

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

## МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»

Декан механико-математического факультета,  
член- корр. РАН, профессор А.И. Шафаревич



«27» мая 2022 г.

## ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

(для осуществления приема на обучение по образовательным программам высшего образования  
- программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре)

1. Естественные науки

1.1. Математика и механика

### ***1.1.6. Вычислительная математика***

(Физико-математические науки)

Программа утверждена  
Приказом по факультету  
№ \_ от \_\_\_\_\_ 2022 г.

/  
Ученым советом факультета  
(протокол № 4 от 27 мая 2022 г.)

# I. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Настоящая программа\* по специальности «1.1.6 Вычислительная математика» предназначена для осуществления приема по образовательным программам высшего образования – программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, содержит основные темы и вопросы к вступительному экзамену по специальности, список основной и дополнительной литературы и критерии оценивания.

## II. ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ И ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

### Общая часть

1. Непрерывность функций одной переменной, свойства непрерывных функций.
2. Функции многих переменных, полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.
3. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции.
4. Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.
5. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости.
6. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойство абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.
7. Ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).
8. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости, свойства степенных рядов (почленное интегрирование, дифференцирование). Разложение элементарных функций.
9. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.
10. Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.
11. Теоремы Остроградского и Стокса. Дивергенция. Вихрь.
12. Линейные пространства, их подпространства. Базис. Размерность. Теорема о ранге матрицы. Система линейных уравнений. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы однородных линейных уравнений. Теорема Кронекера - Капелли.
13. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.
14. Линейные преобразования линейного пространства, их задания матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями.
15. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Симметрические преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям.
16. Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Порядок элемента. Циклические группы, факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах.
17. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка. Проективная классификация кривых.
18. Дифференциальное уравнение первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения.
19. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Линейное неоднородное уравнение.
20. Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами: однородные и неоднородные задачи.
21. Функции комплексного переменного. Условия Коши - Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
22. Элементарные функции комплексного переменного и задаваемые ими конформные

- отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования.
23. Интеграл Коши. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Ряд Тейлора.
  24. Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты.
  25. Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности.
  26. Вторая квадратичная форма поверхности Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье.
  27. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера.

## **Специальная часть**

### **Методы приближения функций.**

1. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Погрешность приближения функции ее интерполяционным многочленом. Оптимизация погрешности приближения за счет выбора узлов интерполяции. Многочлены Чебышева и их свойства.
2. Наилучшее приближение в линейном нормированном пространстве. Существование и единственность многочлена наилучшего равномерного приближения. Теорема П.Л. Чебышева.
3. Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве и вопросы, связанные при его практическом построении. Тригонометрическая интерполяция. Дискретное преобразование Фурье.
4. Сплаины. Экстремальные свойства сплайнов. Построение кубического интерполяционного сплайна. Интерполяционные и аппроксимационные сплайны. Теоремы о приближении функции сплайнами.

### **Численное интегрирование.**

5. Квадратурные формулы интерполяционного типа: прямоугольников, трапеций и Симпсона. Их точность. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса и метод неопределенных коэффициентов. Составные квадратурные формулы, оценки погрешности.
6. Ортогональные многочлены. Квадратуры Гаусса.
7. Правило Рунге практической оценки погрешности. Интегрирование быстро осциллирующих функций. Вычисление интегралов в нерегулярном случае. Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы.

### **Численные методы алгебры.**

8. Прямые методы решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса и LU разложение. Методы вращений и отражений. Оценка числа арифметических операций.
9. Проблема собственных значений. Степенной метод. Методы вращений Якоби, бисекции и QR алгоритм.
10. Одношаговые итерационные методы решения СЛАУ. Методы простой итерации, Зейделя и наискорейшего градиентного спуска. Итерационные методы с использованием спектрально-эквивалентных операторов.
11. Многошаговые итерационные методы решения СЛАУ. Оптимизация скорости сходимости метода простой итерации с переменным итерационным параметром. Метод сопряженных градиентов.

### **Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.**

12. Явный и неявный метод Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследование свойств на модельных задачах – локальная и глобальная погрешность.
13. Глобальная оценка погрешности явных одношаговых методов.
14. Явные методы Рунге-Кутты.
15. Особенности интегрирования систем уравнений. Методы решения жестких систем.
16. Многошаговые методы.
17. Сеточный метод для численного решения краевой задачи для уравнения второго порядка. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема Филиппова А.Ф.
18. Метод Фурье и метод прогонки для решения систем линейных алгебраических уравнений специального вида. Методы решения уравнений в частных производных.
19. Аппроксимация гиперболических задач. Спектральный признак устойчивости. Принцип замороженных коэффициентов. Численное решение нелинейных задач с разрывными решениями.
20. Конечноразностные методы для решения одномерного параболического уравнения.

21. Конечноразностная аппроксимация эллиптических уравнений. Структура получаемых матриц.
22. Метод конечных элементов для эллиптических задач. Выбор базисных функций. Метод Рунге и метод Галеркина.
23. Решение параболических уравнений с несколькими пространственными переменными. Методы расщепления.
24. Метод решения сеточных эллиптических уравнений, основанный на быстром дискретном преобразовании Фурье. Многомерные задачи.
25. Многосеточный метод для решения сеточных эллиптических задач.

От сдающих государственный экзамен требуется знание основных этапов развития математики в России и за рубежом.

### III. РЕФЕРАТ ПО ИЗБРАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ

Реферат по избранному направлению подготовки представляет собой обзор литературы по теме будущего научного исследования и позволяет понять основные задачи и перспективы развития темы будущей диссертационной работы. Реферат включает титульный лист, содержательную часть, выводы и список литературных источников. Объем реферата 10-15 страниц машинописного текста. В отзыве к реферату предполагаемый научный руководитель дает характеристику работы и рекомендуемую оценку, входящую в общий экзаменационный балл.

### IV. ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА

**Вопрос 1.** Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.

**Вопрос 2.** Решение параболических уравнений с несколькими пространственными переменными. Методы расщепления.

**Вопрос 3.** Содержание реферата по теме диссертационного исследования (с приложением реферата и отзыва на реферат с отметкой предполагаемого научного руководителя).

### V. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

#### ОСНОВНАЯ:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч. I,II,III Основы алгебры.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.
3. Александров П.С. Курс по аналитической геометрии и линейной алгебре.
4. Гельфанд И.И. Лекции по линейной алгебре.
5. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств.
6. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ.
7. Фихтенгольц Г.И. Основы математического анализа, тт. 1,2,3.
8. Рудин У.Л. Основы математического анализа.
9. Никольский С.М. Математический анализ.
10. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.
11. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
12. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
13. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
14. Привалов Н.Н. Введение в теорию функции комплексных переменных.
15. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций.
16. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ.
17. Рашевский П.К. Дифференциальная геометрия.
18. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия.
19. Гнеденко Б.В. Очерк по истории математики в России и СССР.

### **ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ:**

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.
2. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы.
3. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления.
4. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра.
5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем.
7. Тьртышников Е.Е. Методы численного анализа.

## **VI. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ**

Уровень знаний поступающих в аспирантуру МГУ оценивается по десятибалльной шкале. При отсутствии поступающего на вступительном экзамене в качестве оценки проставляется неявка. Результаты сдачи вступительных экзаменов сообщаются поступающим в течение трех дней со дня экзамена путем их размещения на сайте и информационном стенде структурного подразделения. Вступительное испытание считается пройденным, если абитуриент получил семь баллов и выше на бюджетную форму обучения и шесть баллов и выше на контрактную форму обучения.

*\*Все темы и вопросы должны быть не выше ФГОС ВО магистратуры и специалитета.*

## **VII. АВТОРЫ**

профессор, д.ф.м.н. Кобельков Г.М.

профессор, д.ф.м.н. Корнев А.А.

доцент, к.ф.м.н. Попов А.В.