Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»

Декан механико-математического факультета,
член- корр. РАН, профессор А.И. Шафаревич

____

«27» мая 2022 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

(для осуществления приема на обучение по образовательным программам высшего образования - программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре)

1. Естественные науки

1.1. Математика и механика

1.1.3 Геометрия и топология

(Физико-математические науки)

Программа утверждена
Приказом по факультету
№ _ от ______________ 2022 г.
/
Ученым советом факультета
(протокол № 4 от 27 мая 2022 г.)

Москва - 2022

I. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Настоящая программа* по специальности *«1.1.3 Геометрия и топология»* предназначена для осуществления приема по образовательным программам высшего образования - программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, содержит основные темы и вопросы к вступительному экзамену по специальности, список основной и дополнительной литературы и критерии оценивания.

II. ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ И ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ:

1. Непрерывность функций одной переменной, свойства непрерывных функций.
2. Функции многих переменных, полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.
3. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции.
4. Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.
5. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости.
6. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойство абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.
7. Ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).
8. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости, свойства степенных рядов (почленное интегрирование, дифференцирование). Разложение элементарных функций.
9. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.
10. Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.
11. Линейные пространства, их подпространства. Базис. Размерность. Теорема о ранге матрицы. Система линейных уравнений. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы однородных линейных уравнений. Теорема Кронекера - Капелли.
12. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.
13. Линейные преобразования линейного пространства, их задание матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями.
14. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Симметрические преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям.
15. Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Порядок элемента. Циклические группы. Нормальная подгруппа, факторгруппа. Теорема о гомоморфизме.
16. Кольца, делители нуля, область целостности. Поле, характеристика поля, конечная коммутативная область целостности — поле.
17. Дифференциальное уравнение первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения.
18. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Линейное однородное уравне-

ние. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Линейное неоднородное уравнение.

19. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами: однородное и неоднородное.
20. Функции комплексного переменного. Условия Коши - Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
21. Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования.
22. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.
23. Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Кривые в трехмерном пространстве. Формулы Френе. Восстановление кривой по кривизне и кручению.
2. Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности.
3. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера.
4. Ковариантное дифференцирование на поверхностях в евклидовом пространстве. Символы Кристоффеля. Деривационные формулы. Формулы Гаусса и Петерсона-Кодацци. Теорема Гаусса. Восстановление поверхности по паре квадратичных форм.
5. Понятие многообразия, вложения, погружения, многообразия с краем. Разбиение единицы, реализация компактных многообразий поверхностями в евклидовом пространстве. Теорема Уитни.
6. Классификация двумерных многообразий.
7. Тензорные поля на многообразиях и операции над ними. Дифференциальные формы. Дивергенция и ротор векторного поля.
8. Аффинные связности на многообразиях. Ковариантное дифференцирование. Параллельный перенос и геодезические. Римановы связности. Тензор кривизны.
9. Экспоненциальное отображение. Лемма Гаусса. Локальная минимальность геодезических линий. Кривизна двумерных многообразий. Скалярная и гауссова кривизны поверхности.
10. Уравнение Эйлера-Лагранжа, примеры для функционала длины и площади. Геодезические как экстремали.
11. Теорема Стокса (для многообразий).
12. Гомотопные отображения и гомотопически эквивалентные многообразия. Когомологии де Рама, их гомотопическая инвариантность. Группы когомологий двумерной сферы и n-мерного тора. Лемма Пуанкаре.
13. Степень отображения и ее гомотопическая инвариантность. Приложения степень (теорема Брауэра, теорема об отсутствии векторного поля без особых точек на двумерной сфере). Степень и интеграл. Индекс особой точки векторного поля.
14. Алгебры Ли, основные матричные алгебры Ли, классификация трехмерных алгебр Ли.
15. Группа Ли и ее алгебра Ли. Группа ортогональных матриц и ее алгебра Ли.
16. Компактное топологическое пространство. Компактность замкнутого подмножества компактного пространства и непрерывного образа компакта. Компактность в евклидовом пространстве. Существование наибольшего и наименьшего значений непрерывной на компакте функции.
17. Произведение топологических пространств. Теорема Тихонова о произведении компактных пространств.
18. Метрические пространства и топология, порождаемая метрикой. Метризуемые топологи-

ческие пространства.
19. Связность и линейная связность. Образ связного пространства при непрерывном отображении.
20. Аксиомы отделимости. Хаусдорфовы пространства. Регулярные пространства. Нормальные пространства. Пример регулярного ненормального пространства. Единственность предела последовательности в хаусдорфовом пространстве.
21. Первая и вторая аксиомы счетности, взаимоотношения между ними. Сепарабельность. В метрическом пространстве вторая аксиома счетности равносильна сепарабельности.
22. Функциональная отделимость. Лемма Урысона и теорема Титце о продолжении.
23. Локальная компактность и одноточечная компактификация. Паракомпактные пространства.
24. Аксиомы отделимости в метрических пространствах. Пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, метризуемо в том и только в том случае, если оно регулярно.

III. РЕФЕРАТ ПО ИЗБРАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ

Реферат по избранному направлению подготовки представляет собой обзор литературы по теме будущего научного исследования и позволяет понять основные задачи и перспективы развития темы будущей диссертационной работы. Реферат включает титульный лист, содержательную часть, выводы и список литературных источников. Объем реферата 10-15 страниц машинописного текста. В отзыве к реферату предполагаемый научный руководитель дает характеристику работы и рекомендуемую оценку, входящую в общий экзаменационный балл.

IV. ПРИМЕРЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

1.

Вопрос 1. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Симметрические преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Вопрос 2. Степень отображения и ее гомотопическая инвариантность. Приложения степень (теорема Брауэра, теорема об отсутствии векторного поля без особых точек на двумерной сфере). Степень и интеграл. Индекс особой точки векторного поля.

Вопрос 3. Содержание реферата по теме диссертационного исследования (с приложением реферата и отзыва на реферат с отметкой предполагаемого научного руководителя).

2.

Вопрос 1. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.

Вопрос 2. Ковариантное дифференцирование на поверхностях в евклидовом пространстве. Символы Кристоффеля. Деривационные формулы. Формулы Гаусса и Петерсона-Кодацци. Теорема Гаусса. Восстановление поверхности по паре квадратичных форм.

Вопрос 3. Содержание реферата по теме диссертационного исследования (с приложением реферата и отзыва на реферат с отметкой предполагаемого научного руководителя).

3.

Вопрос 1. Линейные преобразования линейного пространства, их задание матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями.

Вопрос 2. Функциональная отделимость. Лемма Урысона. Теорема Титце.

Вопрос 3. Содержание реферата по теме диссертационного исследования (с приложением реферата и отзыва на реферат с отметкой предполагаемого научного руководителя).

V. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ:

1. Б.А. Дубровин, СП. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная Геометрия. УРСС, 2001
2. А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. «Курс дифференциальной геометрии и топологии». 4-е переработанное издание М., Ленанд, 2020.
3. П.К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967
4. Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Основы дифференциальной геометрии, в 2 т. М.: Наука, 1981.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ:

1. П.С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию. Москва, Наука, 1977
2. О.Я. Виро, О.А. Иванов, Н.Ю. Нецветаев, В.М. Харламов. Элементарная топология. Москва, МЦНМО, 2010.
3. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия. Часть 3 (Методы теории гомологий). Москва, Наука, 1984.
4. А.Т.Фоменко. «Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы» - В серии «Классический учебник МГУ». Издание третье, исправленное и дополненное. Москва, изд-во Ленанд, URSS, 2019.
5. У.Масси, Дж.Столлингс. Алгебраическая топология. Введение. Москва, Мир, 1977.
6. С.П. Новиков, И.А.Тайманов. Современные геометрические структуры и поля. Москва, МЦНМО, 2005.
7. Ф.Уорнер. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. Москва, Мир, 1987.
8. А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. Москва, Наука, 1989.
9. А. Хатчер. Алгебраическая топология. Москва, МЦНМО, 2011.

V. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Уровень знаний поступающих в аспирантуру МГУ оценивается по десятибалльной шкале. При отсутствии поступающего на вступительном экзамене в качестве оценки проставляется неявка. Результаты сдачи вступительных экзаменов сообщаются поступающим в течение трех дней со дня экзамена путем их размещения на сайте и информационном стенде структурного подразделения. Вступительное испытание считается пройденным, если абитуриент получил семь баллов и выше на бюджет и 6 баллов и выше на контракт.

**Все темы и вопросы должны быть не выше ФГОС ВО магистратуры и специалитета.*

VI. АВТОРЫ

1. Академик РАН А.Т.Фоменко
2. Профессор Ю.В.Садовничий
3. Профессор Д.В.Миллионщиков
4. Профессор А.О.Иванов
5. Профессор А.А.Ошемков