

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»

Декан механико-математического факультета,
член- корр. РАН, профессор А.И. Шафаревич



«27» мая 2022 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

(для осуществления приема на обучение по образовательным программам высшего образования - программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре)

1. Естественные науки

1.1. Математика и механика

1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика

(Физико-математические науки)

Программа утверждена
Приказом по факультету
№ ___ от _____ 2022 г.

Ученым советом факультета
(протокол № 4 от 27 мая 2022 г.)

І. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Настоящая программа* по специальности «1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика» предназначена для осуществления приема по образовательным программам высшего образования □ программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, содержит основные темы и вопросы к вступительному экзамену по специальности, список основной и дополнительной литературы и критерии оценивания.

ІІ. ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ И ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ:

1. Непрерывность функций одной переменной, свойства непрерывных функций.
2. Функции многих переменных, полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.
3. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции.
4. Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.
5. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости.
6. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойство абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.
7. Ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).
8. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости, свойства степенных рядов (почленное интегрирование, дифференцирование). Разложение элементарных функций.
9. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.
10. Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.
11. Теоремы Остроградского и Стокса. Дивергенция. Вихрь.
12. Линейные пространства, их подпространства. Базис. Размерность. Теорема о ранге матрицы. Система линейных уравнений. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы однородных линейных уравнений. Теорема Кронекера - Капелли.
13. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.
14. Линейные преобразования линейного пространства, их задание матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями.
15. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Симметрические преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям.
16. Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Порядок элемента. Циклические группы, факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах.
17. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка. Проективная классификация кривых.
18. Дифференциальное уравнение первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения.
19. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Линейное неоднородное уравнение.
20. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами: однородное и неоднородное.

21. Функции комплексного переменного. Условия Коши - Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
22. Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования.
23. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.
24. Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты.
25. Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности.
26. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье.
27. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о продолжении решения. Случай линейных систем.
2. Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений по начальным условиям и по параметру. Системы в вариациях.
3. Линейные системы. Определитель Вронского. Формула Лиувилля-Остроградского. Метод вариации постоянных.
4. Экспонента линейного оператора. Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами. Уравнения с квазимногочленом в правой части.
5. Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость. Теорема об устойчивости по первому приближению.
6. Автономные системы. Три типа фазовых траекторий. Особые точки линейных систем на плоскости.
7. Обмотка тора. Эргодическая теорема для поворотов окружности.
8. Теорема о выпрямлении векторного поля. Первые интегралы. Теорема о существовании полной системы первых интегралов.
9. Квазилинейные уравнения с частными производными 1-го порядка: общее решение, задача Коши.
10. Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями. Фундаментальные решения операторов с постоянными коэффициентами.
11. Задача Коши для волнового уравнения: энергетическое неравенство, единственность решения.
12. Формулы Кирхгофа и Пуассона для волнового уравнения. Качественное исследование задачи Коши для волнового уравнения.
13. Смешанная задача для волнового уравнения: единственность решения, метод Фурье (его обоснование в случае одной пространственной переменной).
14. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Функция Грина для задачи Дирихле и ее свойства. Функция Грина для шара. Решение задачи Дирихле для шара.
15. Свойства гармонических функций: теорема о среднем, принцип максимума, теорема Лиувилля, теорема об устранимой особенности.
16. Задачи Дирихле и Неймана: единственность решения, условие разрешимости задачи Неймана, сведение внешних задач к внутренним.
17. Уравнение теплопроводности. Первая краевая задача: принцип максимума, единственность решения, метод Фурье. Задача Коши: принцип максимума для слоя, интеграл Пуассона.

III. РЕФЕРАТ ПО ИЗБРАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ

Реферат по избранному направлению подготовки представляет собой обзор литературы по теме будущего научного исследования и позволяет понять основные задачи и перспективы развития темы будущей диссертационной работы. Реферат включает титульный лист, содержательную часть, выводы и список литературных источников. Объем реферата 10-15 страниц машинописного текста. В отзыве к реферату предполагаемый научный руководитель дает характеристику работы и рекомендуемую оценку, входящую в общий экзаменационный балл.

IV. ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА

Вопрос 1. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.

Вопрос 2. Задача Коши для волнового уравнения: энергетическое неравенство, единственность решения.

Вопрос 3. Содержание реферата по теме диссертационного исследования (с приложением реферата и отзыва на реферат с отметкой предполагаемого научного руководителя).

V. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч. I. Основы алгебры. М.: Физматлит, 2004.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч. II. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2004.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч. III. Основные структуры алгебры. М.: Физматлит, 2004.
4. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. СПб: Лань, 2009.
5. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Добросвет, МЦНМО, 1998.
6. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.1, 2. М.: Изд-во МЦНМО, 2012.
7. Рудин У.Л. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
8. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Эдиториал УРСС, 2008.
9. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Удм.ГУ, 2000.
10. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: КомКнига, 2007.
11. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В., Методы теории функций комплексного переменного, М.: Наука, 1973.
12. Рашевский П.К. Дифференциальная геометрия. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
13. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004.
14. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Бином, Лаборатория знаний, 2009.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ:

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965.
2. Никольский С.М. Математический анализ. М.: Наука, 1983.
3. Фихтенгольц Г.И. Основы математического анализа, тт. 1,2,3. СПб: Лань, 2015.
4. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств. М.: Гостехиздат, 1956.
5. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. тт. 1,2,3. М.: Юрайт-Издат, 2012.
6. Михайлов В.П. Лекции по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
8. Привалов Н.Н. Введение в теорию функции комплексных переменных. М.: Наука, 1984.
9. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.1. М.: Наука, 1976.
10. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
11. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 2009.
12. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
13. Сергеев И.Н. Дифференциальные уравнения. М.: Академия, 2013.
14. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. М.: Изд-во МЦНМО, 2001.

V. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Уровень знаний поступающих в аспирантуру МГУ оценивается по десятибалльной шкале. При отсутствии поступающего на вступительном экзамене в качестве оценки проставляется неявка.

Результаты сдачи вступительных экзаменов сообщаются поступающим в течение трех дней со дня экзамена путем их размещения на сайте и информационном стенде структурного подразделения. Вступительное испытание считается пройденным, если кандидат получил семь баллов и выше на бюджетную форму обучения и шесть баллов на контрактную форму обучения.

**Все темы и вопросы должны быть не выше ФГОС ВО магистратуры и специалитета.*

VI. АВТОРЫ

1. Профессор, д.ф.-м.н. Асташова И.В.
2. Доцент, к.ф.-м.н. Быков В.В.
3. Доцент, к.ф.-м.н. Горицкий А.Ю.
4. Профессор, д.ф.-м.н. Сергеев И.В.
5. Профессор, д.ф.-м.н. Филиновский А.В.
6. Профессор, д.ф.-м.н. Шапошникова Т.А.