УДК 517.938

О типичном свойстве векторных подпространств, определяемых показателями Ляпунова

Миллионщиков В. М.

§ 1. Формулировки результатов

1. Пусть на полном метрическом пространстве $\mathfrak{B}$ задана динамическая система (т. е. непрерывное действие группы $\mathbf{R}$) f^t. Фиксируем в $\mathbf{R}^n$ евклидову структуру. Множество S непрерывных ограниченных отображений $A(\cdot):\mathfrak{B}\to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n)$ наделяется топологией равномерной сходимости.

При всяких $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$ рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}.$$

Пусть $\lambda_1(A,\ x)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(A,\ x)$ — показатели Ляпунова этой системы (см. [1]; по теории показателей Ляпунова имеются также книга [2] и обзор [3]).

Обозначив через $E_k(A,\ x)$ векторное пространство начальных значений решений системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$, показатели Ляпунова которых $\leqslant\lambda_{n-k+1}(A,\ x)$, получаем при всяком $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ отображение E_k пространства $S\times\mathfrak{B}$ в несвязное объединение грассмановых многообразий $\bigcup\limits_{s=1}^{n} G_s(\mathbf{R}^n)$.

Т е о р е м а 1. В *пространстве* $S\times\mathfrak{B}$ *имеется всюду плотное множество* $\mathcal{D}$ *типа* G_δ *такое, что при всяком* $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$ *отображение* $E_k: S\times\mathfrak{B}\to\bigcup\limits_{s=1}^{n} G_s(\mathbf{R}^n)$ *непрерывно во всякой точке* $(A,\ x)\in\mathcal{D}$ *такой, что* $E_k(A,\ x)\neq E_{k+1}(A,\ x)$.

Заметим, что векторные подпространства $E_k(A,\ x)$ пространства $\mathbf{R}^n$ можно определить несколько иначе — так сказать, более непосредственно, не предполагая знания определения показателей Ляпунова линейной системы дифференциальных уравнений. Это определение дается следующим образом.

Пусть даны $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$. Для всякого $\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n$ показатель Ляпунова $\lambda(A,\ x;\ \mathfrak{x})$ определяется формулой

$$\lambda(A,\ x;\ \mathfrak{x}) = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|\mathfrak{x}(t)|, \tag{1}$$

где $\mathfrak{x}(\cdot)$ — решение системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$, удовлетворяющее начальному условию $\mathfrak{x}(0)=\mathfrak{x}$; при этом считаем, что $\ln 0 = -\infty$ и потому $\lambda(A,\ x;\ 0) = -\infty$. Из ограниченности отображения $A(\cdot):\mathfrak{B}\to\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n)$ в силу леммы Гронуолла следует, что для всякого $\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n_* = \mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ показатель Ляпунова $\lambda(A,\ x;\ \mathfrak{x})$ есть число.

Для всяких $\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n$, $\mathfrak{y}\in\mathbf{R}^n$, $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}$ имеет место неравенство

$$\begin{gathered}\lambda(A,\ x;\ \alpha\mathfrak{x}+\beta\mathfrak{y})\leqslant\\ \leqslant\max\{\lambda(A,\ x;\ \mathfrak{x}),\ \lambda(A,\ x;\ \mathfrak{y})\}.\end{gathered} \tag{2}$$

В самом деле, обозначив через $\mathfrak{x}(\cdot)$, $\mathfrak{y}(\cdot)$ решения системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$, удовлетворяющие начальным условиям $\mathfrak{x}(0)=\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}(0)=\mathfrak{y}$, имеем

$$\lambda(A,\ x;\ \alpha\mathfrak{x}+\beta\mathfrak{y}) = \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln|\alpha\mathfrak{x}(t)+\beta\mathfrak{y}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln(|\alpha||\mathfrak{x}(t)|+|\beta||\mathfrak{y}(t)|) \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\{(|\alpha|+|\beta|)\max\{|\mathfrak{x}(t)|,\ |\mathfrak{y}(t)|\}\} =$$
$$= \varlimsup_{t\to+\infty}\left\{\frac{1}{t}\ln(|\alpha|+|\beta|)+\frac{1}{t}\ln\max\{|\mathfrak{x}(t)|,\ |\mathfrak{y}(t)|\}\right\}.$$

Если $\alpha=\beta=0$, то левая часть неравенства (2) равна $-\infty$, и доказывать нечего. Если хоть одно из чисел α, β отлично от нуля, то $|\alpha|+|\beta|>0$ и, следовательно,
$$\frac{1}{t}\ln(|\alpha|+|\beta|)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0,$$
вследствие чего последнее выражение в написанной выше цепочке равно
$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\max\{|\mathfrak{x}(t)|,|\mathfrak{y}(t)|\},$$
что, в свою очередь, равно
$$\varlimsup_{t\to+\infty}\max\left\{\frac{1}{t}\ln|\mathfrak{x}(t)|,\ \frac{1}{t}\ln|\mathfrak{y}(t)|\right\} =$$
$$= \max\left\{\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln|\mathfrak{x}(t)|,\ \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln|\mathfrak{y}(t)|\right\} = \max\{\lambda(A,\ x;\ \mathfrak{x}),\ \lambda(A,\ x;\ \mathfrak{y})\}.$$
Тем самым неравенство (2) доказано.

Из неравенства (2) следует, что для всякого $\lambda\in\mathbf{R}$ множество
$$E(A,\ x,\ \lambda) = \{\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n\colon \lambda(A,\ x,\ \mathfrak{x})\leqslant\lambda\}$$
есть векторное подпространство в $\mathbf{R}^n$. Из определения $E(A,x,\lambda)$ следует, что $E(A,\ x,\ \lambda)\subset E(A,\ x,\ \mu)$ для всяких $\lambda\in\mathbf{R}$, $\mu\in\mathbf{R}$ таких, что $\lambda\leqslant\mu$. Поэтому среди векторных подпространств $E(A,\ x,\ \lambda)$ (при фиксированных A, x) имеется не более $n+1$ различных. Из ограниченности отображения $A(\cdot)\colon\mathcal{B}\to\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n)$ в силу леммы Гронуолла следует, как отмечено выше, что для всякого $\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n_*$ показатель Ляпунова $\lambda(A,\ x,\ \mathfrak{x})$ есть число. Следовательно, найдутся действительные числа $\mu_0<\mu_1<\ldots<\mu_m$ такие, что $m\leqslant n$,
$$\{0\} = E(A,\ x,\ \mu_0)\subset E(A,\ x,\ \mu_1)\subset\ldots\subset(A,\ x,\ \mu_m) = \mathbf{R}^n$$
(включения строгие) и такие, что для всякого $\lambda\in\mathbf{R}$ векторное пространство $E(A,\ x,\ \lambda)$ совпадает с одним из пространств $E(A,\ x,\ \mu_s)$ ($s\in\{0,\ \ldots,\ m\}$).

Положим
$$E_k(A,\ x) = E(A,\ x,\ \mu_s) \tag{3}$$
при $\dim E(A,\ x,\ \mu_{s-1})<k\leqslant\dim E(A,\ x,\ \mu_s)$ ($s\in\{0,\ \ldots,\ m\}$). Это и есть другое определение векторных пространств $E_k(A,\ x)$. Ниже в § 2 доказана эквивалентность двух этих определений в более общей ситуации; почему рассматриваемая сейчас ситуация является частным случаем ситуации § 2, объяснено в доказательстве теоремы 1, изложенном в § 4. А показатели Ляпунова системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$ можно определить так:
$$\lambda_{n-k+1}(A,\ x) = \sup_{\mathfrak{x}\in E_k(A,\ x)}\lambda(A,\ x,\ \mathfrak{x}) \qquad (k\in\{1,\ \ldots,\ n\}).$$

2. Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие класса C^3. Через $\tilde{T}V^n$ обозначается топологическое пространство векторных подпространств касательных пространств многообразия V^n.

Через S обозначается множество диффеоморфизмов f класса C^1 отображающих V^n на себя и удовлетворяющих условию

$$\sup_{x\in V^n}\max\{\| df_x \|,\ \| (df_x)^{-1} \|\} < +\infty. \tag{4}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом (как максимум нормы образа нормированного вектора) через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой.

Для всяких $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$, $f\in S$, $x\in V^n$ положим

$$\lambda_{n-k+1}(f,\ x) = \inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(T_xV^n)}\ \sup_{\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^k}\lambda(f,\ \mathfrak{x}), \tag{5}$$

где

$$\lambda(f,\ \mathfrak{x}) = \overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln|df^m\mathfrak{x}| \tag{6}$$

(полагаем $\ln 0 = -\infty$), $G_k(T_xV^n)$ — множество k-мерных векторных подпространств касательного пространства T_xV^n многообразия V^n в точке x.

Далее, для всяких $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$, $f\in S$, $x\in V^n$ положим

$$E_k(f,\ x) = \{\mathfrak{x}\in T_xV^n\colon \lambda(f,\ \mathfrak{x})\leqslant\lambda_{n-k+1}(f,\ x)\}. \tag{7}$$

Для всякого $j\in S$ через S_j обозначается множество диффеоморфизмов $f\in S$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x\in V^n}\rho(fx,\ jx) < +\infty.$$

В S_j вводится расстояние

$$\tilde{d}_1(f,\ g) = \sup_{x\in V^n}\ \inf_{u\in G(fx,\ gx)}\{s(u)+\|\varphi_u dg_x - df_x\|\}, \tag{8}$$

где $G(y,\ z)$ — множество кусочно-гладких путей u, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y, $s(u)$ — длина пути u, φ_u — параллельный перенос вдоль пути u.

Т е о р е м а 2. *При всяком* $j\in S$ *в пространстве* $S_j\times V^n$ *имеется всюду плотное множество* $\mathcal{D}_j$ *типа* G_δ *такое, что при всяком* $k\in\{1,\ \dots,\ n-1\}$ *отображение* $E_k: S_j\times V^n\to\tilde{T}V^n$ *непрерывно во всякой точке* $(f,\ x)\in\mathcal{D}_j$ *такой, что* $E_k(f,\ x)\neq E_{k+1}(f,\ x)$.

Заметим, что множество $E_k(f,\ x)$ можно определить и так (эквивалентность этого определения и определения, приведенного выше, доказана в § 2; точнее, эквивалентность, о которой идет речь сейчас, — частный случай той, которая доказана в § 2, как объяснено в доказательстве теоремы 2, изложенном в § 4). Пусть даны $f\in S$, $x\in V^n$. Для всякого $\mathfrak{x}\in T_xV^n$ показатель Ляпунова $\lambda(f,\ \mathfrak{x})$ определяется формулой

$$\lambda(f,\ \mathfrak{x}) = \overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln|df^m\mathfrak{x}|; \tag{9}$$

при этом считаем, что $\ln 0 = -\infty$ и потому $\lambda(f,\ 0_x) = -\infty$, где 0_x — нулевой вектор касательного пространства T_xV^n. Для всяких $\mathfrak{x}\in T_xV^n$, $\mathfrak{y}\in T_xV^n$, $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}$ имеет место неравенство

$$\lambda(f,\ \alpha\mathfrak{x}+\beta\mathfrak{y})\leqslant\max\{\lambda(f,\ \mathfrak{x}),\ \lambda(f,\ \mathfrak{y})\}. \tag{10}$$

В самом деле, если $\alpha=\beta=0$, то неравенство (10) верно, так как его левая часть равна $-\infty$, а если хоть одно из двух чисел α, β не равно нулю, то

$$\lambda(f,\ \alpha\mathfrak{x}+\beta\mathfrak{y})=\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln|df^m(\alpha\mathfrak{x}+\beta\mathfrak{y})|=\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln|\alpha df^m\mathfrak{x}+\beta df^m\mathfrak{y}|\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln(|\alpha||df^m\mathfrak{x}|+|\beta||df^m\mathfrak{y}|)\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\{(|\alpha|+|\beta|)\max\{|df^m\mathfrak{x}|,\ |df^m\mathfrak{y}|\}\}=$$

$$=\overline{\lim_{m\to+\infty}}\left\{\frac{1}{m}\ln(|\alpha|+|\beta|)+\frac{1}{m}\ln\max\{|df^m\mathfrak{x}|,\ |df^m\mathfrak{y}|\}\right\}=$$

$$=\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\max\{|df^m\mathfrak{x}|,\ |df^m\mathfrak{y}|\}=\overline{\lim_{m\to+\infty}}\max\left\{\frac{1}{m}\ln|df^m\mathfrak{x}|,\ \frac{1}{m}\ln|df^m\mathfrak{y}|\right\}=$$

$$=\max\left\{\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln|df^m\mathfrak{y}|,\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln|df^m\mathfrak{y}|\right\}=\max\{\lambda(f,\ \mathfrak{x}),\ \lambda(f,\ \mathfrak{y})\}.$$

Неравенство (10) доказано.

Из неравенства (10) следует, что для всякого $\lambda\in\mathbf{R}$ множество

$$E(f,\ x,\ \lambda)=\{\mathfrak{x}\in T_xV^n\colon \lambda(f,\ \mathfrak{x})\leqslant\lambda\}$$

есть векторное подпространство касательного пространства T_xV^n. Из определения $E(f,\ x,\ \lambda)$ следует, что $E(f,\ x,\ \lambda)\subset E(f,\ x,\ \mu)$ для всяких $\lambda\in\mathbf{R}$, $\mu\in\mathbf{R}$ таких, что $\lambda\leqslant\mu$. Поэтому среди векторных подпространств $E(f,\ x,\ \lambda)$ касательного пространства T_xV^n имеется не более $n+1$ различных. Из условия (4), которому удовлетворяет $f\in S$, следует, что для всякого ненулевого вектора $\mathfrak{x}\in TV^n$ (т. е. для $\mathfrak{x}\in TV^n$ такого, что $\mathfrak{x}\neq 0_{\pi_\mathfrak{x}}$, где 0_x — нуль касательного пространства T_xV^n) показатель Ляпунова $\lambda(f,\ \mathfrak{x})$ есть число. Следовательно, найдутся действительные числа $\mu_0<\mu_1<\ldots<\mu_m$ ($m\leqslant n$) такие, что

$$\{0_x\}=E(f,\ x,\ \mu_0)\subset E(f,\ x,\ \mu_1)\subset\ldots\subset(f,\ x,\ \mu_m)=T_xV^n$$

(включения строгие) и такие, что для всякого $\lambda\in\mathbf{R}$ векторное подпространство $E(f,\ x,\ \lambda)$ совпадает с одним из пространств $E(f,\ x,\ \mu_s)$ ($s\in\{0,\ \ldots,\ m\}$).

Положим

$$E_k(f,\ x)=E(f,\ x,\ \mu_s) \tag{11}$$

при $\dim E(f,\ x,\ \mu_{s-1})<k\leqslant\dim E(f,\ x,\ \mu_s)$ ($s\in\{1,\ \ldots,\ m\}$).

Опираясь на это определение подпространств $E_k(f,\ x)$ касательного пространства T_xV^n, можно, в свою очередь, показатели Ляпунова $\lambda_k(f,\ x)$ определить формулой

$$\lambda_{n-k+1}(f,\ x)=\sup_{\mathfrak{x}\in E_k(f,\ x)}\lambda(f,\ \mathfrak{x})\quad(k\in\{1,\ \ldots,\ n\}). \tag{12}$$

3. Теорема, сформулированная в предыдущем пункте, может быть сформулирована существенно короче, если многообразие V^n компактно. В этом пункте мы приведем эту формулировку, но сначала опишем исходные объекты.

Пусть V^n — компактное n-мерное дифференцируемое многообразие класса C^3. Обозначим через S множество всех диффеоморфизмов V^n на себя класса C^1, наделенное C^1-топологией.

Взяв любую риманову метрику $\delta(\cdot,\ \cdot)$ класса C^2 на V^n, определим $E_k(f,\ x)$ для всяких $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $f\in S$, $x\in V^n$ с помощью любого из двух определений, приведенных в п. 2. Фигурирующая в определении показателя Ляпунова $\lambda(f,\ \mathfrak{x})$ норма $|\cdot|$ в касательных пространствах определена через риманову метрику $\delta(\cdot, \cdot)$ по формуле $|\mathfrak{x}|=[\delta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})]^{\frac{1}{2}}$ и зависит, конечно, от римановой метрики $\delta(\cdot, \cdot)$, но $\lambda(f, \mathfrak{x})$, а следовательно, и $\lambda_k(f, x)$, $E_k(f, x)$, определенные в п. 2, в случае компактного V^n от выбора римановой метрики $\delta(\cdot, \cdot)$ на V^n не зависят, так как вследствие компактности многообразия V^n всякие две римановы метрики $\delta_1(\cdot, \cdot)$ и $\delta_2(\cdot, \cdot)$ на V^n эквивалентны в том смысле, что отношение $\delta_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})[\delta_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})]^{-1}$ заключено между двумя положительными числами, не зависящими от касательного вектора $\mathfrak{x} \in TV^n$. Поэтому излагаемая ниже теорема 3 дифференциально-топологически инвариантна.

Т е о р е м а 3. *Пусть V^n — компактное n-мерное дифференцируемое многообразие класса C^3. Тогда в пространстве $S \times V^n$, где S — множество всех диффеоморфизмов V^n на V^n, наделенное C^1-топологией, имеется всюду плотное множество $\mathcal{D}$ типа G_δ такое, что при всяком $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ отображение $E_k : S \times V^n \to \tilde{T}V^n$ непрерывно во всякой точке $(f, x) \in \mathcal{D}$ такой, что $E_k(f, x) \neq E_{k+1}(f, x)$.*

Теоремы 1 и 2 будут доказаны ниже в § 4, а здесь мы приведем вывод теоремы 3 из теоремы 2.

Фиксируем на V^n произвольную риманову метрику класса C^2. В силу компактности многообразия V^n для всякого диффеоморфизма f класса C^1, отображающего V^n на V^n, выполнено неравенство

$$\sup_{x \in V^n} \max\{\| df_x \|, \ \| df_x \|\} < +\infty.$$

Из простейших свойств параллельного переноса следует, что метрика, определенная на S формулой (8), индуцирует C^1-топологию на S (заметим, что для компактного многообразия V^n всякого $j \in S$ множество S_j совпадает со всем S). Поэтому теорема 3 есть частный случай теоремы 2.

§ 2. Показатели Ляпунова и определяемые ими векторные подпространства

1. Пусть (E, p, B) — метризованное векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$ и базой B (B — полное метрическое пространство, расстояние в котором обозначается через $d_B(\cdot, \cdot)$). Риманову метрику на (E, p, B) обозначаем через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Пусть $\mathbf{G}$ есть группа $\mathbf{R}$ или группа $\mathbf{Z}$ и пусть $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$, где через $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$ обозначается множество гомоморфизмов группы $\mathbf{G}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения (E, p, B), обозначаемую через $\mathrm{Aut}\,(E, p, B)$. Напомним, что образом $\mathfrak{H}t$ точки $t \in \mathbf{G}$ при гомоморфизме $\mathfrak{H}$ является пара (X^t, χ^t), где X^t — гомеоморфизм E на E, χ^t — гомеоморфизм B на B, причем: а) $pX^t = \chi^t p$ при всяком $t \in \mathbf{G}$, б) при всяких $t \in \mathbf{G}$, $b \in B$ сужение $X^t[b]$ отображения X^t на слой $p^{-1}(b)$ есть линейное отображение $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^t b)$, в) $X^{t+s} = X^t X^s$, при $\chi^{t+s} = \chi^t \chi^s$ всяких $t \in \mathbf{G}$, $s \in \mathbf{G}$.

2. Для всякого $\xi \in E$ показатель Ляпунова $\lambda(\mathfrak{H}, \xi)$ определяется формулой

$$\lambda(\mathfrak{H}, \xi) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |X^t \xi|; \tag{1}$$

$\ln 0$ полагаем равным $-\infty$, в выражении $t \to +\infty$ имеется в виду, что $t \in \mathbf{G}$, норма вектора $\eta \in E$ определяется через риманову метрику формулой $|\eta| = \langle \eta, \eta \rangle^{\frac{1}{2}}$.

В частности, для нулевого вектора $\xi \in E$ (т. е. для $\xi = 0_{p\xi}$, где 0_b — нуль векторного пространства $p^{-1}(b)$) показатель Ляпунова $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)$ равен $-\infty$.

Л е м м а 1. *Для всяких* $\xi \in E$, $\eta \in E$ *таких, что* $p\xi = p\eta$, *для всяких* $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$ *имеет место неравенство*

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \alpha\xi + \beta\eta) \leqslant \max\{\lambda(\mathfrak{H},\ \xi),\ \lambda(\mathfrak{H},\ \eta)\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть даны $\xi \in E$, $\eta \in E$ такие, что $p\xi = p\eta$, и даны $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$.

Если $\alpha = \beta = 0$, то левая часть доказываемого неравенства равна $-\infty$, и доказывать нечего. Пусть хоть одно из чисел α, β отлично от нуля. Имеем

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \alpha\xi + \beta\eta) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln |X^t(\alpha\xi + \beta\eta)| = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln |\alpha X^t\xi + \beta X^t\eta)| \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(|\alpha||X^t\xi| + |\beta||X^t\eta|) \leqslant \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln\{(|\alpha| + |\beta|)\max\{|X^t\xi|,\ |X^t\eta|\}\} =$$

$$= \varlimsup_{t\to+\infty} \left\{ \frac{1}{t} \ln(|\alpha| + |\beta|) + \frac{1}{t} \ln\max\{|X^t\xi|,\ |X^t\eta|\} \right\}.$$

Так как $|\alpha| + |\beta| > 0$, то $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(|\alpha| + |\beta|) = 0$, поэтому правая часть последнего неравенства цепочки (2) равна

$$\begin{aligned} &\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln\max\{|X^t\xi|,\ |X^t\eta|\} = \varlimsup_{t\to+\infty} \max\left\{ \frac{1}{t} \ln|X^t\xi|,\ \frac{1}{t} \ln|X^t\eta| \right\} = \\ &= \max\left\{ \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln|X^t\xi|,\ \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln|X^t\eta| \right\} = \max\{\lambda(\mathfrak{H},\ \xi),\ \lambda(\mathfrak{H},\ \eta)\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 следует, что для всяких $b \in B$, $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$ (напомним, что через $\overline{\mathbf{R}}$ обозначается расширенная числовая прямая, получаемая путем присоединения к $\mathbf{R}$ двух элементов $-\infty$ и $+\infty$) множество

$$E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda) = \{\xi \in p^{-1}(b) \colon \lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \leqslant \lambda\} \tag{3}$$

есть векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$. Из определения $E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda)$ следует, что $E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda) \subset E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu)$ для всяких $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$, $\mu \in \overline{\mathbf{R}}$ таких, что $\lambda \leqslant \mu$. Поэтому среди векторных подпространств $E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda)$ (при фиксированном $b \in B$) имеется не более $n+1$ различных, т. е. найдутся $\mu_i \in \overline{\mathbf{R}}$ ($i \in \{0,\ \ldots,\ m\}$, $m \leqslant n$) такие, что

$$E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_0) \subset \ldots \subset (\mathfrak{H},\ b,\ \mu_m) = p^{-1}(b)$$

(включения строгие) и такие, что для всякого $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$ векторное подпространство $E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda)$ совпадает с одним из пространств $E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_s)$ ($s \in \{0,\ \ldots,\ m\}$).

Положим

$$E_k(\mathfrak{H},\ b) = E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_s) \tag{4}$$

при $\dim E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_{s-1}) < k \leqslant \dim E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_s)$ ($s \in \{1,\ \ldots,\ m\}$), $k \leqslant \dim E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_s)$ ($s = 0$).

Из этого определения следует, в частности, что $E_n(\mathfrak{H},\ b) = p^{-1}(b)$.

Л е м м а 2. *Для всякого* $b \in B$ *сужение функции* $\lambda(\mathfrak{H},\ \cdot) \colon E \to \overline{\mathbf{R}}$ *на слой* $p^{-1}(b)$ *принимает не более* $n+1$ *различных значений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Предположим противное, т. е. предположим, что найдется $b \in B$ такое, что сужение функции $\lambda(\mathfrak{H},\ \cdot) \colon E \to \overline{\mathbf{R}}$ на слой $p^{-1}(b)$ принимает некоторые значения $\nu_0 < \ldots < \nu_{n+1}$. Отсюда в силу формулы (3) следует, что имеет место цепочка строгих включений

$$E(\mathfrak{H},\ b,\ \nu_0)\subset\ldots\subset E(\mathfrak{H},\ b,\ \nu_{n+1}).$$

Так как в силу леммы 1 каждое из $E(\mathfrak{H},\ b,\ \nu_i)$ ($i\in\{0,\ \ldots,\ n+1\}$) есть векторное подпространство n-мерного векторного пространства $p^{-1}(b)$, то мы пришли к противоречию. Лемма 2 доказана.

Легко видеть, что, в сущности, доказательство леммы 2 есть ничто иное как перефразировка рассуждения, изложенного перед формулировкой этой леммы.

3. Показатель Ляпунова $\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$ гомоморфизма $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ определяется при всяких $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $b\in B$ формулой

$$\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)=\inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))}\sup_{\xi\in\mathbf{R}^k}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi),\qquad(5)$$

где $G_k(p^{-1}(b))$ — грассманово многообразие k-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$.

Вследствие леммы 2 символы $\inf$ и $\sup$ в формуле (5), определяющей показатели Ляпунова гомоморфизма $\mathfrak{H}$, могут быть заменены соответственно символами $\min$ и $\max$, в результате чего формула (5) перепишется в виде

$$\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)=\min_{\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))}\max_{\xi\in\mathbf{R}^k}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi).\qquad(6)$$

Л е м м а 3. *Для всякого $b\in B$ имеет место цепочка неравенств*

$$\lambda_1(\mathfrak{H},\ b)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(\mathfrak{H},\ b).\qquad(7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны $b\in B$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$. Для всякого $\mathbf{R}^{k+1}\in G_{k+1}(p^{-1}(b))$, для всякого $\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))$ такого, что $\mathbf{R}^k\subset\mathbf{R}^{k+1}$, имеет место неравенство

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}^{k+1}}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\geqslant\sup_{\xi\in\mathbf{R}^k}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi).$$

Отсюда вытекает, что для всякого $\mathbf{R}^{k+1}\in G_{k+1}(p^{-1}(b))$ выполнено неравенство

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}^{k+1}}\lambda(\mathfrak{H},\ b)\geqslant\inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))}\sup_{\xi\in\mathbf{R}^k}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi).$$

Следовательно,

$$\inf_{\mathbf{R}^{k+1}\in G_{k+1}(p^{-1}(b))}\sup_{\xi\in\mathbf{R}^k}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\geqslant\inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))}\sup_{\xi\in\mathbf{R}^k}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi).$$

Согласно формуле (5), правая часть последнего неравенства равна $\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, а согласно той же формуле (5), но взятой для $k+1$ вместо k, левая часть последнего неравенства равна $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)$; поэтому это неравенство переписывается в виде

$$\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)\geqslant\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b).$$

Лемма 3 доказана.

4. При всяких $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $b\in B$ определяется множество

$$\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)=E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b))=\{\xi\in p^{-1}(b):\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\leqslant\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)\}.\qquad(8)$$

Из леммы 1 следует, что при всяких $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $b\in B$ так определенное множество $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$ есть векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$.

5. П р е д л о ж е н и е. *При всяких $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $b\in B$ имеет места равенство*

$$\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)=E_k(\mathfrak{H},\ b).$$

Доказательству этого предложения предпошлем несколько лемм.

6. Л е м м а 4. *Для всяких $\xi\in E$, $\alpha\in\mathbf{R}_*$ имеет место равенство*

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \alpha\xi)=\lambda(\mathfrak{H},\ \xi).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \alpha\xi)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X^t(\alpha\xi)|=\ \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|\alpha X^t\xi|=$$

$$=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left\{\frac{1}{t}\ln|\alpha|+\frac{1}{t}\ln|X^t\xi|\right\}=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X^t\xi|=\lambda(\mathfrak{H},\ \xi).$$

Лемма 4 доказана.

Следствие. *Для всякого* $\xi\in E$ *имеет место равенство* $\lambda(\mathfrak{H},\ -\xi)=\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)$.

Лемма 5. *Если для некоторых* $\xi\in E$, $\eta\in E$ *таких, что* $p\xi=p\eta$ *имеет место строгое неравенство* $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)>\lambda(\mathfrak{H},\ \eta)$, *то* $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi+\eta)=\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)$.

Доказательство. Пусть даны $\xi\in E$, $\eta\in E$ такие, что $p\xi=p\eta$, причем $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)>\lambda(\mathfrak{H},\ \eta)$. В силу леммы 1 отсюда следует, что $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi+\eta)\leqslant\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)$. Предположим, что $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi+\eta)<\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)$. Тогда правая часть вытекающего из леммы 1 неравенства

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)=\lambda(\mathfrak{H},\ (\xi+\eta)+(-1)\eta)\leqslant\max\{\lambda(\mathfrak{H},\ \xi+\eta),\ \lambda(\mathfrak{H},\ \eta)\}$$

строго меньше $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)$. Полученное противоречие доказывает, что $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi+\eta)=\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для всяких* $k\in\{1,\ \dots,\ n-1\}$, $b\in B$ *таких, что*

$$\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)\neq\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b), \tag{9}$$

существует одно и только одно подпространство $\mathbf{R}^k_{\min}\in G_k(p^{-1}(b))$, *для которого*

$$\max_{\xi\in\mathbf{R}^k_{\min}}\lambda(\mathfrak{H},\ b)=\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $k\in\{1,\ \dots,\ n-1\}$, $b\in B$ удовлетворяют неравенству (9). Существование такого $\mathbf{R}^k_{\min}\in G_k(p^{-1}(b))$, для которого выполнено равенство (10), следует непосредственно из формулы (6). Докажем, что такое $\mathbf{R}^k_{\min}$ единственно. Предположим противное: пусть существуют два таких подпространства $\mathbf{R}^k_1\neq\mathbf{R}^k_2$:

$$\max_{\xi\in\mathbf{R}^k_1}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)=\max_{\xi\in\mathbf{R}^k}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)=\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b). \tag{11}$$

Взяв любое $\zeta\in\mathbf{R}^k_2\setminus\mathbf{R}^k_1$, рассмотрим векторное подпространство $\mathbf{R}^{k+1}=\mathrm{EV}\{\zeta,\ \mathbf{R}^k_1\}$ слоя $p^{-1}(b)$, натянутое на вектор ζ и подпространство $\mathbf{R}^k_1$. Для этого векторного подпространства $\mathbf{R}^{k+1}$ вследствие леммы 1 и равенства (11) имеет место неравенство

$$\max_{\xi\in\mathbf{R}^{k+1}}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\leqslant\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b),$$

откуда в силу формулы (6), взятой для $k+1$ вместо k, вытекает неравенство

$$\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)\leqslant\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b),$$

из которого в силу леммы 3 следует равенство $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)=\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, противоречащее условию леммы. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть* $k\in\{1,\ \dots,\ n-1\}$, $b\in B$ *таковы, что* $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)\neq\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$ *и пусть* $\xi\in p^{-1}(b)$ *таково, что*

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)>\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b). \tag{12}$$

Тогда $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\geqslant\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)$.

Доказательство. Вследствие неравенства (12) вектор ξ не содержится в подпространстве $\mathbf{R}^k_{\min}\in G_k(p^{-1}(b))$, определенном в формулировке леммы 6. Рассмотрим векторное подпространство $\mathbf{R}^{k+1}=\mathrm{EV}\{\xi,\ \mathbf{R}^k_{\min}\}$ слоя $p^{-1}(b)$, натянутое на вектор ξ и подпространство $\mathbf{R}^k_{\min}$. Возьмем $\eta\in\mathbf{R}^{k+1}$ такое, что

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \eta)\geqslant\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b) \tag{13}$$

(такой вектор η существует в силу формулы (6), взятой для $k+1$ вместо k). По условию $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)\neq\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, откуда в силу леммы 3 следует строгое неравенство

$$\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)>\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b). \tag{14}$$

Из (13), (14) следует строгое неравенство

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \eta)>\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b), \tag{15}$$

из которого, в частности, следует, что $\eta\notin\mathbf{R}^k_{\min}$. Поэтому векторное подпространство $\mathrm{EV}\{\eta,\ \mathbf{R}^k_{\min}\}$ слоя $p^{-1}(b)$, натянутое на вектор η и подпространство $\mathbf{R}^k_{\min}$, совпадает с $\mathbf{R}^{k+1}=\mathrm{EV}\{\xi,\ \mathbf{R}^k_{\min}\}$ и, следовательно, вектор ξ можно представить в виде $\xi=\zeta+\alpha\eta$, где $\zeta\in\mathbf{R}^k_{\min}$, $\alpha\in\mathbf{R}$; более того, $\alpha\in\mathbf{R}_*$, так как $\xi\notin\mathbf{R}^k_{\min}$. В силу леммы 4 имеем поэтому равенство

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \alpha\eta)=\lambda(\mathfrak{H},\ \eta), \tag{16}$$

из которого вследствие (15) вытекает строгое неравенство $\lambda(\mathfrak{H},\ \alpha\eta)>\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$. Так как $\zeta\in\mathbf{R}^k_{\min}$, то (см. лемму 6) $\lambda(\mathfrak{H},\ \zeta)\leqslant\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$. Таким образом, $\lambda(\mathfrak{H},\ \alpha\eta)>\lambda(\mathfrak{H},\ \zeta)$ и потому в силу леммы 5 имеет место равенство $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)=\lambda(\mathfrak{H},\ \alpha\eta)$. Из этого равенства в силу формул (13), (16) следует неравенство $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\geqslant\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)$. Лемма 7 доказана.

Л е м м а 8. *Для всяких* $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $b\in B$ *таких, что* $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)\neq\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, *имеет место равенство* $\mathbf{R}^k_{\min}=\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что $\mathbf{R}^k_{\min}$ определено в формулировке леммы 6, а $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$ определено формулой (8).

Пусть даны $b\in B$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$, удовлетворяющие неравенству $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)\neq\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$. Тогда из формул (8), (10) следует включение

$$\mathbf{R}^k_{\min}\subset\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b). \tag{17}$$

Если это включение строгое, то найдется подпространство $\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))$, содержащееся в $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$ и отличное от $\mathbf{R}^k_{\min}$. При этом, так как $\mathbf{R}^k\subset\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b).$, то в силу (8) имеет место неравенство

$$\max_{\xi\in\mathbf{R}^k}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\leqslant\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b),$$

из которого вследствие формулы (6) следует равенство

$$\max_{\xi\in\mathbf{R}^k}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)=\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b).$$

Таким образом, нашлось $\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))$, удовлетворяющее последнему равенству и отличное от $\mathbf{R}^k_{\min}$. В силу леммы 6 этого быть не может. Противоречие выведено из предположения, что включение (17) — строгое. Следовательно,

$$\mathbf{R}^k_{\min}=\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b).$$

Лемма 8 доказана.

Л е м м а 9. *Пусть* $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $b\in B$ *таковы, что* $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)\neq\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$. *Тогда для всякого*

$$\lambda\in[\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b),\ \lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)) \tag{18}$$

имеет место равенство

$$E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda)=\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дано λ, удовлетворяющее (18). Напомним, что левая часть доказываемого равенства определена формулой (3), из которой вследствие условия на λ

(см. формулу (18)) следует включение $E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda)\supset E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b))$, правая часть которого в силу формулы (8) равна $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$. Таким образом,

$$\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)\subset E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda).$$

Допустим, что это включение — строгое. Тогда найдется $\xi\in E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda)\setminus\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$, т. е. такое $\xi\in p^{-1}(b)$, что $\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)<\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\leqslant\lambda$. Так как по условию $\lambda<\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)$, то это противоречит лемме 7. Следовательно, $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)=E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda)$. Лемма 9 доказана.

7. Доказательство предложения, сформулированного в п. 5. Пусть дано $b\in B$. Из формулы (8), определяющей векторные подпространства $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$, в силу леммы 3 следует, что

$$\widehat{E}_1(\mathfrak{H},\ b)\subset\ldots\subset\widehat{E}_n(\mathfrak{H},\ b), \qquad (19),$$

причем из формулы (6), взятой при $k=n$, следует равенство $\widehat{E}_n(\mathfrak{H},\ b)=p^{-1}(b)$. Выбросим из цепочки (19) все $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$, кроме $\widehat{E}_n(\mathfrak{H},\ b)$ и тех $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$ ($k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$), для которых $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)\neq\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$. Получим цепочку векторных пространств

$$\widehat{E}_{k_1}(\mathfrak{H},\ b)\subset\ldots\subset\widehat{E}_{k_{m^*}}(\mathfrak{H},\ b)=p^{-1}(b),$$

где $k_{m^*}=n$, а m^* — некоторое натуральное число $\leqslant n$. Пользуясь формулой (8), перепишем эту цепочку в виде (быть может, удлиненном слева одним включением)

$$E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_0)\subset\ldots\subset E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_m)=p^{-1}(b),$$

где $\mu_0=-\infty$, $\mu_s=\lambda_{n-k_{s^*}+1}(\mathfrak{H},\ b)$ ($s\in\{1,\ \ldots,\ m\}$), а отображение $r\mapsto r^*$ определено так: $r^*=r+1$, если $\lambda_n(\mathfrak{H},\ b)=-\infty$, и $r^*=r$ в противном случае.

Для всякого $\lambda\in\overline{\mathbf{R}}$ имеет место одно из трех: либо $\lambda<\lambda_n(\mathfrak{H},\ b)$, либо $\lambda\geqslant\lambda_1(\mathfrak{H},\ b)$, либо λ принадлежит одному из полуинтервалов

$$[\lambda_{n-k_{s^*}+1}(\mathfrak{H},\ b),\ \lambda_{n-k_{s^*}}(\mathfrak{H},\ b)),\ (s^*\in\{1,\ \ldots,\ m^*\}\setminus\{m^*\}).$$

В первом случае, т. е. если $\lambda<\lambda_n(\mathfrak{H},\ b)$ (тогда $\lambda_n(\mathfrak{H},\ b)\neq-\infty$), имеют место равенства $E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda)=\{0_b\}=E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_0)$. В самом деле: из формулы (6), взятой при $k=1$, следует, что

$$\max_{\xi\in\mathbf{R}^1}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\geqslant\lambda_n(\mathfrak{H},\ b)$$

для всякого $\mathbf{R}^1\in G_1(p^{-1}(b))$, а так как функция $\lambda(\mathfrak{H},\ \cdot)$ в точке 0_b принимает значение $-\infty$ — ∞ и постоянна на $\mathbf{R}^1_*$ в силу леммы 4 и так как всякий вектор $\xi\in p^{-1}(b)$ (напомним, что звездочка справа внизу означает выбрасывание нуля) содержится в некотором $\mathbf{R}^1\in G_1(p^{-1}(b))$, то $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\geqslant\lambda_n(\mathfrak{H},\ b)$ для всякого $\xi\in p^{-1}(b)_*$. Во втором случае, т. е. если $\lambda\geqslant\lambda_1(\mathfrak{H},\ b)$, имеют место равенства $E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda)=p^{-1}(b)=\widehat{E}_{k_{m^*}}(\mathfrak{H},\ b)$, так как из формулы (6), взятой при $k=n$, следует, что $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\leqslant\lambda_1(\mathfrak{H},\ b)$ для всякого $\xi\in p^{-1}(b)$. В третьем случае в силу леммы 9 для некоторого $s^*\in\{1,\ \ldots,\ m^*\}\setminus\{m^*\}$ имеют место равенства

$$E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda)=\widehat{E}_{k_{s^*}}(\mathfrak{H},\ b)=E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_s).$$

В цепочке

$$E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_0)\subset\ldots\subset E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_m)=p^{-1}(b)$$

все включения — строгие. Это вытекает в силу формулы $\mu_0=-\infty$ и определения отображения $r\mapsto r^*$ из неравенств

$$\lambda_{n-k_s}(\mathfrak{H},\ b)\neq\ \lambda_{n-k_s+1}(\mathfrak{H},\ b),\ (s\in\{1,\ \ldots,\ m^*\}\setminus\{m^*\}).$$

В самом деле, из формулы (8) и формулы, полученной из нее заменой $k\mapsto k+1$, имеем

$$\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)=\{\xi\in p^{-1}(b):\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\leqslant\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)\},$$
$$\widehat{E}_{k+1}(\mathfrak{H},\ b)=\{\xi\in p^{-1}(b):\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\leqslant\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)\}.$$
А так как согласно (6) и формуле, получаемой из (6) заменой $k\mapsto k+1$, показатели $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)$, $\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$ являются значениями функции $\lambda(\mathfrak{H},\ \cdot):p^{-1}(b)\to\overline{\mathbf{R}}$, то из $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)\neq\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$ следует $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)=\widehat{E}_{k+1}(\mathfrak{H},\ b)$.

Из (8) по определению чисел $k_1,\ \ldots,\ k_{m^*}$ вытекает, что $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)=\widehat{E}_{k_{s^*}}(\mathfrak{H},\ b)$ при $k_{s^*-1}<k\leqslant k_{s^*}$ $(s^*\in\{1,\ \ldots,\ m^*\}\setminus\{1\})$, $k\leqslant k_{s^*}(s^*=1)$. Формула $\mu_s=\lambda_{n-k_{s^*}+1}(\mathfrak{H},\ b)$, определяющая μ_s при $s\in\{1,\ \ldots,\ m\}$, верна при всех $s^*\in\{1,\ \ldots,\ m^*\}$, так как в случае $s^*=1$, $s=0$ имеем $\lambda_n(\mathfrak{H},\ b)=-\infty$ (см. определение отображения $r\mapsto r^*$) и потому $\mu_s=\mu_0=-\infty=\lambda_n(\mathfrak{H},\ b)=\lambda_{n-k_1+1}(\mathfrak{H},\ b)=\lambda_{n-k_{s^*}+1}(\mathfrak{H},\ b)$. Пользуясь этой формулой и (8), запишем равенство $k_{s^*}=\dim\widehat{E}_{k_{s^*}}(\mathfrak{H},\ b)$ (вытекающее при $s^*\neq m^*$ из леммы 8, а при $s^*=m^*$ из $k_{m^*}=n$, $\widehat{E}_n(\mathfrak{H},\ b)=p^{-1}(b)$) в виде
$$k_{s^*}=\dim E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_s)\ \ (s^*\in\{1,\ \ldots,\ m^*\}).$$

Так как отображение $r\mapsto r^*$ обладает свойством $r^*-1=(r-1)^*$, то из первой и последней фраз предыдущего абзаца следует формула:
$$\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)=\widehat{E}_{k_{s^*}}(\mathfrak{H},\ b)=E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_s)$$
при $\dim E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_{s-1})<k\leqslant\dim E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_s)$ $(s\in\{1,\ \ldots,\ m\}\,(s^*\neq 1))$, $k\leqslant\dim E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_s)$ $(s^*=1)$.

Если при $s^*=1$ имеем $s=0$, то сравнением полученной формулы с (4) доказательство предложения заканчивается. Если же при $s^*=1$ имеем $s=1$, то $\lambda_n(\mathfrak{H},\ b)\neq-\infty$, поэтому $E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_0)=\{0_b\}$ и, следовательно, не существует натуральных чисел $k\leqslant\dim E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_0)$. Поэтому и в этом случае сравнение полученной формулы с (4) приводит к равенству $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)=E_k(\mathfrak{H},\ b)$ $(k\in\{1,\ \ldots,\ n\})$. Предложение доказано.

8. Если для некоторых $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $b\in B$ выполнено неравенство $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)\neq\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, то будем обозначать $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)=E_k(\mathfrak{H},\ b)$ через $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$. Первое утверждение следующей леммы означает, что $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)\in G_k(p^{-1}(b))$.

Л е м м а 10. *При всяких* $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $b\in B$ *справедливы два утверждения:* 1) *если* $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)\neq\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, *то* $\dim\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)=k$; 2) *если* $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)=\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, *то* $\dim\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)\geqslant k+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть даны $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $b\in B$ такие, что $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)\neq\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$. Тогда в силу леммы 8 имеет место равенство $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)=\mathbf{R}_{\min}^k$, где $\mathbf{R}_{\min}^k$ определено в формулировке леммы 6; в чем именно состоит это определение в полном объеме — для нас сейчас неважно, важно только, что, как указано в формулировке леммы 6, $\mathbf{R}_{\min}^k\in G_k(p^{-1}(b))$, следовательно, $\dim\mathbf{R}_{\min}^k=k$. Первое утверждение леммы доказано.

2) Пусть даны $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $b\in B$ такие, что $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)=\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$. Формула (6) с $k+1$ вместо k записывается в виде
$$\min_{\mathbf{R}^{k+1}\in G_{k+1}(p^{-1}(b))}\ \max_{\xi\in\mathbf{R}^{k+1}}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)=\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b).$$

Следовательно, существует $\mathbf{R}^{k+1} \in G_{k+1}(p^{-1}(b))$ такое, что для всякого $\xi \in \mathbf{R}^{k+1}$ имеет место формула

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \leqslant \lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b) = \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b).$$

Следовательно (в силу формулы (8), определяющей $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$), $(k+1)$-мерное векторное пространство $\mathbf{R}^{k+1}$ является подпространством векторного пространства $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$, откуда вытекает неравенство $\dim \widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b) \geqslant k+1$. Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Неравенство* $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b) \neq \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$ *выполнено для тех и только тех* $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $b \in B$, *для которых выполнено неравенство* $E_{k+1}(\mathfrak{H},\ b) \neq E_k(\mathfrak{H},\ b)$.

Доказательство. Напомним формулу (8):

$$\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b) = \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \leqslant \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)\}.$$

Перепишем эту формулу, заменив в ней k на $k+1$:

$$\widehat{E}_{k+1}(\mathfrak{H},\ b) = \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \leqslant \lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)\}.$$

Из этих двух равенств, служащих определениями множеств $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$, $\widehat{E}_{k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, следует, что если $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b) = \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, то $\widehat{E}_{k+1}(\mathfrak{H},\ b) = \widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$.

Если принять во внимание, что согласно формуле (6) и формуле, получаемой из нее заменой k на $k+1$, показатели $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b)$, $\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$ являются значениями функции $\lambda(\mathfrak{H},\ \cdot) : p^{-1}(b) \to \overline{\mathbf{R}}$, то из тех же двух равенств, служащих определениями множеств $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$, $\widehat{E}_{k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, следует, что если $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b) \neq \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, то $\widehat{E}_{k+1}(\mathfrak{H},\ b) \neq \widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$.

Таким образом, мы доказали, что неравенство $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b) \neq \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$ эквивалентно неравенству $\widehat{E}_{k+1}(\mathfrak{H},\ b) \neq \widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$, которое вследствие предложения п. 5 эквивалентно неравенству $E_{k+1}(\mathfrak{H},\ b) \neq E_k(\mathfrak{H},\ b)$. Лемма 11 доказана.

9. До сих пор ничто не мешало функции $\lambda(\mathfrak{H},\ \cdot) : E \to \overline{\mathbf{R}}$ принимать на ненулевых векторах не только числовые значения, но и значения $-\infty$, $+\infty$. Наложим теперь на гомоморфизм $\mathfrak{H}$ некоторое ограничение. Потребуем от гомоморфизма $\mathfrak{H}$, чтобы для некоторой функции $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$, удовлетворяющей при всяких $t \in \mathbf{G}$, $b \in B$ равенству

$$a(\chi^t b) = a(b), \tag{20}$$

при всяких $t \in \mathbf{G}$, $b \in B$ выполнялось неравенство

$$\| X^t[b] \| \leqslant \exp(|\, t \,|\, a(b)). \tag{21}$$

Лемма 12. *Пусть для гомоморфизма* $\mathfrak{H}$ *существует функция* $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$, *удовлетворяющая условиям п. 9. Тогда для всякого ненулевого* $\xi \in E$ *имеет место включение*

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \in [-a(p\xi),\ a(p\xi)].$$

Доказательство. Прежде чем доказывать лемму, поясним, что под ненулевым ξ понимается вектор $\xi \neq 0_{p\xi}$, где 0_b — нуль слоя $p^{-1}(b)$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству. Пусть дано ненулевое $\xi \in E$. 1) Имеем

$$\begin{gathered}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |\, X^t \xi \,| \leqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln(\| X^t[p\xi] \| \,|\, \xi \,|) = \\ = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \left\{ \frac{1}{t} \ln \| X^t[p\xi] \| + \frac{1}{t} \ln |\, \xi \,| \right\} = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X^t[p\xi] \| \leqslant a(p\xi);\end{gathered} \tag{22}$$

в последнем равенстве этой цепочки использовано неравенство $|\xi|\neq 0$, вытекающее из условия $\xi\neq 0_{p\xi}$, а последнее неравенство цепочки следует из (21).

2) Для всякого $t\in\mathbf{G}$ вектор ξ можно представить в следующем виде

$$\xi = X^{-t}X^{t}\xi = X^{-t}[pX^{t}\xi]X^{t}\xi = X^{-t}[\chi^{t}p\xi]X^{t}\xi,$$

откуда

$$|\xi|\leqslant \| X^{-t}[\chi^{t}p\xi]\|\,| X^{t}\xi|.$$

Первый сомножитель в правой части последнего неравенства вследствие формул (20), (21) не превосходит $\exp(|t|\,a(p\xi))$, поэтому $|\xi|\leqslant |X^{t}\xi|\exp(|t|\,a(p\xi))$.

Итак, для всякого $t\in\mathbf{G}$ имеет место неравенство

$$|X^{t}\xi|\geqslant |\xi|\exp(-|t|\,a(p\xi)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi) &= \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X^{t}\xi|\geqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\{|\xi|\exp(-ta(p\xi))\} = \\ &= \overline{\lim_{t\to+\infty}}\left\{\frac{1}{t}\ln|\xi| - a(p\xi)\right\} = -a(p\xi);\end{aligned}\tag{23}$$

в последнем равенстве этой цепочки использовано неравенство $|\xi|\neq 0$.

3) Соединением неравенств (22), (23) заканчивается доказательство. Лемма 12 доказана.

Из леммы 12 в силу формулы (5) вытекает

С л е д с т в и е. *Пусть для гомоморфизма* $\mathfrak{H}$ *существует функция* $a(\cdot):B\to\mathbf{R}^{+}$, *удовлетворяющая условиям п. 9. Тогда для всякого* $q\in\{1,\ \dots,\ n\}$ *имеет место включение*

$$\lambda_{q}(\mathfrak{H},\ b)\in[-a(b),\ a(b)].$$

10. О п р е д е л е н и е (см. [5]). Гомоморфизм $\mathfrak{H}$, удовлетворяющий условиям п. 9 (см. формулы (20), (21)), называется *насыщенным,* если для всякой точки $b\in B$ такой, что $\chi^{\theta}b\neq b$ при всяком $\theta\in\mathbf{G}_{*}$, для всякой окрестности $W(b)$ точки b (в пространстве B), всякого базиса $\{\xi_1,\ \dots,\ \xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ и всяких окрестностей $U(\xi_i)$ точек ξ_i ($i\in\{1,\ \dots,\ n\}$) (в пространстве E) найдется $\delta\in\mathbf{R}^{+}_{*}$ такое, что для всякого $t\in\mathbf{N}$ и всяких невырожденных линейных операторов

$$Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1}b)\to p^{-1}(\chi^{m}b)\ \ (m\in\{1,\ \dots,\ t\}),$$

удовлетворяющих при всяком $m\in\{1,\ \dots,\ t\}$ неравенству

$$\| Y_m(X[\chi^{m-1}b])^{-1} - I\| + \| X[\chi^{m-1}b]Y_m^{-1} - I\| < \delta,$$

найдутся точка $b'\in W(b)$ и изоморфизмы слоев (как евклидовых пространств) $\psi_m : p^{-1}(\chi^{m}b')\to p^{-1}(\chi^{m}b)$ ($m\in\{0,\ \dots,\ \mathrm{t}\}$), удовлетворяющие следующим условиям:

а) $\psi_0^{-1}\xi_i\in U(\xi_i)$ при всяком $i\in\{1,\ \dots,\ n\}$,

б) при всяком $m\in\{1,\ \dots,\ t\}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\chi^{m-1}b') \arrow[r, "X[\chi^{m-1}b']"'] \arrow[d, "\psi_{m-1}"] & p^{-1}(\chi^{m}b') \arrow[d, "\psi_m"] \\ p^{-1}(\chi^{m-1}b) \arrow[r, "Y_m"'] & p^{-1}(\chi^{m}b) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

11. Обозначим через $\tilde{E}$ топологическое пространство векторных подпространств слоев векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$.

Выше (см. формулу (4)) для всяких $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$, $b\in B$ было определено векторное пространство $E_k(\mathfrak{H},\ b)\in\tilde{E}$.

Тем самым для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ определено отображение $E_k(\mathfrak{H}, \cdot) : B \to \tilde{E}$.

12. Т е о р е м а 4. *Пусть* $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$ — *насыщенный гомоморфизм. Тогда в пространстве* B *имеется всюду плотное множество* $\mathcal{D}$ *типа* G_δ *такое, что при всяком* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *отображение* $E_k(\mathfrak{H}, \cdot) : B \to \tilde{E}$ *непрерывно во всякой точке* $b \in \mathcal{D}$ *такой, что* $E_k(\mathfrak{H}, b) \ne E_{k+1}(\mathfrak{H}, b)$.

Доказательство теоремы 4 см. в § 4.

§ 3. Экспоненциально разделенные подпространства

О п р е д е л е н и е 1 (Перрон). Гомоморфизм $\mathfrak{H}$ называется *экспоненциально разделенным* (на $\mathbf{G}^+$) с индексом $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ в точке $b \in B$, если существует подпространство $\mathbf{R}_0^k \in G_k(p^{-1}(b))$ такое, что для всякого его алгебраического дополнения $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0^k$ существуют *числа* $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, $\beta \in \mathbf{R}_*^+$ такие, что для всяких векторов $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_{0*}^k$, для всяких чисел $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X^t\xi|\,|X^s\xi|^{-1} \geqslant \alpha\,|X^t\eta|\,|X^s\eta|^{-1}\exp(\beta(t-s)). \qquad (1)$$

Л е м м а 1. *Если гомоморфизм* $\mathfrak{H}$ *экспоненциально разделен с индексом* k *в точке* b, *то*

$$E_k(\mathfrak{H}, b) = \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H}, b) = \mathbf{R}_0^k,$$

где $E_k(\mathfrak{H}, b)$ *определено формулой* (4) § 2, $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H}, b)$ *определено в п. 8 § 2, а* $\mathbf{R}_0^k$ — *подпространство, обладающее свойствами, указанными в определении* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие леммы, т. е. существует $\mathbf{R}_0^k \in G_k(p^{-1}(b))$ такое, что для всякого $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0^k$ существуют $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, $\beta \in \mathbf{R}_*^+$ такие, что для всяких $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_{0*}^k$, для всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство (1).

а) Фиксируем какое-нибудь $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0^k$. Фиксируем соответствующие $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, $\beta \in \mathbf{R}_*^+$.

Положив в формуле (1) $s = 0$, получаем, что для всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_{0*}^k$ выполнено неравенство

$$|X^t\xi|\,|\xi|^{-1} \geqslant \alpha\,|X^t\eta|\,|\eta|^{-1}\exp(\beta t).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$|X^t\xi|\,|\xi|^{-1} \geqslant \gamma\,|X^t\eta|\exp(\beta t),$$

где число $\gamma = \gamma(\xi, \eta) = \alpha\,|\xi|\,|\eta|^{-1} \in \mathbf{R}_*^+$ не зависит от $t \in \mathbf{G}^+$.

б) Для всяких векторов $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_{0*}^k$ из последнего неравенства следует

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln|X^t\xi| \geqslant \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln(\gamma\,|X^t\eta|\exp(\beta t)) =$$

$$= \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}(\ln\gamma + \ln|X^t\eta| + \beta t) = \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln|X^t\eta| + \beta.$$

Пользуясь формулой (1) § 2 и учитывая, что при $\eta = 0_b$ имеем $\lambda(\mathfrak{H}, \eta) = -\infty$, получаем: для всяких $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_0^k$ имеет место неравенство

$$\lambda(\mathfrak{H}, \xi) \geqslant \lambda(\mathfrak{H}, \eta) + \beta. \qquad (2)$$

в) Так как $p^{-1}(b) = \mathbf{R}^{n-k} \oplus \mathbf{R}_0^k$, то всякий вектор $\zeta \in p^{-1}(b)$ можно представить в виде $\zeta = \xi + \eta$, где $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_0^k$.

Если $\zeta \in p^{-1}(b) \setminus \mathbf{R}_0^k$, то $\xi \neq 0$ и, следовательно, $\xi \in \mathbf{R}^{*n-k}$. Поэтому из результата п. б) следует, что всякий вектор $\zeta \in p^{-1}(b) \setminus \mathbf{R}_0^k$ можно представить в виде суммы $\zeta = \xi + \eta$, слагаемые которой удовлетворяют неравенству (2). Так как $\beta > 0$, то в силу леммы 5 § 2 отсюда следует равенство $\lambda(\mathfrak{H},\ \zeta) = \lambda(\mathfrak{H},\ \xi)$.

Итак, для всякого $\zeta \in p^{-1}(b) \setminus \mathbf{R}_0^k$ найдется $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$ такое, что $\zeta - \xi \in \mathbf{R}_0^k$ и $\lambda(\mathfrak{H},\ \zeta) = \lambda(\mathfrak{H},\ \xi)$.

г) Из результатов пунктов б), в) вытекает, что для всяких $\zeta \in p^{-1}(b) \setminus \mathbf{R}_0^k$, $\eta \in \mathbf{R}_0^k$ выполнено неравенство $\lambda(\mathfrak{H},\ \zeta) \geqslant \lambda(\mathfrak{H},\ \eta) + \beta$. Следовательно, для всякого $\zeta \in p^{-1}(b) \setminus \mathbf{R}_0^k$ выполнено неравенство

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \zeta) \geqslant \sup_{\eta \in \mathbf{R}_0^k} \lambda(\mathfrak{H},\ \eta) + \beta. \tag{3}$$

д) Для всякого $\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))$, отличного от $\mathbf{R}_0^k$, существует такое $\zeta \in \mathbf{R}^k$, что $\zeta \notin \mathbf{R}_0^k$. Поэтому из результата п. г) вытекает (напомним, что $\beta > 0$ $\beta>0$) следующее утверждение. Для всякого $\mathbf{R}_0^k \in G_k(p^{-1}(b))$ такого, что $\mathbf{R}^k \neq \mathbf{R}_0^k$, имеет место неравенство

$$\sup_{\xi \in \mathbf{R}^k} \lambda(\mathfrak{H},\ \xi) > \sup_{\eta \in \mathbf{R}_0^k} \lambda(\mathfrak{H},\ \eta).$$

е) Для всякого $\mathbf{R}^{k+1} \in G_{k+1}(p^{-1}(b))$ найдется вектор $\zeta \in \mathbf{R}^{k+1}$, не содержащийся в $\mathbf{R}_0^k$. Поэтому из результата п. г) вытекает следующее. Для всякого $\mathbf{R}^{k+1} \in G_{k+1}(p^{-1}(b))$ имеет место неравенство

$$\sup_{\xi \in \mathbf{R}^{k+1}} \lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \geqslant \sup_{\eta \in \mathbf{R}_0^k} \lambda(\mathfrak{H},\ \eta) + \beta.$$

ж) В силу результата п. д) из формулы (5) § 2 следует равенство

$$\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b) = \sup_{\xi \in \mathbf{R}_0^k} \lambda(\mathfrak{H},\ \xi). \tag{4}$$

з) Заменив в формуле (5) § 2 k на $k+1$, получаем формулу

$$\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b) = \inf_{\mathbf{R}^{k+1} \in G_{k+1}(p^{-1}(b))} \sup_{\xi \in \mathbf{R}^{k+1}} \lambda(\mathfrak{H},\ \xi);$$

отсюда в силу результата п. е) следует:

$$\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b) \geqslant \sup_{\eta \in \mathbf{R}_0^k} \lambda(\mathfrak{H},\ \eta) + \beta > \sup_{\eta \in \mathbf{R}_0^k} \lambda(\mathfrak{H},\ \eta).$$

Из этой цепочки неравенств в силу формулы (4) вытекает строгое неравенство $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b) > \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, из которого согласно определению подпространства $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ (см. п. 8 § 2) вытекает равенство

$$\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b) = \widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b). \tag{5}$$

и) Из формулы (4) в силу определения подпространства $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$ (см. формулу (8) § 2) следует включение

$$\mathbf{R}_0^k \subset \widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b). \tag{6}$$

В силу результата п. г) для всякого $\zeta \in p^{-1}(b) \setminus \mathbf{R}_0^k$ выполнено неравенство (3), которое с помощью формулы (4) переписывается в виде

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \zeta) \geqslant \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b) + \beta > \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b).$$

Отсюда согласно определению подпространства $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$ (см. формулу (8) § 2) следует включение $\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b) \subset \mathbf{R}_0^k$. Соединив это включение с доказанным ранее включением (6), получаем равенство $\mathbf{R}_0^k \subset \widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b)$. соединение которого с равенством (5) дает цепочку равенств

$$\widehat{E}_k(\mathfrak{H},\ b) = \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b) = \mathbf{R}_0^k.$$

Согласно предложению п. 5 § 2, эту цепочку можно переписать в виде

$$E_k(\mathfrak{H},\ b) = \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b) = \mathbf{R}_0^k.$$

Лемма 1 доказана.

§ 4. Доказательства теорем

1. Доказательство теоремы 4, сформулированной в п. 12 § 2..

а) В силу леммы 11 § 2 неравенство $E_k(\mathfrak{H},\ b) \neq E_{k+1}(\mathfrak{H},\ b)$ эквивалентно неравенству $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b) \neq \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$.

б) В силу теоремы [5] (в [4], [6] изложена подробная проработка тех двух деталей доказательства теоремы статьи [5], которые в самой статье [5] изложены сжато) в пространстве B найдется всюду плотное множество $\mathcal{D}_1$ типа G_δ такое, что для всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $b \in \mathcal{D}_1$ из неравенства $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b) \neq \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$ следует, что гомоморфизм $\mathfrak{H}$ экспоненциально разделен с индексом k в точке b.

в) В силу теоремы § 1 (см. [7]) в пространстве B имеется всюду плотное множество $\mathcal{D}_2$ типа G_δ такое, что для всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $b \in \mathcal{D}_2$ таких, что гомоморфизм $\mathfrak{H}$ экспоненциально разделен с индексом k в точке b, найдется окрестность U_b точки b (в пространстве B) такая, что гомоморфизм $\mathfrak{H}$ экспоненциально разделен с тем же индексом k во всякой точке $c \in U_b$.

г) В силу теоремы § 1 ([8]) в пространстве B имеется всюду плотное множество $\mathcal{D}_3$ типа G_δ такое, что для всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $b \in \mathcal{D}_3$ отображение $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ \cdot) : S^{(k)}(\mathfrak{H}) \to \tilde{E}$, где $S^{(k)}(\mathfrak{H})$ — множество тех точек базы B, в которых гомоморфизм $\mathfrak{H}$ экспоненциально разделен с индексом k, непрерывно в точке b. В цитированной теореме через $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ обозначено не то, что в настоящей статье мы обозначаем этим символом, а то, что теперь мы обозначаем через $\mathbf{R}_0^k$, но в силу леммы 1 § 3 при всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $b \in S^{(k)}(\mathfrak{H})$ эти подпространства совпадают: $\mathbf{R}_0^k = \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$.

д) Для всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $b \in B$ таких, что $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b) \neq \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, имеет место равенство $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b) = E_k(\mathfrak{H},\ b)$ (см. начало п. 8 §2).

е) Из пунктов а) — д) в силу леммы 1 § 3 следует, что при всяком $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ отображение $E_k(\mathfrak{H},\ \cdot) : B \to \tilde{E}$ непрерывно во всякой точке $b \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \bigcap \mathcal{D}_2 \bigcap \mathcal{D}_3$ такой, что $E_k(\mathfrak{H},\ b) \neq E_{k+1}(\mathfrak{H},\ b)$.

ж) Так как $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ — всюду плотные множества типа G_δ в полном метрическом пространстве B, то в силу теоремы Бэра их пересечение $\mathcal{D}$ есть всюду плотное множество типа G_δ в пространстве B. Теорема доказана.

2. Доказательство теоремы 1 (разъяснение используемых в доказательстве теоремы 1 обозначений дано выше перед формулировкой теоремы 1). Рассмотрим векторное расслоение — произведение $E = (S \times \mathcal{B}) \times \mathbf{R}^n$ с базой $B = S \times \mathcal{B}$ и слоем $\mathbf{R}^n$. Обозначив через $\mathfrak{X}(\sigma,\ 0;\ x,\ A)\mathfrak{x}$ значение при $t = \sigma$ решения системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$, равного $\mathfrak{x}$ при $t = 0$, определим при всяком $t \in \mathbf{R}$ отображения $X^t : E \to E$, $\chi^t : B \to B$ формулами

$$X^t(A,\ x,\ \mathfrak{x}) = (A,\ f^t x,\ \mathfrak{X}(t,\ 0;\ x,\ A)\mathfrak{x}),\ \chi^t(A,\ x) = (A,\ f^t x).$$

В § 9 статьи [7] доказано, что формула $\mathfrak{H}t = (X^t,\ \chi^t)$ ($t \in \mathbf{R}$) определяет гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\ (\mathbf{R},\ \mathrm{Aut}\ (E,\ p,\ B))$, удовлетворяющий условию п. 9 § 2, причем

$$E_k(\mathfrak{H},\ (A,\ x)) = \{A\} \times \{x\} \times E_k(A,\ x)$$

($\{a\}$ означает множество из одного элемента a). Поэтому утверждение об эквивалентности двух определений $E_k(A,\ x)$, сформулированное в п. 1 § 1, следует из предложения п. 5 § 2. В [9] доказано, что этот гомоморфизм $\mathfrak{H}$ — насыщенный. Поэтому теорема 1 вытекает из теоремы 4.

3. Доказательство теоремы 2 (используемые далее обозначения объяснены выше перед формулировкой теоремы 2). При всяких $j \in S$, $t \in \mathbf{Z}$ положим $\mathfrak{H}_j t = (X_j^t,\ \chi_j^t)$, где отображения $X_j : E_j \to E_j$, $\chi_j : B_j \to B_j$ пространств $E_j = S_j \times TV^n$, $B_j = S_j \times V^n$ определены формулами

$$X_j(f,\ \mathfrak{x}) = (f,\ df\mathfrak{x}),\ \chi_j(f,\ x) = (f,\ fx).$$

В § 11 статьи [7] со ссылками на [10] доказано, что при всяком $j \in S$ так определенное отображение $\mathfrak{H}_j$ есть гомоморфизм группы $\mathbf{Z}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения $(E_j,\ p_j,\ B_j)$, где $p_j = 1_{S_i} \times \pi$ (π — проекция касательного расслоения $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$ многообразия V^n), удовлетворяющий условию п. 9 § 2, причем

$$E_k(\mathfrak{H}_j,\ (f,\ x)) = \{f\} \in E_k(f,\ x).$$

Поэтому утверждение об эквивалентности двух определений подпространств $E_k(f,\ x)$, сформулированное в п. 2 § 1, следует из предложения п. 5 § 2. В силу леммы 2 ([11]) при всяком $j \in S$ гомоморфизм $\mathfrak{H}_j$ — насыщенный. Поэтому теорема 2 вытекает из теоремы 4.

Примечание. В статье [7] на с. 465 строка 13 снизу должна быть такой: «всякого $x_0 \in \mathcal{B}$, то полунепрерывность функции $g(\cdot)$»; на с. 466, строка 6 снизу, вместо индекса n должен быть индекс k; на с. 468 во второй строке пункта 5 вместо индекса k должен быть индекс m; на с. 469, строка 1 снизу, вместо X^j должно быть X^i, а на полях должен быть номер формулы (2); на с. 470, строка 8 сверху, в индексе вместо j должно быть $m+j$; на с. 473, строка 3 снизу, вместо $\mathbf{G}$ должно быть $\mathbf{R}$.

Литература

1. *Ляпунов А. М.* Собр. соч. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956, т. 2.
2. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
3. *Изобов Н. А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. — В кн.: Матем. анализ (Итоги науки и техники). М.: ВИНИТИ, 1974, т. 12, с. 71—146.
4. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. X. — Дифферент уравнения, 1982, т. 18, с. 2132—2148.
5. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. IV. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, с. 431—468.
6. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. XI. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, с. 196—214.
7. *Миллионщиков В. М.* Об индексах экспоненциальной разделенности. — Матем. сб., 1984, т. 124(166), с. 451—485.
8. *Миллионщиков В. М.* О типичном поведении условной экспоненциальной устойчивости при возмущениях. — Матем. сб., 1984, т. 125(167), с. 435—457.
9. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. V. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, с. 1394—1410.
10. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VIII. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, с. 1330—1345.

11. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. IX. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, с. 1507—1548.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
3.VII.1984