + 3n^2, \dots,$
 $n^3 + 7n^2, \dots$ Ответа у нас нет.

Задачи типа 3 Нейгебауэр называет задачами «общего» типа. Запишем эти системы в параметрическом виде:

$$\begin{cases} xy(z + 1) = a \\ x \pm y = b \\ z = kx \end{cases}$$

Для решения этих задач сначала вычисляется величина $\frac{a}{b^3 k}$.

Что это такое? Нетрудно видеть, что

$$\frac{a}{k} = xy \cdot \frac{1}{k} (z + 1) = xy \left(x + \frac{1}{k} \right);$$

после деления на b^3 получаем:

$$\frac{1}{b^3} \cdot \frac{a}{k} = \frac{x}{b} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{\left(x + \frac{1}{k} \right)}{b}.$$

В задаче **3b** получается уравнение $21 = 6x \cdot 6y \cdot \left(6x + \frac{1}{2} \right)$ и **без объяснения** утверждается: $6x=3$, $6x + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$, $6y=2$, откуда уже легко найти ответ.

В работе **К. Фогеля** «*Кубические уравнения в Древнем Вавилоне*», помещенной в качестве приложения к «*Лекциям по истории античных математических наук*» **О. Нейгебауэра** (М.-Л., 1937. Том 1. Догреческая математика. С. 233–239) дается очень интересная гипотеза о том, как можно средствами вавилонской математики получить такое решение.

Скачать книгу можно по ссылке:

pdf: <https://math.msu.ru/node/1249>

djvu: <http://pyrkov-professor.ru/default.aspx?tabid=184&ArticleId=570>

Самая простая из этих задач — № 14. Она приводит к «чистому уравнению».

Идя алгебраическим путем, мы сразу же получаем

$$12x^3 = 1\frac{1}{2}; \quad x^3 = \frac{1}{8}; \quad x = y = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}; \quad z = 6.$$

Но, с нашей точки зрения, мы имеем здесь геометрическую задачу, причем существенную роль играет следующая особенность вавилонской математики: при вычислении объемов, как известно, высота

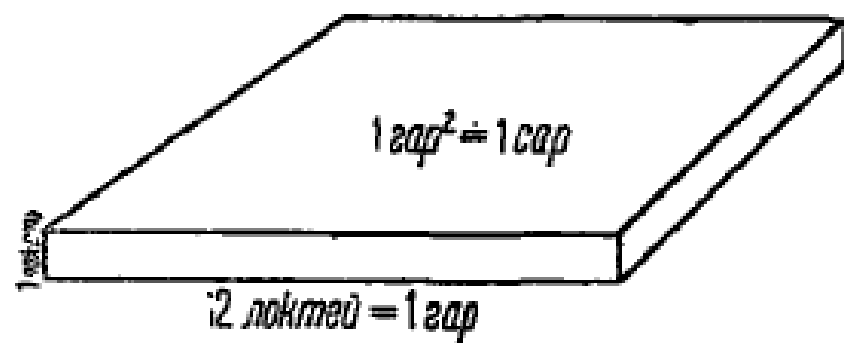


Рис. 66.

измеряется в локтях, тогда как ширина и длина поперечного сечения — в гарах (1 гар = 12 локтям)¹). Отсюда следует, что мерой объема служит не куб, а слой (рис. 66), именно параллелепипед с квадратным гаром в основании (1 кв. гар = 1 сару) и с высотой в 1 локоть²). Я буду называть эту единицу объемным саром.

Эта метрологическая особенность объясняет и то обстоятельство, почему во всех шести задачах (в уравнении III) всегда встречается множитель 12.

2a

$$a) \begin{cases} xyz = 7/4 \\ y = x \\ z = 12x + 1 \end{cases}$$

Так как $x = y$, то поперечное сечение — квадратное, а высота (согласно условию III) на 1 локоть длинней, чем сторона этого квадрата. Это дает куб x^3 с наложенным на него параллелепипедом с высотой в 1 локоть (рис. 67). Объем этого тела $1 \frac{3}{4}$, но он измерен в объемных сарах; если его раздробить в куб. локти (путем умножения на 144), то получим 252 куб. локтя. Весь объем (куб + слой вышиной в 1 локоть) равен, следовательно,

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 252;$$

На опубликованной Нейгебауером ¹⁾ замечательной табличке Переднеазиатского отделения Берлинских музеев даны суммы величины $n^3 + n^2$ для всех n от 1 до 60. В этой табличке непосредственно прочитываем значение 6 для $12x$. Таким образом, сторона куба равна и в этом случае 6 локтям.

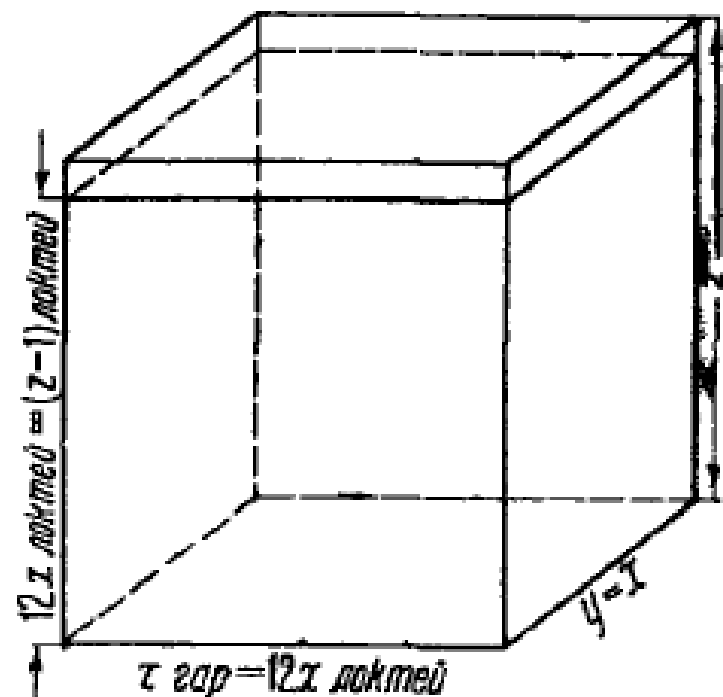


Рис. 67.

36

$$\begin{cases} xy(z+1) = 7/6 \\ x - y = 1/6 \\ z = 12x \end{cases}$$

Наиболее сложные задачи № 2 и 3 образуют группу, которую Нейгебауер назвал «общим видом». Если в задаче № 3 заменить $1\frac{1}{6}$ через a , 12 — через μ , $\frac{1}{6}$ — через b , то получится уравнение

$$\mu x^3 + (1 - \mu b) x^2 - bx - a = 0;$$

этот вид при помощи преобразования $\xi = x + a$ можно привести сначала к виду

$$\xi^3 + a_1 \xi^2 = a_2$$

и затем путем деления на a_1^3 к виду

$$\xi_1^3 + \xi_1^2 = a^3.$$

Нейгебауер указывает при этом на то, что все необходимые для этой цели отдельные операции были известны в древневавилонской математике. Хотя как раз в задаче № 3 (и в № 2, принадлежащей к той же группе) рассуждение не идет таким образом, Нейгебауер считает допустимым, имея только этот текст, признать такое модернизаторское решение подлежащим обсуждению.

В действительности в тексте нет и следа преобразования уравнения к каноническому виду; здесь образуется выражение

$$\frac{x^2 y + \frac{xy}{\mu}}{b^3} = \frac{x}{b} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{x + \frac{1}{\mu}}{b} = \frac{x}{b} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{z+1}{\mu b} = 21$$

и отсюда получается непонятным путем сразу же

$$\frac{x}{b} = 3, \quad \frac{y}{b} = 2, \quad \frac{z+1}{\mu b} = 3\frac{1}{2}.$$

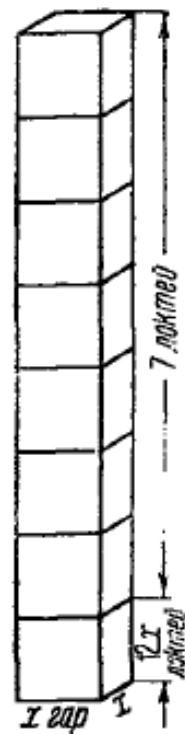


Рис. 69.

Мы не можем понять этого перехода, так как здесь какой-то несомненный пробел в нашем знакомстве с вавилонской математикой; однако этот пробел нетрудно заполнить, если подойти ко всей задаче в целом с геометрической точки зрения.

Представим себе и в этом случае куб с ребром x , на который наложен слой в 1 локоть вышиной (рис. 70). Отсечем (при помощи сечения, параллельного передней поверхности) от ширины отрезок, равный $\frac{1}{6}$ гара, тогда остаточный параллелепипед $ABCDEFGH$ и представляет собой то тело, о котором идет речь в задаче; объем этого тела и в этом случае задан в виде $xyz + xy = 1\frac{1}{6}$ объемных саров.

Если мы образуем выражение

$$\frac{xyz + yx}{\mu} = x^2y + \frac{xy}{\mu},$$

то его числовое значение $\frac{7}{12}$ будет выражать как раз объем в куб. гарах.

Для решения задач $\begin{cases} xy(z + 1) = a \\ x \pm y = b \\ z = kx \end{cases}$ сначала вычисляется величина $\frac{a}{b^3k}$ — числовое

значение, о котором идет речь выше у Фогеля.

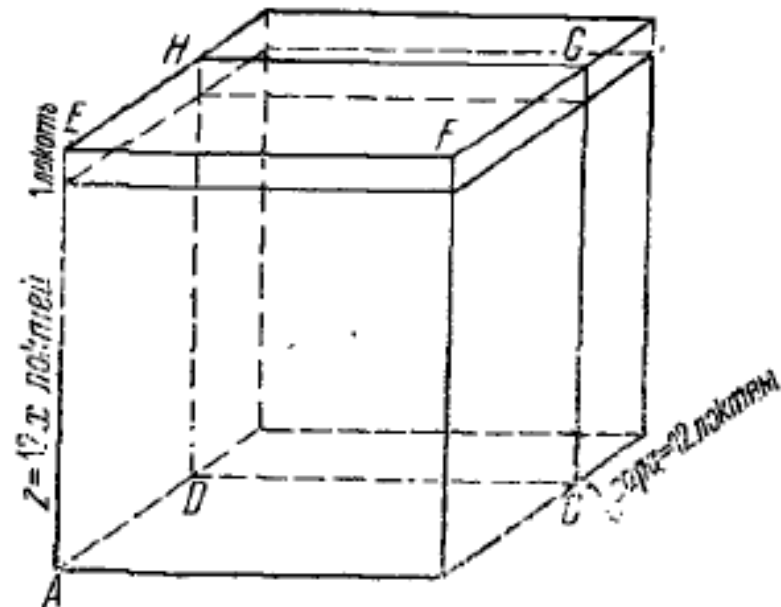


Рис. 70.

Вычислитель мог поступать таким образом: он представляет себе подобное искомому, но большее тело, так чтобы разность $x - y$ между сторонами основания равнялась не $\frac{1}{6}$ гар, а целому гару. Тогда объем этого тела в 6^3 раз больше искомого или равен $\frac{7}{72} \cdot 216 = 21$ куб. гар. Для вычисления трех ребер L , B , H параллелепипеда могли составить такую таблицу, чтобы $L - B$ всегда равнялось единице, именно

$L = 6x$	$B = 6y$	$L \cdot B$	Объем	$H = 6h$
2	1	2	21	$10 \frac{1}{2}$
3	2	6	21	$3 \frac{1}{2}$
4	3	12	21	$1 \frac{3}{4}$
5	4	20	21	$1 \frac{1}{20}$

Так как $H > L$, то для нашей задачи следует принять в соображение только две первые строки таблицы.

Т.к. далее должно существовать равенство $H = L + 6$ локтей

($= L + \frac{1}{2}$ гара), то единственным решением будет $L = 3$, $B = 2$, $H = 3\frac{1}{2}$. Разделив каждую из трех полученных величин на шесть, получим $x = \frac{1}{2}$ гара, $y = \frac{1}{3}$ гара, $h = \frac{7}{12}$ гара; тогда $z = \frac{1}{2}$ гара $= 6$ локтям, и, следовательно, наложенный слой действительно имеет в высоту 1 локоть.

Аналогичным образом может быть решена и другая задача:

$$\begin{cases} xy(z + 1) = 7/6 \\ x + y = 5/6 \\ z = 12x \end{cases}$$

Здесь вместо разности $x - y$ дана сумма $x + y$, равная $\frac{5}{6}$ гара. Чтобы получить тело, подобное заданному, так чтобы у него $x + y = 1$ гару, необходимо помножить каждое из трех ребер на $1 : \frac{5}{6} = 1\frac{1}{5}$. Объем заданного тела равен $1\frac{1}{6} : 12 = \frac{7}{72}$ куб. гара, объем конструируемого нами подобного тела в $(\frac{6}{5})^3$ раз больше, т. е. он равен $\frac{21}{125}$ куб. гара.

Если и для этого случая составить таблицу, так чтобы в нее вошли половины, трети, четверти, пятые, шестые и десятые (ничто не говорит против того, что такая таблица может быть распространена и на более мелкие части), то, если принять во внимание, что $L > B$, получается следующее :

$L = x \cdot 1\frac{1}{5}$	$B = y \cdot 1\frac{1}{5}$	$L \cdot B$	Объем	$H = h \cdot 1\frac{1}{5}$
$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{21}{125}$	$1\frac{13}{15}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{21}{125}$	$1\frac{131}{625}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{21}{125}$	$1\frac{1}{20}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{21}{125}$	$\frac{336}{375}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{21}{100}$	$\frac{21}{125}$	$\frac{4}{5}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{21}{125}$	$\frac{189}{250}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{21}{125}$	$\frac{7}{10}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{21}{125}$	$\frac{84}{125}$

Из предпоследней строки получаем (умножив на $\frac{5}{6}$) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $h = \frac{7}{12}$. Таким образом и в этом случае h на 1 локоть больше, чем ребро x . Пятая строка также дала бы правильное решение, именно $x = \frac{7}{12}$, $y = \frac{1}{4}$, $h = \frac{2}{3}$.

Каков же смысл всех этих задач? Будем ли мы их вместе с Нейгебауером толковать чисто алгебраически или, как мы поступили в этой статье, геометрически; во всяком случае, дело здесь сводится к пользованию вспомогательными таблицами для числового решения задач, во всем прочем не представляющих больших трудностей. Быть может, мы вправе относить эти задачи к области сакральной геометрии. Мы знаем, что в развитии древнеиндийской геометрии сыграли значительную роль некоторые определенные, нам еще не ясные представления о форме и величине жертвенных алтарей²⁾. В Индии нормальная форма алтаря — куб, но ему может быть придана сообразно с изменением предъявляемых к нему культом требований и другая форма, с тем чтобы объем оставался неизменным. При этом играет крупную роль то или иное расположение слоев и число пошедших на изготовление камней. Я позволю себе выставить еще одно недоказанное предположение: ход рассуждения, подобный тому, который мы постулировали выше, когда на куб x^3 накладывают дальнейшие слои x' ов, мог привести к задаче удвоения куба, известной нам из греческой математики, и притом согласно легенде — тоже в связи с алтарем.

3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Самым древним и самым знаменитым примером неопределенного уравнения является уравнение, выражающее зависимость между сторонами прямоугольного треугольника:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Это утверждение всем известно как “теорема Пифагора”, хотя никаких доказательств, что Пифагор первым доказал его, нет.

Поскольку существует бесконечное множество прямоугольных треугольников, то существует и бесконечное множество решений этого уравнения, и задача состоит в том, чтобы найти все рациональные решения.

C. HOUZEL. Introduction à l’histoire de l’analyse diophantienne // Cahiers du séminaire d’histoire des mathématiques 2e série, tome 3 (**1993**), p. 1-12 :

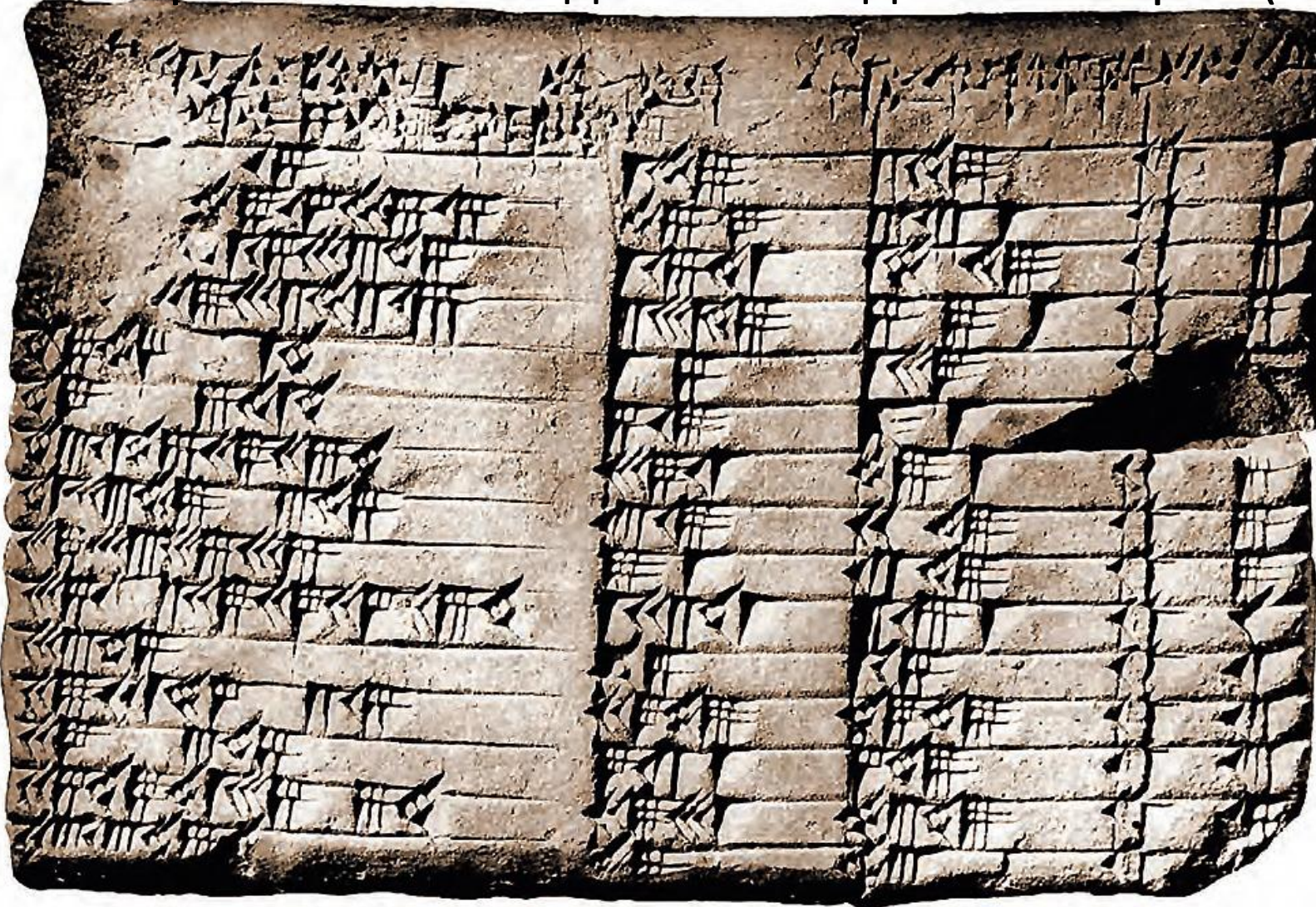
Ничего о вавилонских тройках и формулы композиции форм. В списке литературы не упоминается И.Г. Башмакова (1984), Нейгебауэр только послевоенный, но зато есть

T.A. LAVRINENKO. Diofantovy uravnenija v rabotax L.Eilera / Razvitije idei Leonarda Eilera i sovremennaja nauka. Moscou (1988), p. 153–165.

Плимптон 322

(Опубликован Нейгебауэром и Саксом в 1945)

В оригинале в таблице пять столбцов. В пятом указан номер строки, в четвертом – что-то одинаковое для всех строк (кi у Брейнса –???),

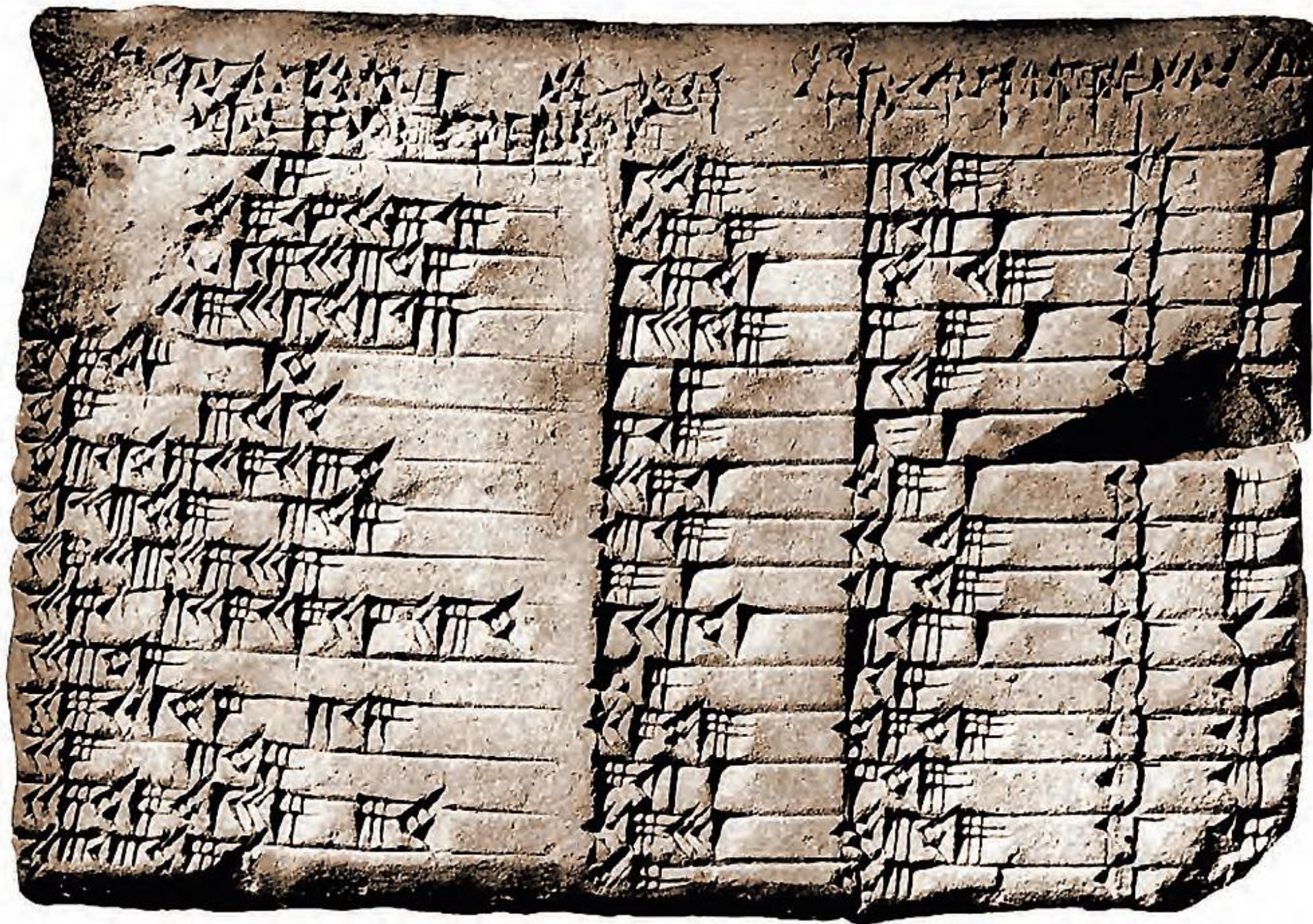


в третьем – гипотенуза, во втором – меньший катет, в первом (самое загадочное! зачем???) – квадрат отношения гипотенузы ко второму катету (косеканс??? в квадрате).

Египетский треугольник находится в строке 11 в виде (1_00 ; _45; 1_15).

Плимптон 322

строка 11 →



В русском переводе «Пробуждающейся науки» Ван дер Вардена (1959) фотография этой таблицы сопровождается текстом:

«Рис. 36. Математический текст Plimpton 322 из Плимптоновской библиотеки Колумбийского университета в Нью-Йорке. Древневавилонский клинописный текст, содержащий перечень прямоугольных треугольников с рациональными сторонами h , b и d . **Слева несколько столбцов отломано.** Первый сохранившийся столбец дает в убывающем порядке отношения $\frac{d^2}{b^2}$. Заголовок столбца непонятен. Два следующих столбца дают «ширину» b и «диагональ» d **в целых числах (!!! – Г.С.)**. Последний столбец содержит только ряд следующих друг за другом чисел от 1 до 15. В 11-й строчке числа b и d содержат общий множитель **2 (???)**; в 15-й строчке имеется (после исправления ошибки – Г.С.) общий множитель 2; во всех других случаях числа и не имеют общих множителей»

Длины сторон треугольников указаны в целых числах или в шестидесятеричных **дробях???**

Много работ, посвященных изучению и расшифровке клинописных математических таблиц, принадлежит голландскому математику, физику и историку науки Эверту Мари Брёйнсу, занимавшемуся также расшифровкой обнаруженных таблиц из Суз (In Memoriam. **Evert Marie BRUINS** (1909—1990) // HISTORIA MATHEMATICA 18 (1991), 381-389)

1948 Square roots in Babylonian and Greek mathematics. IM (Indagationes Mathematicae) 10, 121-130 (= KNAvW (Koninklijke Nederlandse Academic van Wetenschappen te Amsterdam [Royal Dutch Academy of Sciences af Amsterdam) Proc. Sc. 51, 332-341).

1949 Some remarks on ancient calculation. IM 11,50-52 (= KNAvW Proc. Sc. 52, 161-163).

1949 On Plimpton 322: Pythagorean numbers in Babylonian mathematics. IM 11, 191-194 (= KNAvW Proc. Sc. 52,629-632).

1964 (E. M. Bruins, Ed.) Codex Constantinopolitanus Palatii Veteris No. 2. Leiden: Brill, 3 vols. Part 1: Reproduction of the manuscript, xii + 216 pp. Part 2: Greek text, vii + 151 pp. Part 3: Translation and commentary, xii + 342 pp.

1964 (E. M. Bruins, Ed.)) Heronis Alexandrini Metrica. Accedunt partes quaedam selectae codicis Constantinopolitani Palatii Veteris No. 1. Leiden: Brill, 96 pp.

1964 Babylone et Héron versus Euclide. Revue d'Assyriologie et d'Arche'ologie Orientale 58, 173-181.



Е.М. Bruins в своей статье **1955 «*Pythagorean Triads in babylonian Mathematics. The Errors on Plimpton 322*»** публикует содержание таблицы с использованием привычных для нас арабских цифр, выделив жирным шрифтом содержащиеся в тексте ошибочные данные и предложив для их исправления **свою гипотезу**, отличную от точки зрения Нейгебауэра и Сакса:

59,0,59	1,59	2,49	ki	1
56,56,58,14,50,6,15	56,7	3,12,1	ki	2
55,7,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	ki	3
53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	ki	4
48,54,1,40	1,5	1,37	ki	5
47,6,41,40	5,19	8,1	ki	6
43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	ki	7
41,33,59,3,45	13,19	20,49	ki	8
38,33,36,36	9,1	12,49	ki	9
35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	ki	10
33,45	45	1,15	ki	11
29,21,54,2,15	27,59	48,49	ki	12
27,0,3,45	7,12,1	4,49	ki	13
25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	ki	14
23,13,46,40	56	53	ki	15

I.	II. <i>b</i>	III. <i>d</i>	IV.	<i>I</i>
(1) 59 00 15	1 59	2 49	1	2 00
(1) 56 56 58 14 50 06 15	56 07	3 12 1 [1 20 25]	2	57 36
(1) 55 07 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3	1 20 00
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4	3 45 00
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	5	1 12
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	6	6 00
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7	45 00
(1) 41 33 59 03 45	13 19	20 49	8	16 00
(1) 38 33 36 36	9 01 [8 01]	12 49	9	10
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10	1 48 00
(1) 33 45	45	1 15	11	1 00
(1) 29 21 54 02 15	27 59	48 49	12	40 00
(1) 27 00 03 45	7 12 1 [2 41]	4 49	13	4 00
(1) 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14	45 00
(1) 23 13 46 40	56	53 [1 46]	15	1 30

Также в своей работе Брейнс предлагает еще одно объяснение, как могло быть получено предложенное Нейгебауэром и Саксом правило, позволявшее вавилонянам получать пифагорейские тройки.

$$\text{Нейгебауэр и Сакс: } \begin{cases} x = 2pq \\ y = p^2 - q^2 \\ z = p^2 + q^2 \end{cases}$$

Но остается не совсем ясно, каким образом выбираются p и q , чтобы получить последовательность троек, пронумерованную от 1 до 15.

$$\text{Брейнс: } x^2 + y^2 = z^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y).$$

Изучая новые обнаруженные в Сузах математические тексты, Брейнс пришел к выводу, что одним из популярных приемов решения задач у вавилонян была редукция неизвестного в уравнении, похожая на то, что мы делаем в решении однородных уравнений. Поэтому он предположил, что сначала нужно рассматривать уравнение $1 = d^2 - b^2 = (d + b)(d - b)$,

откуда следует, что сумма и разность – обратные величины, поэтому их можно

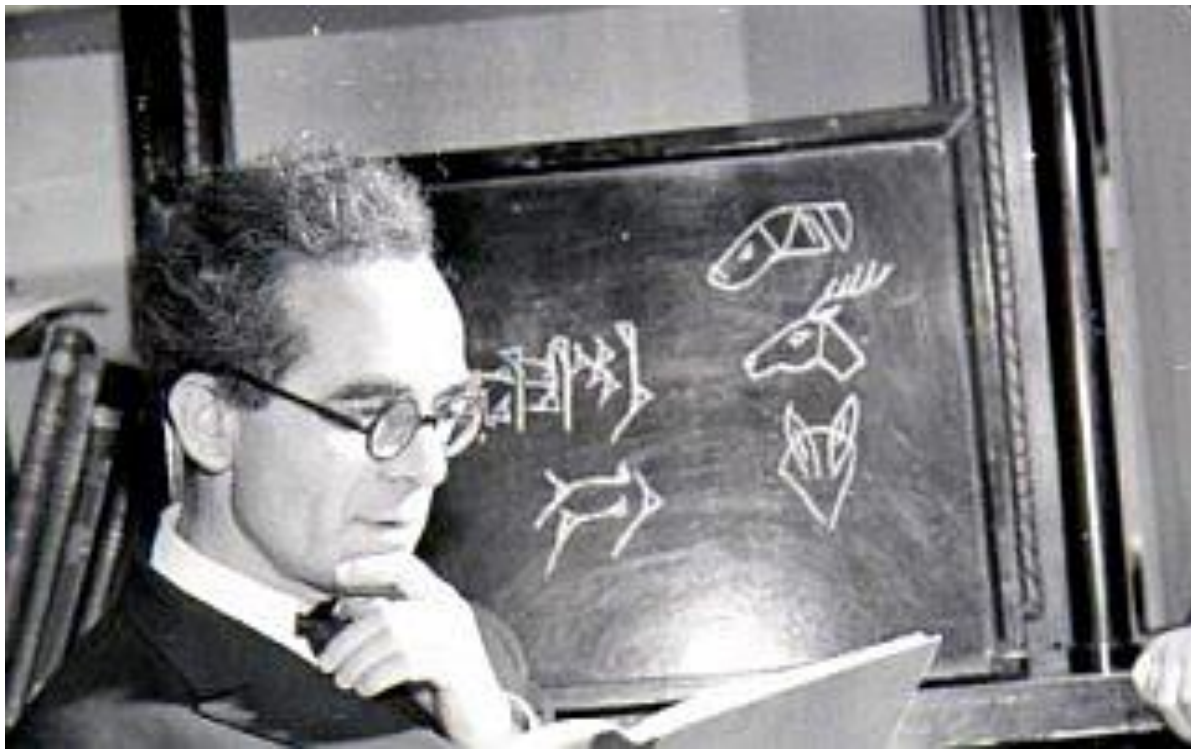
$$\text{выразить через один параметр: } \begin{cases} d + b = n \\ d - b = \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{n} \right) = \frac{z}{x} \\ b = \frac{1}{2} \left(n - \frac{1}{n} \right) = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Один из советских исследователей клинописных табличек (в том числе и тех, что хранятся в Эрмитаже) **Айзик Вайман** в своей книге о шумеро-вавилонской математике (1961, с. 187, есть статья в ИМИ, 10, 1955) пишет:

Воспользуемся изложенным способом для нахождения числовых данных таблички Plimton 322. Прежде всего составим таблицу различных значений λ_n и их обратных величин $\frac{1}{\lambda_n}$ (ясно, что λ_n должны быть правильными) (табл. 16). Пифагоровым числам Plimton 322 соответствует 15 из 21 пары величин, имеющих не более четырех разрядов и лежащих в интервале $2''24 \geq \lambda_n \geq 1''48$ [19, р. 28].

Т а б л и ц а 16

Значения λ_n и $\frac{1}{\lambda_n}$								
n	λ_n	$\frac{1}{\lambda_n}$	n	λ_n	$\frac{1}{\lambda_n}$	n	λ_n	$\frac{1}{\lambda_n}$
1	2''24	0''25	6	2''13'20	0''27	11	2	0''30
2	2''22'13'20	0''25'18'45	7	2''9'36	0''27'46'40	12	1''55'12	0''31'15
3	2''20'37'30	0''25'36	8	2''8	0''28' 7'30	13	1''52'30	0''32
4	2''18'53'20	0''25'55'12	9	2''5	0''28'48	14	1''51'6'40	0''32'24
5	2''15	0''26'40	10	2''1'30	0''29'37'46'40	15	1''48	0''33'20



Айзик Абрамович Вайман (1922–2013) – советский и российский востоковед, исследователь клинописи, дешифровщик протошумерской письменности (надписи из Урука IV–III и из Джемдет-Насра).

Во время войны эвакуировался в Армению, где учился на физико-математическом факультете местного университета. В 1949 окончил исторический факультет ЛГУ.

С 1949 – научный сотрудник отдела Востока Государственного Эрмитажа. Участник XXV Международного конгресса востоковедов (Москва, 1960).

Интересный факт из биографии: см. письмо Борису Александровичу Рыбакову (1908–2001) – директору Института археологии Академии наук СССР, Герою Соц. труда, лауреату Ленинской и Сталинской премий.

Василий Васильевич Струве высказавшись за присвоение Айзику Вайману докторской степени без защиты, назвал его «Шампольоном нашего времени». Юрию Валентиновичу Кнорозову за дешифровку письменности майя сразу присудили степень доктора наук, а Вайману отказали.

Глубокоуважаемый Борис Александрович!

Ученый совет Лен. отделения Института археологии единогласно принял решение о присвоении А.А. Вайману степени кандидата исторических наук за работу "Шумеро-вавилонская математика" и также единогласно постановил просить Ученый совет Института Археологии в Москве о присвоении ему ученой степени доктора исторических наук, таково же было мнение всех трех его оппонентов, а также и мнение руководимого мной отдела древнего Востока Института народов Азии и лично моё.

А.А. Вайман – человек очень достойный, скромно и бескорыстно преданный науке и в течение многих лет работающий в Эрмитаже на окладе 80 руб., – сделал в науке о древнем Востоке крупнейшие открытия, как в области исторических наук, культуры, так и в области дешифровки ранее не поддававшихся объяснению шумерийских пиктографических писем.

И как человек и как ученый он, безусловно, заслуживает чести получить за свой труд не степень кандидата, а СТЕПЕНЬ ДОКТОРА.

Поэтому Вы окажете мне особо личное внимание, если приложите все зависящие от Вас усилия для того, чтобы А.А. Вайман мог получить давно заслуженную степень доктора наук.

*Уважающий Вас академик
Василий Васильевич Струве
Ленинград 21 марта 1965 г.*

По поводу мнения Нейгебауэра и Сакса Вайман пишет:

Возвращаясь к табличке Plimpton 322, необходимо отметить, что все содержащиеся в ней числа могли быть, конечно, найдены, при помощи пятнадцати различных пар взаимно простых α и β . Но величины $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2$ расположены в тексте в убывающей последовательности и умещаются в интервале от $0^{\circ}59'0''15 \approx 1$ до $0^{\circ}23'13''46'40$. Чтобы найти такую последовательность, предварительно надо было бы составить таблицу соответствующих α и β [37, р. 40], что весьма затруднительно (табл. 17).

Взаимно простые числа α и β

n	α	β	n	α	β	n	α	β
1	12	5	6	20	9	11	2	1
2	1'4	27	7	54	25	12	48	25
3	1'15	32	8	32	15	13	15	8
4	4	25	9	25	12	14	50	21
5	9	4	10	10	40	15	9	5

Ван дер Варден соглашается с Брейнсом и в «Пробуждающейся науке», и в своих дальнейших работах использует для объяснения, как были получены пифагорейские тройки в древнем Вавилоне, его гипотезу:

Пусть $n = d + b = \frac{p}{q}$, тогда $\frac{1}{n} = d - b = \frac{q}{p}$ и его можно найти по таблице обратных величин.

$$\Rightarrow d = \frac{z}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) = \frac{p^2 + q^2}{2pq},$$

$$b = \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p} \right) = \frac{p^2 - q^2}{2pq}.$$

Положим $x = 2pq$, тогда для других неизвестных получаем хорошо известные нам формулы для прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами $y = p^2 - q^2$, $z = p^2 + q^2$, которые позже постоянно применял в своей «Арифметике» Диофант.

Таким образом все исследователи РЗ22, начиная с Нейгебаура и Сакса (1945), отмечали необычное содержание его столбцов и пытались найти этому факту объяснение).

У Нейгебауэра:

Если мы возьмем отношение $\frac{b}{l}$ для первой строки, то найдем

$$\frac{1,59}{2,1} = 0;59,30,$$

т. е. почти 1. Отсюда следует, что первый прямоугольный треугольник очень близок к половине квадрата. Аналогично находим, что последний прямоугольный треугольник имеет углы, близкие к 30° и 60° . Далее монотонное убывание чисел в колонке I показывает, что форма треугольников довольно правильным образом меняется между этими двумя пределами. При более тщательном исследовании этого явления обнаруживается, что значения $\frac{d^2}{l^2}$ в колонке I убывают почти линейно; в еще большей мере это относится к самим отношениям $\frac{d}{l}$

У Узеля (1993), также отмечается, что «величина одного из углов уменьшается от 45° до 31° , и таблица построена так, что число в первом столбце имеет простые (шестидесятеричные) значения и растет в арифметической прогрессии».

D.F. Mansfield, N.J. Wildberger (School of Mathematics and Statistics, UNSW, Sydney, Australia). **Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry** // Historia Mathematica. **2017**. T. 44. P. 395–419.



Авторы работы утверждают, что **основной целью P322 была тригонометрия!**

«...культура Древнего Вавилона разработала тригонометрию, которая фактически содержит только точную информацию, и поэтому любая неточность является следствием использования таблицы, а не присуща самой таблице. P322 следует рассматривать как точный текст шестидесятеричной тригонометрической таблицы...

Daniel F. Mansfield, N.J. Wildberger 2017:

P322 имеет историческое и математическое значение, поскольку это и первая тригонометрическая таблица, и единственная точная тригонометрическая таблица. Иррациональные числа и их приближения считаются важными для классической метрической геометрии, но мы показали, что они на самом деле не нужны для тригонометрии. Если бы игральные кости истории упали по-другому, и глубокое математическое понимание писца, создавшего P322, не было потеряно, тогда, весьма вероятно, тригонометрия, основанная на соотношении, развивалась бы вместе с нашим подходом, основанным на углах.

*Эта новая интерпретация P322 значительно повышает статус вавилонской математики, и огромное количество непереуведенных табличек, вероятно, будет содержать еще много сюрпризов, ожидающих своего открытия. **Открытие тригонометрии приписывается древним грекам, но это необходимо пересмотреть** в свете гораздо более раннего, более простого в вычислительном отношении и более точного вавилонского стиля точной шестидесятеричной тригонометрии».*

В более ранних исследованиях можно найти другое отношение к P322:

– ***Robson Eleanor. Words and pictures: new light on Plimpton 322 // American Mathematical Monthly. 2002. Т. 109 (2). Р. 105–120:***

«P322, анализируемый исключительно как часть математики, выглядит очень современно, хотя невозможно сказать, на какую современную математическую дисциплину он больше всего похож: на тригонометрию, теорию чисел или алгебру. Кажется, что он на тысячелетия опередил свое время – несравненно более сложный, чем другие древние математические документы.

*Но если мы будем рассматривать P322 как клинопись, на которой **случайно нанесена математика**, вырисовывается совсем другая картина. Мы видим, что это продукт очень определенного места и времени, сильно зависящий от среды древних писцов – изображение в виде таблицы, его математическое содержание и его функции в качестве помощника учителя. Все используемые в нем методы широко применялись в древней месопотамской **школьной математике**. В этом свете мы можем восхищаться организационными и арифметическими способностями его древнего автора, но больше не можем рассматривать его как дальновидного гения. **Любое сходство P322 с современной математикой находится в наших умах, а не в его».***

Номер строки	<i>l</i>	<i>b</i>	<i>d</i>
1	120	119	169
2	3456	3367	4825
3	4800	4601	6649
4	13500	12709	18541
5	72	65	97
6	360	319	481
7	2700	2291	3541
8	960	799	1249
9	600	481	769
10	6480	4961	8161
11	60	45	75
12	2400	1679	2929
13	240	161	289
14	2700	1771	3229
15	90	56	106

Это – современное изображение пифагорейских троек, которые находятся в таблице.

Задача, решения которой называются «**вавилонскими тройками**», также имеет геометрическую природу: расsects данную трапецию на две равновеликие части прямой, параллельной основаниям.

ВАВИЛОНСКИЕ ЧИСЛА

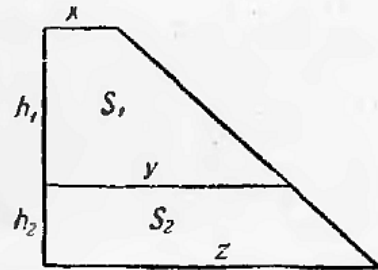
А. А. Вайман

Рассмотрим прямоугольную трапецию, разделенную на две равновеликие полосы. Пусть x и z — основания трапеции, y — делящая линия, h_1 и h_2 — отрезки высоты и S_1 , S_2 ($S_1 = S_2$) — площади полос (черт. 1).

В такой трапеции имеем:

$$(x + y) h_1 = (y + z) h_2,$$

$$\frac{y - x}{z - y} = \frac{h_1}{h_2}.$$



Черт. 1.

Решив совместно оба уравнения и исключив h_1 и h_2 , получим:

$$x^2 + z^2 = 2y^2. \quad (1)$$

Из последнего уравнения следует

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + z^2}{2}}. \quad (1')$$

Формула (1') показывает, что при рациональных значениях x и z величина делящей линии не обязательно будет рациональной. Чтобы получить рациональное значение y , для x и z надо подобрать подходящие числа.

По-видимому, одним из первых, кто об этом сообщил, был А.А. Вайман (Вавилонские числа // ИМИ, вып. 10. 1955).

Для того, чтобы различать пифагоровские и вавилонские тройки введем другие обозначения:

пусть основания есть u и v , а разделяющий отрезок — w ,

$$\text{тогда} \quad u^2 + v^2 = 2w^2.$$

Вайнман обнаружил в Эрмитаже клинописную таблицу с задачей о делении трапеции на несколько частей, в которой явно выписаны вавилонские числа.

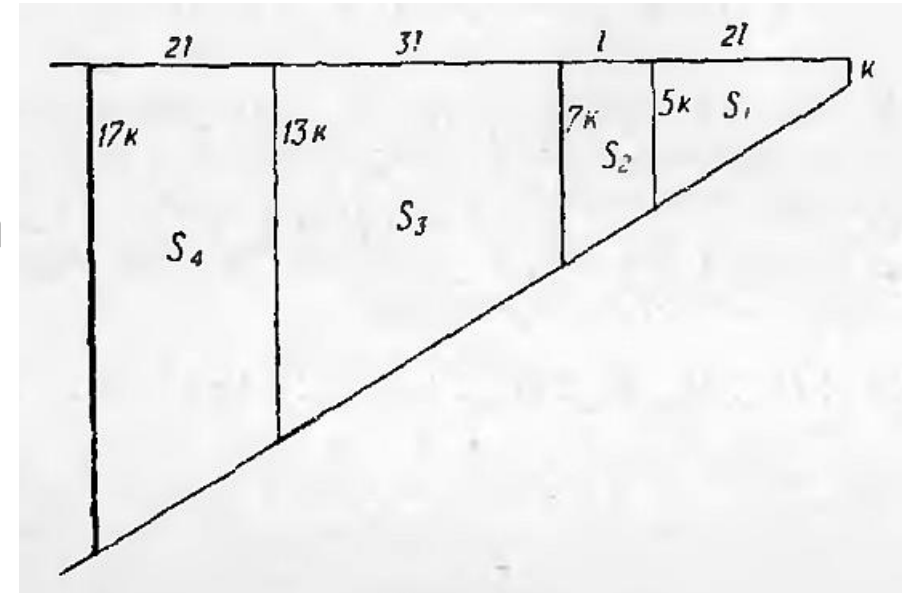
1) «Вавилонскими» мы называем эти числа по аналогии с «пифагоровыми», с которыми они, как выше было показано, непосредственно связаны. Такое название представляется тем более оправданным, что у других древних народов: египтян, греков, арабов и т. д., задачи по рациональному делению трапеции на попарно равновеликие полосы и связанный с ними ряд чисел B_n , насколько мне известно, не засвидетельствованы.

Это — № 15189.

1) А. А. В а й м а н, Эрмитажная клинописная математическая табличка № 015189, Эпиграфика Востока, X, М. И., 1955, стр. 73—83. Табличка датируется первой четвертью II тысячелетия до н. э.

В этой таблице приведены десять трапеций, разделенных на четыре части параллельными линиями так, что $S_1 = S_2$ и $S_3 = S_4$, при этом на верхнем крае таблицы специально выписаны соответствующие вавилонские числа:

1, 5, 7, 13, 17.



Подробное исследование вавилонских троек на основе фактического материала содержится в упомянутой ранее книге А.А. Ваймана 1961 г. «Шумерско-вавилонская математика».

Рассмотрим прямоугольную трапецию, разделенную линией, параллельной основаниям, на две равновеликие части. Обозначим основания трапеции через x_1 и x_3 , линию раздела — x_2 , вертикальную сторону — y , отрезки вертикальной стороны — y_1 и y_2 и площади полос S_1 и S_2 (рис. 44). Пусть справедливо равенство

$$S_1 = S_2.$$

Требуется найти рациональные x_1 , x_2 , x_3 . Задача сводится к решению в рациональных числах квадратного уравнения¹

$$x_1^2 + x_3^2 = 2x_2^2$$

или тождественного ему²

$$\left(\frac{x_3 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 + x_1}{2}\right)^2 = x_2^2$$

при условии $x_1 < x_2 < x_3$. Положив

¹ См. стр. 130 настоящего издания.

² Преобразование первого уравнения во второе засвидетельствовано у вавилонян решением задачи № 8 таблички ВМ 13901 (см. стр. 166 и сл. настоящего издания).

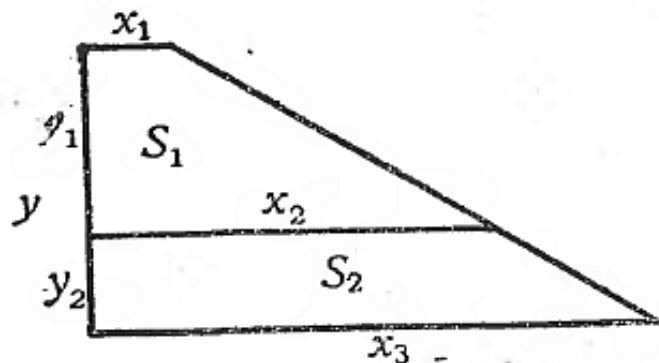


Рис. 44

Положив

$$(1) \quad \frac{1}{2}(x_3 - x_1) = ka, \quad \frac{1}{2}(x_3 + x_1) = kb, \quad x_2 = kc,$$

где a , b , c — пифагорова тройка, k — рациональный множитель, получим рациональные

$$(1a) \quad x_1 = k(b - a), \quad x_2 = kc, \quad x_3 = k(b + a),$$

удовлетворяющие уравнению (1a) и, следовательно, (1).

При $k=1$ имеем:

$$(2) \quad x_1 = b - a, \quad x_2 = c, \quad x_3 = b + a.$$

Вайман использует полученные соотношения и составляет таблицу

Пифагоровы и вавилонские тройки

№	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>x</i> ₁	<i>x</i> ₂	<i>x</i> ₃
1	3	4	5	1	5	7
2	5	12	13	7	13	17
3	7	24	25	17	25	31
4	9	40	41	31	41	49
5	11	1'0	1'1	49	1'1	1'11

В последней строке: 11 60 61 49 61 71

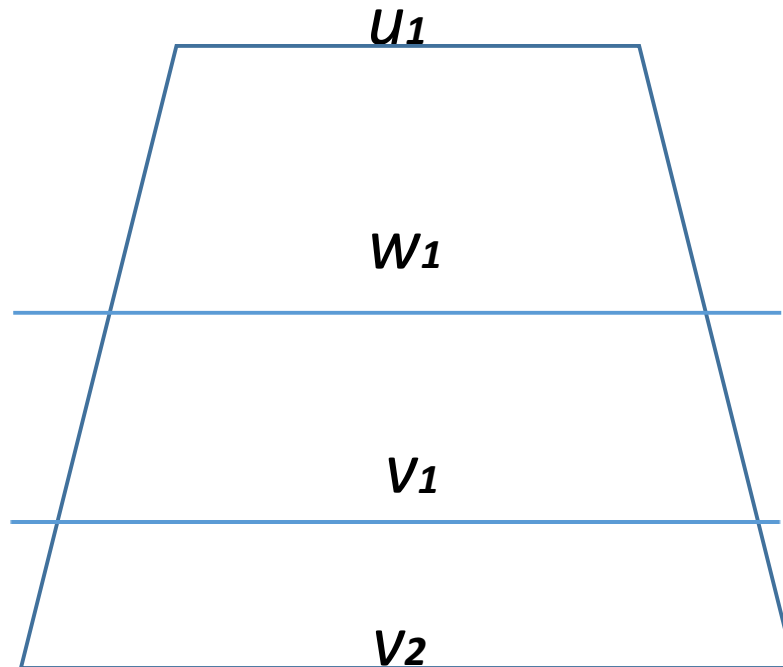
Приведенные в таблице вавилонские тройки довольно часто встречаются в клинописных математических текстах и, вероятно, были найдены древними математиками примерно тем же способом, который описан выше. Вавилонская тройка 1, 5, 7 засвидетельствована текстами VAT 7621 и VAT 7535 [36,1, Ss. 290, 303¹; тройки 7, 13, 17 — текстами YBC 4675 [37, p. 44] и UET V 858¹; промежуток $B_1 — B_5$ (деление трапеции на две пары равновеликих полос) — табличкой Эрм. 15189 [1, стр. 73 и сл.], промежуток $B_5 — B_{11}$ (деление трапеции на три пары равновеликих полос) — табличкой АО 17264.

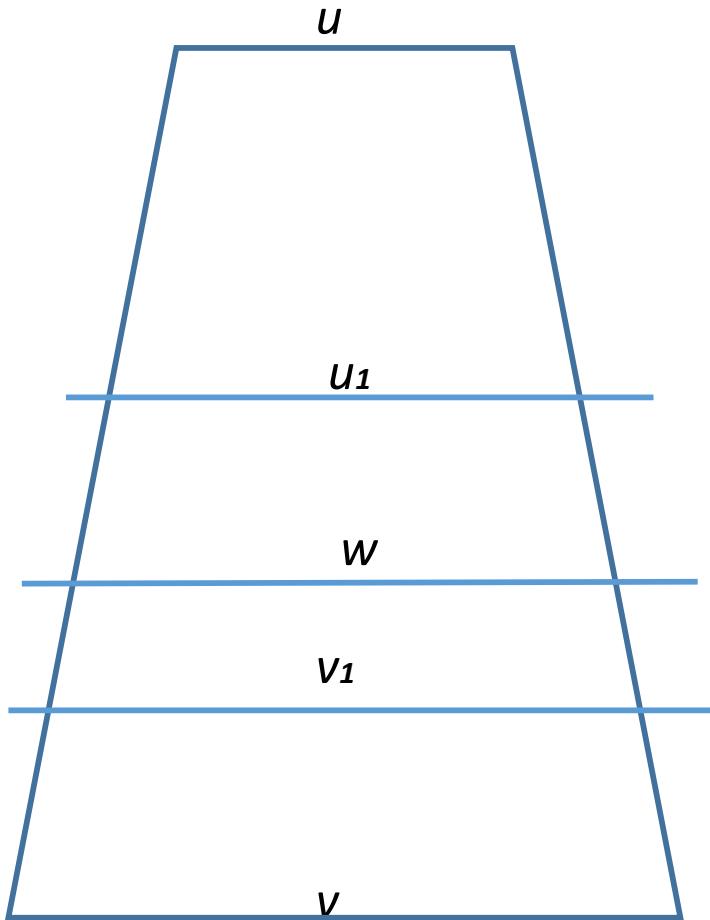
Кроме того, засвидетельствована вавилонская тройка 7,17,23, которая не входит в таблицу, но может быть вычислена через пифагоровы числа 8, 15, 17 (см. задачу №2, Эрмитаж 15073).

От идеи деления трапеции на две равновеликие части вавилоняне, естественно, должны были попытаться **разделить трапецию на три равновеликие параллельные полосы.**

Можно доказать, система
$$\begin{cases} u_1^2 + v_1^2 = 2w_1^2 \\ w_1^2 + v_2^2 = 2v_1^2 \\ u_1 < w_1 < v_1 < v_2 \end{cases}$$

рационального решения не имеет.





Еще **очень интересная задача**:

Пусть дана рациональная трапеция, которую можно разделить на две равновеликие части (дана одна вавилонская тройка u, v, w). Найти внутри этой трапеции две другие линии (основания), образующие трапецию, которая также линией w делится на две равновеликие части (найти другую вавилонскую тройку с тем же w).

Два таких примера есть среди Сузских таблиц, расшифровкой которых занимался Брейнс, а также в книге Ваймана (задача 3 приложения I, L, опубликована впервые). Реконструкция решения этих задач позволяет утверждать, что использовалась формула, известная нам как

Формула композиции форм

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) &= (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 = \\ &= (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2 \end{aligned} \quad (*)$$

При этом в двух задачах таблицы из Суз используются разные варианты разложения. При этом, как оказывается, ограничения накладывают условия задачи: выбрав не тот вариант разложения можно получить в ответе трапеция, которая находится не внутри данной, а выходит за ее пределы.

Действительно, пусть (u, v, w) – некоторая вавилонская тройка, тогда, взяв пифагорейскую тройку (x, y, z) такую, что $z = 1$, можно получить еще две другие вавилонские тройки:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) &= 1 \cdot 2w^2 = \\ &= 2w^2 = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 \\ &= (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2\end{aligned}$$

Т.е. $u_1 = |xu - yv|, \quad v_1 = xv + yu, \quad w_1 = w$

и $u_2 = xu + yv, \quad v_2 = |xv - yu|, \quad w_2 = w.$

Мы видим, что весьма сложная формула (*) была известна!!! И в дальнейшем она играла существенную роль у Диофанта, и на средневековом арабском Востоке, и в Европе XIII-XVII вв.

Таблица из Эрмитажа, о которой пишет Вайман, говоря об итерации вавилонских троек:

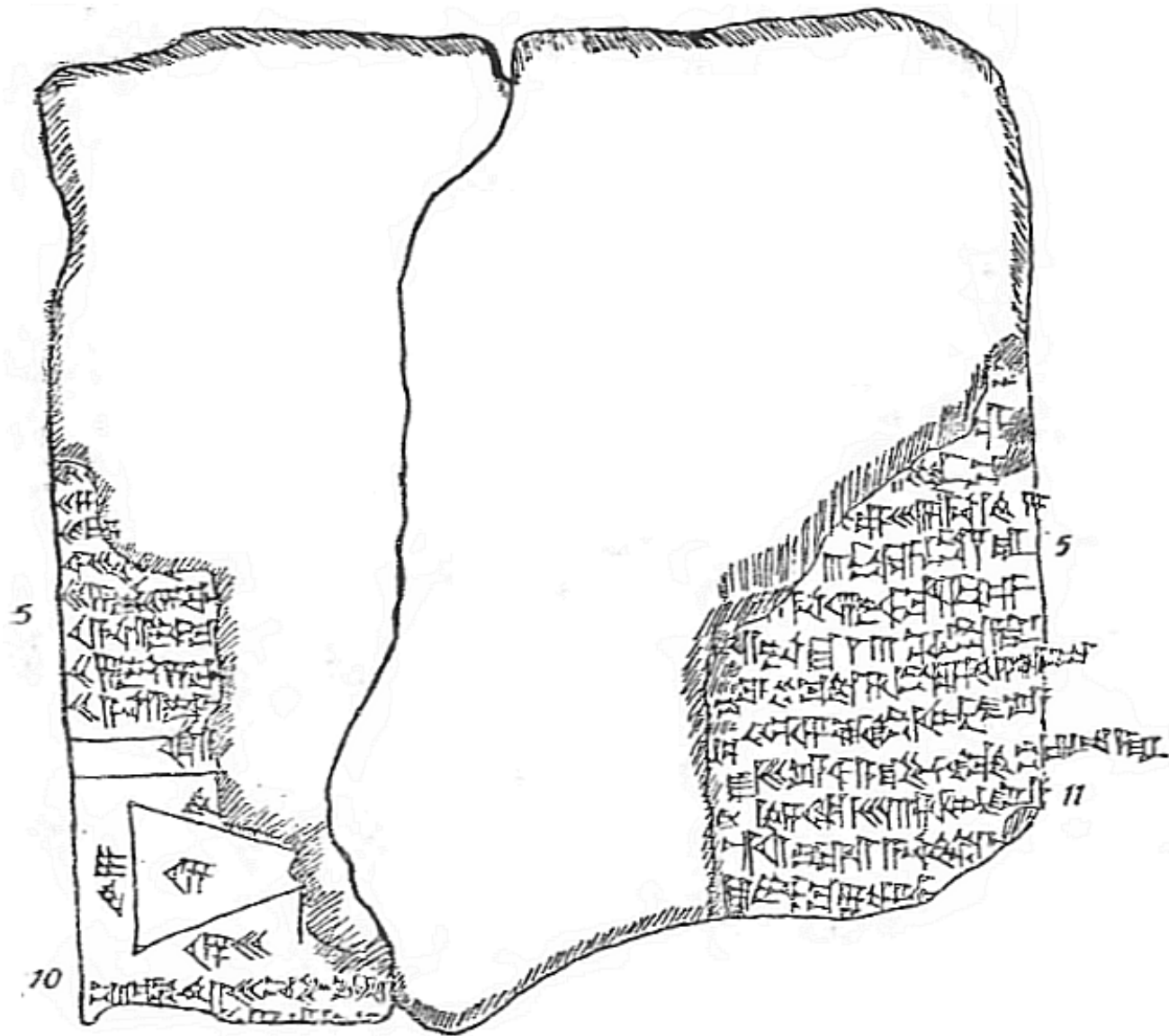
Л. ЭРМ. 15073

Табличка публикуется впервые. Она хранится в Государственном Эрмитаже, куда поступила в составе коллекции Н. П. Лихачева. Точное место находки таблички неизвестно. Судя по ряду признаков, она примыкает к некоторым математическим текстам, хранящимся в Британском музее, и по аналогии с ними должна датироваться концом старовавилонской династии — XVII в. до н. э. К сожалению, почти вся лицевая сторона и нижний край таблички обломаны; сохранившаяся часть — $12,4 \times 12,6$ см — составляет, по-видимому, около двух третей первоначальной ее величины.

Л. III.

(Начало разрушено)

3. 1 [..... *ta-ma*]r
 [..... *ta-mar*
 [.....] *i-ši-ma*
 [.....] *a-mar* 36 *a-na* 1'45
 5 [*i-ši-ma* 1]3 *ta-mar* *an-ta gar-ra*
 [48] *a-na* 15 *i-ši-ma* 12 *ta-mar*
 12 *i-na* KU 1'3-*ta an-ta gar-ra*
ba-zi-ma 51 *dal ta-mar* 1'45 *sag an-ta*
ugû 15 *sag ki-ta mi-nam diri*
 10 1'30 *diri igi-a-šu pu-tur-ma* 40 *ta-margar-ra*
 1'45 *ugû* 1'33 *dal mi-nam diri*
 12 *ta-mar* 12 *a-na* 40 *ša [...]*
i-ši-ma 8 *wa-ri-[ti ta-mar]*
 (Далее разрушено)



Задача 3 (Л. III, 1—13)

Условие задачи, рисунок, который, вероятно, был приложен к тексту, и заключительные строки находились на разрушенной или отломанной части таблички, однако сохранившиеся 10 строк (4—13) позволяют дать следующее бесспорное толкование.

Рассматривается трапеция, для которой заданы основания («ширина верхняя» и «ширина нижняя», см. строки 8, 9): $z = 1^{\circ}45$, $x = 0^{\circ}15$ и высота $l = 1$. (Последняя величина в сохранившейся части текста прямо не упомянута). Линией $y = 1^{\circ}15$, параллельной основаниям, трапеция может быть разделена на равновеликие части (использована вавилонская тройка 1, 5, 7 и множитель $0^{\circ}15$). При этом стороны заданы так, чтобы площадь фигуры S была равна единице. Действительно,

$$S = \frac{x+z}{2} l = \frac{1^{\circ}45 + 0^{\circ}15}{2} \cdot 1 = 1.$$

Задача заключается в том, чтобы разделить указанную трапецию на части двумя параллельными основаниям рациональными линиями z_1 и x_1 , и чтобы новая трапеция, образованная этими линиями внутри исходной, тоже делилась линией y на две равновеликие части (рис. 49).

Действия по вычислению z_1 не сохранились, но могут быть реконструированы:

$$0^{\circ}48 \cdot 1^{\circ}45 + 0^{\circ}36 \cdot 0^{\circ}15 = 1^{\circ}33 = \frac{4}{5}z + \frac{3}{5}x = z_1.$$

Действия по вычислению x_1 дошли полностью:

$$0^{\circ}36 \cdot 1^{\circ}45 = 1^{\circ}3 = \frac{3}{5}z \quad (\text{строки 4, 5}),$$

$$0^{\circ}48 \cdot 0^{\circ}15 = 0^{\circ}12 = \frac{4}{5}x \quad (\text{строка 6}),$$

$$1^{\circ}3 - 0^{\circ}21 = 0^{\circ}51 = \frac{3}{5}z - \frac{4}{5}x = x_1 \quad (\text{строки 7, 8}).$$

