Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»
Декан механико-математического факультета,
член- корр. РАН, профессор А.И. Шафаревич
____
«27» мая 2022 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

(для осуществления приема на обучение по образовательным программам высшего образования - программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре)

1. Естественные науки

1.1. Математика и механика

1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика

(Физико-математические науки)

Программа утверждена
Приказом по факультету
№ _ от _____________ 2022 г.
/
Ученым советом факультета
(протокол № 4 от 27 мая 2022 г.)

Москва - 2022

I. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Настоящая программа* по специальности *«1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика»* предназначена для осуществления приема по образовательным программам высшего образования - программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, содержит основные темы и вопросы к вступительному экзамену по специальности, список основной и дополнительной литературы и критерии оценивания.

II. ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ И ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

Общая часть.

1. Непрерывность функций, свойства непрерывных функций. Дифференцируемость.

2. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции.

3. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости.

4. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойство абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.

5. Ряды функций Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).

6. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости, свойства степенных рядов (почленное интегрирование, дифференцирование). Разложение элементарных функций.

7. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.

8. Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.

9. Линейные пространства, их подпространства. Базис. Размерность. Теорема о ранге матрицы. Система линейных уравнений. Теорема Кронекера - Капелли.

10. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.

11. Линейные преобразования линейного пространства, их задания матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями.

12. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Симметрические преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям.

13. Дифференциальное уравнение первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения.

14. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами: однородное и неоднородное.

15. Функции комплексного переменного. Условия Коши - Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

16. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.

17. Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты.

Специальная часть.

I. Основные понятия и аппарат теории вероятностей

1. Вероятностная модель $(\Omega,\mathcal{F},P)$ и аксиоматика Колмогорова. Свойства вероятностной меры P (счетная аддитивность, непрерывность сверху и снизу).

2. Алгебры и σ-алгебры $\mathcal{F}$ событий. Монотонные классы. Определения, свойства.

3. Функция распределения на прямой и построение вероятностной меры по ней, основанное на теореме Каратеодори.

4. Случайные величины и их математическое ожидание. Свойства, теоремы о монотонной сходимости и мажорируемой сходимости. Лемма Фату. Неравенства Чебышева, Коши-Буняковского, Иенсена, Ляпунова, Гельдера, Минковского.

5. Условные вероятности и условные математические ожидания относительно под-σ-алгебр. Регулярные условные вероятности. Формула Байеса (классическая и обобщенная).

6. Сходимости последовательности случайных величин по вероятности, с вероятностью единица, в среднем квадратическом. Их взаимоотношения.

7. Характеристические функции и их свойства. Формула обращения. Теорема непрерывности. Теорема Бохнера-Хинчина.

8. Моменты и семиинварианты. Критерий Карлемана единственности проблемы моментов (формулировка).

9. Нормальное распределение (одномерное и многомерное). Теорема о виде оптимальной оценки поднабора компонент гауссовского вектора по другим компонентам того же вектора.

10. Лемма Бореля-Кантелли.

II. Предельные теоремы

1. Закон больших чисел в схеме Бернулли. (Доказательства, основанные на формуле Стирлинга и неравенстве Чебышева).

2. Предельные теоремы для схемы Бернулли. (Интегральная Муавра-Лапласа, локальная и теорема Пуассона).

3. Закон больших чисел Хинчина для последовательности независимых одинаково распределенных величин, имеющих первый момент (доказательство методом характеристических функций).

4. Центральная предельная теорема для сумм независимых случайных величин в условиях Ляпунова и Линдеберга.

5. Закон «нуля или единицы» Колмогорова, Хьюитта и Сэвиджа.

6. Теорема Колмогорова и Хинчина о сходимости с вероятностью единица ряда из независимых случайных величин.

7. Усиленный закон больших чисел. Теорема Кантелли (с доказательством, основанным на лемме Бореля-Кантелли). Теорема Колмогорова для независимых одинаково распределенных величин с конечным первым моментом (идея доказательства).

8. Формулировка закона повторного логарифма (идея доказательства для случая суммы независимых одинаково распределенных, по нормальному закону, случайных величин).

III. Случайные процессы

1. Теорема Колмогорова о существовании вероятностного процесса с заданной системой конечномерных функций распределения.

2. Теорема Колмогорова об условиях существования непрерывной модификации.

3. Определение и простейшие свойства винеровского и пуассоновского процессов. Конструкции таких процессов (винеровский - через ряд по функциям Шаудера; эквивалентное определение пуассоновского процесса в терминах процесса восстановления).

4. Стационарные в узком смысле случайные последовательности. Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина.

5. Стационарные в широком смысле случайные последовательности. Спектральные представления для ковариационной функции и последовательности.

6. Марковские цепи. Марковское и строго марковское свойства.

7. Критерии возвратности и невозвратности. Простое случайное блуждание как марковская цепь (на конечномерных решетках). Возвратность и невозвратность.

8. Марковские процессы с непрерывным временем. Уравнение Колмогорова-Чепмена.

9. Прямые и обратные уравнения Колмогорова для диффузионных процессов.

10. Определение стохастического интеграла Ито по винеровскому процессу от адаптированных случайных процессов.

11. Формула Ито и формула Танака.

12. Стохастические дифференциальные уравнения. Существование и единственность (сильного) решения в условиях Липшица на коэффициенты.

13. Мартингалы, супермартингалы и субмартингалы. Основные неравенства и основные теоремы сходимости в случае дискретного времени (неравенство Дуба, теорема Дуба о сходимости субмартингала, теорема Леви).

IV. Математическая статистика

1. Вероятностно-статистическая модель. Типичные задачи математической статистики — определение неизвестной функции распределения по данным наблюдениям, оценка параметров распределения, проверка гипотез, линейная регрессия.

2. Эмпирические распределения. Теорема Гливенко-Кантелли.

3. Критерии согласия:

   a. критерий

   b. критерий Колмогорова

   c. критерий Смирнова.

4. Проверка статистических гипотез:

   a. проверка двух гипотез, ошибки первого и второго рода;

   a. лемма Неймана-Пирсона;

   b. проверка двух простых гипотез в нормальном случае;

   c. проверка двух простых гипотез методами последовательного анализа Вальда, оценки математических ожиданий длительности наблюдений через ошибки первого и второго рода.

5. Статистическое оценивание параметров распределения:

   a. достаточные и эффективные оценки; теорема Рао-Блэкуэлла;

   b. метод максимального правдоподобия; теорема Рао-Крамера;

   c. оценка параметров m и нормального распределения по n независимым нормальным наблюдениям.

6. Доверительные интервалы:

   a. для вероятности успеха в схеме Бернулли;

   b. для параметров нормального распределения.

7. Линейная регрессия. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса-Маркова.

Литература по разделам программы.

I. Основные понятия и аппарат теории вероятностей

1. – [1], [7], [10], [11].

2-5. – [2], [5], [10], [11].

6-10. – [1], [4], [7], [2], [10], [11].

II. Предельные теоремы

1-8. – [6], [10], [11], [2], [7].

III. Случайные процессы

1-6. – [5], [4], [10], [6], [8].

IV. Математическая статистика

1-7. – [3], [7], [9], [10], [11], [12], [8].

III. РЕФЕРАТ ПО ИЗБРАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ

Реферат по избранному направлению подготовки представляет собой обзор литературы по теме будущего научного исследования и позволяет понять основные задачи и перспективы развития темы будущей диссертационной работы. Реферат включает титульный лист, содержательную часть, выводы и список литературных источников. Объем реферата 10-15 страниц машинописного текста. В отзыве к реферату предполагаемый научный руководитель дает характеристику работы и рекомендуемую оценку, входящую в общий экзаменационный балл.

IV. ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА

Вопрос 1. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.

Вопрос 2. Пуассоновский процесс как процесс с независимыми приращениями, как счетная цепь Маркова и как процесс восстановления для экспоненциальных случайных величин.

Вопрос 3. Содержание реферата по теме диссертационного исследования (с приложением реферата и отзыва на реферат с отметкой предполагаемого научного руководителя).

V. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ:

[1] Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М., Наука, 1974.

[2] Боровков А.А. Теория вероятностей М., Наука, 1976.

[3] Боровков А.А. Математическая статистика. М., Наука, 1984.

[4] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М., Физматлит, 2005.

[5] Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М., Наука, 1975.

[6] Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М., Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.

[7] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., Наука,1988.

[8] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы. М., Мир, 1969.

[9] Ширяев А.Н. Вероятность, статистика, случайные процессы. I, II, МГУ, 1973, 1974.

[10] Ширяев А.Н. Вероятность. I, II, М., Изд-во МЦНМО, 2011.

[11] Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. Изд. 4, стереотип. URSS. 2021.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ:

[12] Магнус Я., Катышев П., Пересецкий А.   Эконометрика. М., Дело, 2004.

[13] Феллер В.   Введение в теорию вероятностей. 1,2. М., Мир, 1967.

V. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Уровень знаний поступающих в аспирантуру МГУ оценивается по десятибалльной шкале. При отсутствии поступающего на вступительном экзамене в качестве оценки проставляется неявка. Результаты сдачи вступительных экзаменов сообщаются поступающим в течение трех дней со дня экзамена путем их размещения на сайте и информационном стенде структурного подразделения. Вступительное испытание считается пройденным, если абитуриент получил семь баллов и выше (бюджетное место) / шесть баллов и выше (контрактное обучение).

**Все темы и вопросы должны быть не выше ФГОС ВО магистратуры и специалитета.*

VI. Согласование Программы

1. Кафедра теории вероятностей (зав. кафедрой – академик РАН А.Н. Ширяев).
2. Кафедра математической статистики и случайных процессов (зав. кафедрой – профессор А.М. Зубков).