МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 1 (1985)

ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА СЕМЕЙСТВА ЭНДОМОРФИЗМОВ МЕТРИЗОВАННОГО ВЕКТОРНОГО РАССЛОЕНИЯ

В. М. Миллионщиков

Показателем Ляпунова λ_f функции $f(\cdot)$ действительного или натурального переменного, принимающей значения в нормированном пространстве, называется

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left|f(t)\right|$$

($\ln 0$ считается равным $-\infty$). Показатель Ляпунова конкретной функции может быть действительным числом или одним из символов $-\infty$, $+\infty$. Если функция $f(\cdot)$ непрерывна, (что является ограничением, если область ее определения есть $\mathbf{R}$, но не является ограничением, если область определения есть $\mathbf{N}$), то приведенное выше определение показателя Ляпунова эквивалентно следующему определению:

$$\lambda_f=\inf\left\{\lambda\in\mathbf{R}:\exists C_\lambda\in\mathbf{R}\forall t\in \boldsymbol{M}:\left|f(t)\right|\right\}\leqslant C_\lambda\exp(\lambda t),$$

если стоящее справа от знака $\inf$ множество не пусто; если же оно пусто, то $\lambda_f=+\infty$. Через $\boldsymbol{M}$ здесь обозначено множество определения функции $f(\cdot)$. Наиболее интересными для нас случаями будут $\boldsymbol{M}=\mathbf{R}$ и $\boldsymbol{M}=\mathbf{N}$, но иногда нас будут интересовать и другие множества $\boldsymbol{M}$: наиболее общий случай, который мы будем рассматривать, — это множество $\boldsymbol{M}\subset\mathbf{R}$, имеющее $+\infty$ своей предельной точкой.

Показатели Ляпунова линейной дифференциальной или разностной системы определяются так. Из всех базисов векторного пространства решений выбираются те, для которых сумма показателей Ляпунова решений, образующих этот базис, принимает наименьшее значение. Такие базисы, называемые нормальными, всегда существуют. Расположив показатели Ляпунова решений нормального базиса в порядке невозрастания (некоторые авторы предпочитают располагать их в порядке неубывания), получают кортеж из n чисел, где n — размерность пространства решений. Этот кортеж называют спектром показателей Ляпунова рассматриваемой линейной системы. Кратностью показателя Ляпунова называют число его вхождений в этот кортеж. Доказывается, что такой кортеж не зависит от выбора нормального базиса, чем обосновывается корректность приведенного определения. Таков беглый обзор некоторых рассуждений А. М. Ляпунова [1, пп. 6— 8, 10]. Имеются и несколько иные формы изложения элементов теории показателей Ляпунова [2, 3].

Линейная дифференциальная (разностная) система может быть как исходным предметом рассмотрения, так и возникать на определенном этапе рассмотрения нелинейной системы или некоторого класса нелинейных систем. При этом зачастую представляет интерес рассмотрение не только одной какой-либо системы, полученной в результате линеаризации, но и рассмотрение некоторого множества таких систем, причем это множество сообразно природе рассматриваемых вопросов обычно бывает наделено той или иной структурой.

Статья, предлагаемая вниманию читателей, написана с целью дать изложение элементов теории показателей Ляпунова на таком уровне общности, который позволил бы во всех интересных с точки зрения автора случаях опираться на это изложение, не повторяя каждый раз одни и те же или весьма сходные рассуждения.

Опишем сначала объекты, лежащие в основе этого абстрактного изложения.

§ 1. 1. *Абстрактное векторное расслоение.* Так будем называть тройку (E,p,B), где E, B — некоторые множества, p — некоторое отображение E на B, причем на полном прообразе $p^{-1}(b)$ всякой точки $b\in B$ задана структура n-мерного векторного пространства; здесь нас будет интересовать в качестве такового $\mathbf{R}^n$, но можно рассматривать и $\mathbf{C}^n$, причем для перехода от действительного случая к комплексному в нашем изложении не потребовалось бы существенных изменений; E будем называть пространством абстрактного векторного расслоения (E,p,B), p — проекцией, B — базой, $p^{-1}(b)$ — слоем над точкой b, $\mathbf{R}^n$ — стандартным слоем.

В приложениях описанный объект обычно наделен той или иной дополнительной структурой — топологической, метрической (или в смысле метризации топологического пространства или в смысле теории меры), дифференцируемой, аналитической или какой-либо иной структурой, но здесь мы рассматриваем именно тот объект, который определен выше. Слово «абстрактное» предпослано словам «векторное расслоение» именно с целью подчеркнуть отличие используемой здесь терминологии от терминологии, принятой в некоторых книгах по топологии, где под словами «пространство», «отображение» и т. п. понимаются соответственно «топологическое пространство», «непрерывное отображение» и т. п. В нашем изложении никакие прилагательные подобного рода не подразумеваются, если не написаны явно.

2. *Риманова метрика на абстрактном векторном расслоении.* Задать риманову метрику на абстрактном векторном расслоении — значит на каждом его слое задать структуру евклидова пространства, т. е. фиксировать скалярное произведение. Иными словами, риманова метрика на абстрактном векторном расслоении есть отображение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ множества пар (ξ,η) таких, что $\xi\in E$, $\eta\in E$, $p\xi=p\eta$, в действительную прямую $\mathbf{R}$, причем при всяком $b\in B$ сужение этого отображения на $p^{-1}(b)\times p^{-1}(b)$ есть скалярное произведение на векторном пространстве $p^{-1}(b)$. Если (E,p,B) — не абстрактное, а понимаемое в обычном — топологическом — смысле этого термина векторное расслоение, то от римановой метрики требуют, чтобы она обладала известным свойством непрерывности, но в рассматриваемой сейчас абстрактной ситуации говорить о непрерывности не приходится. Абстрактное векторное расслоение, на котором задана риманова метрика, будем называть метризованным абстрактным векторным расслоением. Для краткости слово «абстрактное» иногда будем опускать. Такое сокращение имеется в названии этой статьи.

3. *Эндоморфизм абстрактного векторного расслоения.* Так будем называть пару отображений $X:E\to E$, $\chi:B\to B$, удовлетворяющую совокупности двух условий: 1) $pX=\chi p$; 2) для всякого $b\in B$ сужение $X[b]\overset{\mathrm{def}}{=}X|_{p^{-1}(b)}$ отображения X на слой над точкой b есть линейное отображение $p^{-1}(b)\to p^{-1}(\chi b)$.

И здесь подчеркнем, что хотя одним из основных частных случаев для нас являются эндоморфизмы обычных (в топологическом смысле) векторных расслоений, где отображения X и χ непрерывны, в рассматриваемой здесь абстрактной ситуации X и χ — отображения множеств, не наделенных топологией, и поэтому не только не требуется, чтобы они были непрерывны, но и сама возможность наложить такое требование отсутствует.

4. *Семейство эндоморфизмов абстрактного векторного расслоения.* Так мы будем называть отображение $\mathfrak{M}$ множества $M\subset\mathbf{R}$ в множество эндоморфизмов абстрактного векторного расслоения. При этом обычно будем требовать, чтобы множество M имело $+\infty$ своей предельной точкой, а абстрактное векторное расслоение было метризованным. Значение отображения $\mathfrak{M}$ в точке $t\in M$ будем обозначать так: (X_t,χ_t). Одним из

основных частных случаев у нас будет такой: $\mathfrak{M}$ — гомоморфизм аддитивной полугруппы $\mathbf{R}^+$ (или $\mathbf{Z}^+$) в мультипликативную полугруппу эндоморфизмов абстрактного векторного расслоения, удовлетворяющих условию: $\chi_t B = B$ для всякого $t \in \mathbf{R}^+$ ($t \in \mathbf{Z}^+$). В этом случае вместо $\mathfrak{M}$ будем использовать обозначение $\mathfrak{H}$.

§ 2. 1. Пусть (E, p, B) — метризованное абстрактное векторное расслоение с стандартным слоем $\mathbf{R}^n$ и римановой метрикой $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Пусть $M \subset \mathbf{R}$ — некоторое множество, имеющее $+\infty$ своей предельной точкой. Пусть $\mathfrak{M}$ — отображение множества $\boldsymbol{M}$ в множество эндоморфизмов абстрактного векторного расслоения (E, p, B). Напомним, что образом $\mathfrak{M}t$ точки $t \in \boldsymbol{M}$ при отображении $\mathfrak{M}$ является пара (X_t, χ_t), где X_t — отображение $E \to E$, а χ_t — отображение $B \to B$, причем $pX_t = \chi_t p$ и для всякого $b \in B$ сужение $X_t[b]$ отображения X_t на слой $p^{-1}(b)$ есть линейное отображение слоя $p^{-1}(b)$ в слой $p^{-1}(\chi_t b)$.

2. Для всякого $\xi \in E$ *показатель Ляпунова* $\lambda(\mathfrak{M}, \xi)$ семейства эндоморфизмов $\mathfrak{M}$ в точке ξ определен формулой

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |X_t \xi|. \tag{1}$$

Поясним, что $\ln 0$ полагается равным $-\infty$, в выражении «$t \to +\infty$» имеется в виду, что t стремится к $+\infty$, оставаясь в множестве $\boldsymbol{M}$, а норма любого вектора $\eta \in E$ определяется через риманову метрику по формуле $|\eta| = \langle \eta, \eta \rangle^{1/2}$. В частности, для нулевого вектора $\xi \in E$ (т. е. для нуля любого слоя) показатель Ляпунова равен $-\infty$.

Л Е М М А 1. *Для всяких* $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$ *и всяких* $\xi \in E$, $\eta \in E$, *удовлетворяющих условию* $p\xi = p\eta$, *имеет место неравенство*

$$\lambda(\mathfrak{M}, \alpha\xi + \beta\eta) \leqslant \max\{\lambda(\mathfrak{M}, \xi), \lambda(\mathfrak{M}, \eta)\}. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны числа $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$ и векторы $\xi \in E$, $\eta \in E$, принадлежащие одному и тому же слою, т. е. такие, что $p\xi = p\eta$.

Если $\alpha = \beta = 0$, то левая часть неравенства (2) равна $-\infty$, и все доказано. Пусть хоть одно из чисел α, β отлично от нуля. Имеет место следующая цепочка:

$$\lambda(\mathfrak{M}, \alpha\xi + \beta\eta) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |X_t(\alpha\xi + \beta\eta)| = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |\alpha X_t \xi + \beta X_t \eta| \leqslant \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln (|\alpha| \cdot |X_t \xi| + |\beta| \cdot |X_t \eta|) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln \left[(|\alpha| + |\beta|) \max\{|X_t \xi|, |X_t \eta|\} \right] = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \left[\frac{1}{t} \ln (|\alpha| + |\beta|) + \frac{1}{t} \ln \max\{|X_t \xi|, |X_t \eta|\} \right].$$

Так как $|\alpha| + |\beta| > 0$, то

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln (|\alpha| + |\beta|) = 0,$$

поэтому правая часть последнего равенства написанной цепочки равна

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln \max\{|X_t \xi|, |X_t \eta|\} = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \max\left\{ \frac{1}{t} \ln |X_t \xi|, \frac{1}{t} \ln |X_t \eta| \right\} = \max\left\{ \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |X_t \xi|, \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |X_t \eta| \right\} =$$

$$= \max\{\lambda(\mathfrak{M}, \xi), \lambda(\mathfrak{M}, \eta)\}.$$

Лемма доказана.

3. При всяких $b \in B$, $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$ (напомним, что через $\overline{\mathbf{R}}$ обозначается расширенная числовая прямая, получаемая присоединением к $\mathbf{R}$ двух элементов: $-\infty$ и $+\infty$) рассмотрим множество уровня показателей Ляпунова, определяемое формулой

$$E(\mathfrak{M}, b, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M}, \xi)\}. \tag{3}$$

Здесь мы несколько отклонились от принятого употребления термина «множество уровня»; обычно этот термин применяется для обозначения прообраза множества, состоящего из единственной точки λ, а у нас этим термином обозначается прообраз множества $[-\infty,\lambda]\subset\bar{\mathbf{R}}$.

Из леммы 1 и предшествующей ее формулировке фразы следует, что при всяких $b\in B$, $\lambda\in\bar{\mathbf{R}}$ множество $E(\mathfrak{M},b,\lambda)$, определенное формулой (3), является векторным подпространством слоя $p^{-1}(b)$. Из формулы (3) следует, что для всяких $\mu\in\bar{\mathbf{R}}$, $\nu\in\bar{\mathbf{R}}$, связанных неравенством $\mu\geq\nu$, имеет место нестрогое включение $E(\mathfrak{M},b,\mu)\subset E(\mathfrak{M},b,\nu)$ (при всяком $b\in B$).

Множество всех векторных подпространств любого векторного пространства V будем обозначать через $\tilde{V}$. В частности, для всякого $b\in B$ через $\widetilde{p^{-1}(b)}$ обозначается множество всех векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$.

Л Е М М А 2. *Для всякого $b\in B$ отображение*

$$E(\mathfrak{M},b,\cdot):\bar{\mathbf{R}}\to\widetilde{p^{-1}(b)} \tag{4}$$

принимает не более $n+1$ различных значений.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть дано $b\in B$. Предположим, что отображение (4) принимает более $n+1$ различных значений, т. е. для некоторых $\mu_0<\ldots<\mu_{n+1}$ множества $E(\mathfrak{M},b,\mu_k)$ ($k\in\{0,\ldots,n+1\}$) все различны. Из цепочки $\mu_0<\ldots<\mu_{n+1}$, и даже из цепочки нестрогих неравенств $\mu_0\leq\ldots\leq\mu_{n+1}$, в силу формулы (3) следует цепочка нестрогих включений

$$E(\mathfrak{M},b,\mu_0)\subset\ldots\subset E(\mathfrak{M},b,\mu_{n+1});$$

а так как все входящие сюда множества различны, то включения в действительности — строгие. Такого быть не может, так как $E(\mathfrak{M},b,\mu_k)$ ($k\in\{0,\ldots,n+1\}$) суть векторные подпространства n-мерного векторного пространства $p^{-1}(b)$. Придя к противоречию, мы доказали, что отображение (4) принимает не более $n+1$ различных значений. Лемма 2 доказана.

4. Пусть дано $b\in B$. Вследствие леммы 2 найдется $m\in\{0,\ldots,n\}$ и найдутся $\mu_s\in\bar{\mathbf{R}}$ ($s\in\{0,\ldots,m\}$) такие, что $E(\mathfrak{M},b,\mu_0),\ldots,E(\mathfrak{M},b,\mu_m)$ суть все значения отображения (4), причем все эти значения различны. Занумеровав элементы $\mu_s\in\bar{\mathbf{R}}$ ($s\in\{0,\ldots,m\}$) в порядке возрастания и учитывая, что вследствие формулы (3) отображение (4) монотонно неубывающее, получаем цепочку строгих включений

$$E(\mathfrak{M},b,\mu_0)\subset\ldots\subset E(\mathfrak{M},b,\mu_m), \tag{5}$$

про которую известно, что для всякого $\lambda\in\bar{\mathbf{R}}$ подпространство $E(\mathfrak{M},b,\lambda)$ совпадает с одним из подпространств

$$E(\mathfrak{M},b,\mu_s)\ \ s\in\{0,\ldots,m\}.$$

Отметим, что весь слой $p^{-1}(b)$ всегда является одним из значений отображения (4), поскольку $E(\mathfrak{M},b,+\infty)=p^{-1}(b)$ — это следует из формулы (3); точка $+\infty$, конечно, не обязана быть единственной точкой, в которой отображение (4) принимает значение $p^{-1}(b)$, но, во всяком случае, из сделанного замечания вытекает равенство

$$E(\mathfrak{M},b,\mu_m)=p^{-1}(b). \tag{6}$$

С другой стороны, нулевое подпространство $\{0_b\}$ не обязано быть значением отображения (4), т. е. подпространство $E(\mathfrak{M},b,\mu_0)$ не обязательно равно $\{0_b\}$. В случае $E(\mathfrak{M},b,\mu_0)\neq\{0_b\}$ из цепочки строгих включений (5), формулы (6) и равенства $\dim p^{-1}(b)=n$ следует строгое неравенство $m<n$.

5. Исходя из цепочки строгих включений (5), напишем цепочку нестрогих включений следующим образом: подпространство $E(\mathfrak{M},b,\mu_0)$ напишем столько раз подряд, какова

его размерность (в частности, если это подпространство — нулевое, то в новой цепочке оно вовсе не будет фигурировать), а затем каждое из подпространств $E(\mathfrak{M},b,\mu_s)$ ($s\in\{1,...,m\}$) (если $m\neq 0$) напишем столько раз подряд, каково число $\dim E(\mathfrak{M},b,\mu_s)-\dim E(\mathfrak{M},b,\mu_{s-1})$. Так возникает цепочка нестрогих включений

$$E_1(\mathfrak{M},b)\subset ...\subset E_n(\mathfrak{M},b), \tag{7}$$

где

$$E_n(\mathfrak{M},b)=p^{-1}(b); \tag{8}$$

последнее следует в силу (6).

Более формальное определение подпространств $E_k(\mathfrak{M},b)=(k\in\{1,...,n\})$, входящих в цепочку (7), таково. Положим (если $m\neq 0$)

$$E_k(\mathfrak{M},b)=E(\mathfrak{M},b,\mu_s) \tag{9}$$

при

$$k\in\{\dim E(\mathfrak{M},b,\mu_{s-1})+1,\dim E(\mathfrak{M},b,\mu_s)\},$$

где $s\in\{1,...,m\}$. Если $E(\mathfrak{M},b,\mu_0)\neq\{0_b\}$, то, кроме того, при всяком $k\in\{1,...,\dim E(\mathfrak{M},b,\mu_0)\}$ положим

$$E_k(\mathfrak{M},b)=E(\mathfrak{M},b,\mu_0) \tag{10}$$

Из (6) следует, что таким образом подпространства $E_k(\mathfrak{M},b)$ определены при всех $k\in\{1,...,n\}$.

6. *Показатель Ляпунова* $\lambda_k(\mathfrak{M},b)$ семейства эндоморфизмов $\mathfrak{M}$ определяется при всяких $k\in\{1,...,n\}$, $b\in B$ формулой

$$\lambda_k(\mathfrak{M},b)=\sup_{\xi\in E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)}\lambda(\mathfrak{M},\xi), \tag{11}$$

где $\lambda(\mathfrak{M},\xi)$ определено формулой (1), а подпространства $E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)$ определены в п. 5.

7. ЛЕММА 3. *При всяком $b\in B$ сужение отображения $\lambda(\mathfrak{M},\cdot)$: $E\to\overline{R}$ на подпространство $E(\mathfrak{M},b,\mu_0)$ тождественно равно $-\infty$.*

Доказательство. Пусть дано $b\in B$. Предположим, что найдется $\xi\in E(\mathfrak{M},b,\mu_0)$, для которого

$$v\overset{def}{=}\lambda(\mathfrak{M},\xi)\neq-\infty. \tag{12}$$

Из того, что $v=\lambda(\mathfrak{M},\xi)$, где $\xi\in E(\mathfrak{M},b,\mu_0)$, в силу (3) следует включение

$$E(\mathfrak{M},b,v)\subset E(\mathfrak{M},b,\mu_0) \tag{13}$$

Фиксируем любое $\mu\in\overline{R}$ такое, что

$$\mu<v \tag{14}$$

(существование такого μ вытекает из неравенства в формуле (12)). Из (14) вследствие монотонности отображения

$$E(\mathfrak{M},b,\cdot):\overline{R}\to\widetilde{p^{-1}(b)}$$

вытекает включение

$$E(\mathfrak{M},b,\mu)\subset E(\mathfrak{M},b,v), \tag{15}$$

которое является строгим, так как в силу (3), (12) вектор ξ содержится в $E(\mathfrak{M},b,v)$, а в силу (3), равенства в формуле (12) и формулы (14) этот же вектор ξ не содержится в

$E(\mathfrak{M},b,\mu)$. Из (13) и строгого включения (15) вытекает строгое включение $E(\mathfrak{M},b,\mu)\subset E(\mathfrak{M},b,\mu_0)$, из которого следует, что $E(\mathfrak{M},b,\mu)$ является значением отображения

$$E(\mathfrak{M},b,\cdot):\overline{R}\to\widetilde{p^{-1}(b)},$$

отличным от $E(\mathfrak{M},b,\mu_s)(s\in\{0,...,m\})$. Это противоречит определению набора подпространств $E(\mathfrak{M},b,\mu_s)(s\in\{0,...,m\})$, приведенному в п. 4. Лемма доказана.

Прежде чем формулировать следующую лемму, напомним одно обозначение, используемое, в частности, в ее формулировке: звездочка справа внизу означает выбрасывание нуля.

ЛЕММА 4. *При всяком $b\in B$ сужение отображения*

$$\lambda(\mathfrak{M},\cdot):E\to\overline{R}$$

на любое из множеств $E_1(\mathfrak{M},b)_*$, $E_{k+1}(\mathfrak{M},b)\setminus E_k(\mathfrak{M},b)(k\in\{1,...,n-1\})$ постоянно (если множество не пусто).

Доказательство. Пусть дано $b\in B$.

1) Для доказательства постоянства отображения

$$\lambda(\mathfrak{M},\cdot)|_{E_1(\mathfrak{M},b)_*}$$

рассмотрим два случая.

Первый случай: $E(\mathfrak{M},b,\mu_0)=\{0_b\}$. В этом случае $E_1(\mathfrak{M},b)$ определяется формулой (9): $E_1(\mathfrak{M},b)=E(\mathfrak{M},b,\mu_1)$. Предположим, что найдутся $\xi\in E(\mathfrak{M},b,\mu_1)_*$, $\eta\in E(\mathfrak{M},b,\mu_1)_*$ такие, что

$$v\overset{def}{=}\lambda(\mathfrak{M},\xi)<\lambda(\mathfrak{M},\eta). \tag{16}$$

Из того, что $v=\lambda(\mathfrak{M},\xi)$, где $\xi\in E(\mathfrak{M},b,\mu_1)$, в силу (3) следует включение

$$E(\mathfrak{M},b,v)\subset E(\mathfrak{M},b,\mu_1). \tag{17}$$

Вследствие формулы (3) и неравенства в формуле (16) вектор $\eta\in E(\mathfrak{M},b,\mu_1)$ не содержится в $E(\mathfrak{M},b,v)$. Следовательно, включение (17) — строгое. Так как в силу (3) и равенства в формуле (16) ненулевой вектор ξ содержится в $E(\mathfrak{M},b,v)$, то $E(\mathfrak{M},b,v)\neq\{0_b\}$. Последнее неравенство в рассматриваемом сейчас случае эквивалентно неравенству $E(\mathfrak{M},b,v)\neq E(\mathfrak{M},b,\mu_0)$. Это неравенство в сочетании со строгим включением (17) означает, что имеется значение отображения

$$E(\mathfrak{M},b,\cdot):\overline{R}\to\widetilde{p^{-1}(b)},$$

не равное ни одному из $E(\mathfrak{M},b,\mu_s)(s\in\{0,...,m\})$, что противоречит их определению, приведенному в п. 4. Полученное противоречие доказывает, что в случае $E(\mathfrak{M},b,\mu_0)=\{0_b\}$ сужение отображения $\lambda(\mathfrak{M},\cdot)$ на множество $E_1(\mathfrak{M},b)_*$ постоянно.

Второй случай: $E(\mathfrak{M},b,\mu_0)\neq\{0_b\}$. В этом случае $E_1(\mathfrak{M},b)$ определяется формулой (10):

$$E_1(\mathfrak{M},b)=E(\mathfrak{M},b,\mu_0),$$

в силу которой постоянство сужения отображения $\lambda(\mathfrak{M},\cdot)$ на множество $E_1(\mathfrak{M},b)_*$ вытекает из леммы 3. В силу леммы 3 это отображение в рассматриваемом случае тождественно равно $--\infty$.

2) Пусть дано $k \in \{1,...,n-1\}$, и множество $E_{k+1}(\mathfrak{M},b) \setminus E_k(\mathfrak{M},b)$ не пусто. Согласно п. 5 найдутся $r \in \{0,...,m\}$, $s \in \{0,...,m\}$ такие, что $s-r$ равно либо 0, либо 1, и

$$E_k(\mathfrak{M},b) = E(\mathfrak{M},b,\mu_r), \tag{18}$$

$$E_{k+1}(\mathfrak{M},b) = E(\mathfrak{M},b,\mu_s). \tag{19}$$

Возможность $s-r=0$ отпадает, так как в этом случае разность множеств (19) и (18) была бы пустой. Поэтому $s=r+1$, и формула (19) переписывается в виде

$$E_{k+1}(\mathfrak{M},b) = E(\mathfrak{M},b,\mu_{r+1}). \tag{20}$$

Предположим, что в множестве

$$E_{k+1}(\mathfrak{M},b) \setminus E_k(\mathfrak{M},b) = E(\mathfrak{M},b,\mu_{r+1}) \setminus E(\mathfrak{M},b,\mu_r)$$

найдутся точки ξ, η такие, что

$$v \overset{def}{=} \lambda(\mathfrak{M},\xi) < \lambda(\mathfrak{M},\eta). \tag{21}$$

Из того, что $v = \lambda(\mathfrak{M},\xi)$, где $\xi \in E(\mathfrak{M},b,\mu_{r+1})$, в силу (3) следует включение

$$E(\mathfrak{M},b,v) \subset E(\mathfrak{M},b,\mu_{r+1}). \tag{22}$$

Вследствие формулы (3) и неравенства в формуле (21) вектор $\eta \in E(\mathfrak{M},b,\mu_{r+1})$ не принадлежит подпространству $E(\mathfrak{M},b,v)$. Следовательно, включение (22) — строгое. Из того, что $v = \lambda(\mathfrak{M},\xi)$, где $\xi \in p^{-1}(b) \setminus E(\mathfrak{M},b,\mu_r)$, в силу (3) вытекает строгое включение

$$E(\mathfrak{M},b,\mu_r) \subset E(\mathfrak{M},b,v). \tag{23}$$

Согласно определению набора подпространств $E(\mathfrak{M},b,\mu_t)\big(t \in \{0,...,m\}\big)$, данному в п. 4, $E(\mathfrak{M},b,v)$ должно совпадать с одним из этих подпространств, а это противоречит тому, что в формулах (5), (22), (23) все включения — строгие. Лемма 4 доказана.

Л Е М М А 5. *Для всякого $b \in B$ сужение отображения*

$$\lambda(\mathfrak{M},\cdot): E \to \overline{R}$$

на слой $p^{-1}(b)$ принимает не более $n+1$ различных значений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дано $b \in B$. Вследствие формулы (8) слой $p^{-1}(b)$ является объединением $n+1$ множеств: $\{0_b\}$, $E_1(\mathfrak{M},b)_*$, $E_{k+1}(\mathfrak{M},b) \setminus E_k(\mathfrak{M},b)\big(k \in \{1,...,n-1\}\big)$. Множество $\{0_b\}$ состоит из одной точки, а сужение отображения $\lambda(\mathfrak{M},\cdot): E \to \overline{R}$ на любое из остальных n перечисленных множеств постоянно в силу леммы 4 (если это множество не пусто). Лемма доказана.

П р е д л о ж е н и е 1. *Для всякого $b \in B$ имеет место цепочка неравенств*

$$\lambda_1(\mathfrak{M},b) \ge ... \ge \lambda_n(\mathfrak{M},b). \tag{24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дано $b \in B$. В силу (7) имеем

$$E_n(\mathfrak{M},b) \supset ... \supset E_1(\mathfrak{M},b),$$

откуда

$$\sup_{\xi \in E_n(\mathfrak{M},b)} \lambda(\mathfrak{M},\xi) \ge ... \ge \sup_{\xi \in E_1(\mathfrak{M},b)} \lambda(\mathfrak{M},\xi).$$

В силу формулы (11) последняя цепочка переписывается в виде (24). Предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 2. *При всяких $k \in \{1,...,n\}$, $b \in B$ имеет место равенство*

$$\lambda_k(\mathfrak{M},b) = \max_{\xi \in E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)} \lambda(\mathfrak{M},\xi),$$

т. е. верхняя грань в формуле (11) достигается.

Доказательство. Так как $E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b) \subset p^{-1}(b)$ при всяких $k \in \{1,...,n\}$, $b \in B$, то предложение 2 вытекает из леммы 5. Предложение доказано.

ЛЕММА 6. *Для всяких* $b \in B$, $\mu \in \overline{R}$ *имеет место формула*

$$E(\mathfrak{M},b,\mu) = \left\{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M},\xi) \le \max_{\eta \in E(\mathfrak{M},b,\mu)} \lambda(\mathfrak{M},\eta)\right\}.$$

Доказательство. Пусть даны $b \in B$, $\mu \in \overline{R}$. Напомним, что max в доказываемой формуле существует вследствие леммы 5 и что согласно формуле (3)

$$E(\mathfrak{M},b,\mu) = \left\{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M},\xi) \le \mu\right\}.$$

Отсюда следует, что для всякого $\eta \in E(\mathfrak{M},b,\mu)$ имеет место неравенство $\lambda(\mathfrak{M},\eta) \le \mu$. Поэтому

$$\max_{\eta \in E(\mathfrak{M},b,\mu)} \lambda(\mathfrak{M},\eta) \le \mu.$$

Следовательно,

$$\left\{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M},\xi) \le \max_{\eta \in E(\mathfrak{M},b,\mu)} \lambda(\mathfrak{M},\eta)\right\} \subset \left\{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M},\xi) \le \mu\right\} = E(\mathfrak{M},b,\mu).$$

С другой стороны,

$$E(\mathfrak{M},b,\mu) \subset \left\{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M},\xi) \le \max_{\eta \in E(\mathfrak{M},b,\mu)} \lambda(\mathfrak{M},\eta)\right\},$$

потому что для всякого $\xi \in E(\mathfrak{M},b,\mu)$ имеет место неравенство

$$\lambda(\mathfrak{M},\xi) \le \max_{\eta \in E(\mathfrak{M},b,\mu)} \lambda(\mathfrak{M},\eta).$$

Соединив два доказанных включения, получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Предложение 3. *Для всяких* $k \in \{1,...,n\}$, $b \in B$ *имеет место равенство*

$$E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b) = \left\{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M},\xi) \le \lambda_k(\mathfrak{M},\mathrm{b})\right\}.$$

Доказательство. Пусть даны $k \in \{1,...,n\}$, $b \in B$. Возьмем $s \in \{0,...,m\}$ такое, что

$$E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b) = E(\mathfrak{M},b,\mu_s); \tag{25}$$

такое s существует в силу определения подпространства $E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)$ — см. п. 5. В силу леммы 6 имеем равенство

$$E(\mathfrak{M},b,\mu_s) = \left\{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M},\xi) \le \max_{\eta \in E(\mathfrak{M},b,\mu_s)} \lambda(\mathfrak{M},\eta)\right\},$$

которое с помощью формулы (25) переписывается в виде

$$E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b) = \left\{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M},\xi) \le \max_{\eta \in E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)} \lambda(\mathfrak{M},\eta)\right\}.$$

Воспользовавшись предложением 2, перепишем последнее равенство в виде

$$E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b) = \left\{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M},\xi) \le \lambda_k(\mathfrak{M},\mathrm{b})\right\}.$$

Предложение доказано.

Предложение 4. *Для всякого* $b \in B$ *имеют место равенства:* $\lambda(\mathfrak{M},\xi) = \lambda_n(\mathfrak{M},\mathrm{b})$ *при всяком* $\xi \in E_1(\mathfrak{M},b)_*$, $\lambda(\mathfrak{M},\xi) = \lambda_n(\mathfrak{M},\mathrm{b})$ *при всяком* $\xi \in E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b) \setminus E_{n-k}(\mathfrak{M},b) \left(k \in \{1,...,n-1\}\right)$.

Доказательство. Пусть дано $b \in B$. 1) Из предложения 2 (положив в нем $k = n$) имеем

$$\lambda_n(\mathfrak{M},\mathrm{b}) = \max_{\xi \in E_1(\mathfrak{M},b)} \lambda(\mathfrak{M},\xi). \tag{26}$$

Далее,

$$\max_{\xi\in E_1(\mathfrak{M},b)} \lambda(\mathfrak{M},\xi) = \max_{\xi\in E_1(\mathfrak{M},b)_*} \lambda(\mathfrak{M},\xi), \tag{27}$$

так как $\lambda(\mathfrak{M},0_b) = -\infty$. Из (26), (27) следует равенство

$$\lambda_n(\mathfrak{M},\mathrm{b}) = \max_{\xi\in E_1(\mathfrak{M},b)_*} \lambda(\mathfrak{M},\xi),$$

из которого вытекает, что $\lambda_n(\mathfrak{M},\mathrm{b})$ является одним из значений сужения отображения $\lambda(\mathfrak{M},\cdot)$ на множество $E_1(\mathfrak{M},b)_*$. В силу леммы 4 это сужение есть постоянное отображение. Следовательно, $\lambda(\mathfrak{M},\xi) = \lambda_n(\mathfrak{M},\mathrm{b})$ при всяком $\xi \in E_1(\mathfrak{M},b)_*$.

2) Пусть $k \in \{1,...,n-1\}$ таково, что множество $E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)\setminus E_{n-k}(\mathfrak{M},b)$ не пусто (если это множество пусто, то не существует ни одного ξ, принадлежащего этому множеству, и тогда доказывать нечего). Из предложения 2 имеем

$$\lambda_k(\mathfrak{M},\mathrm{b}) = \max_{\xi\in E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)} \lambda(\mathfrak{M},\xi). \tag{28}$$

Из непустоты множества $E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)\setminus E_{n-k}(\mathfrak{M},b)$, т. е. из неравенства $E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b) \ne E_{n-k}(\mathfrak{M},b)$, следует неравенство

$$\lambda_k(\mathfrak{M},\mathrm{b}) \ne \lambda_{k+1}(\mathfrak{M},\mathrm{b}), \tag{29}$$

так как в силу предложения 3 имеем

$$\begin{aligned} E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b) &= \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M},\xi) \le \lambda_k(\mathfrak{M},\mathrm{b})\}, \\ E_{n-k}(\mathfrak{M},b) &= \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{M},\xi) \le \lambda_{k+1}(\mathfrak{M},\mathrm{b})\}. \end{aligned} \tag{30}$$

Из (29) в силу предложения 1 вытекает строгое неравенство $\lambda_k(\mathfrak{M},\mathrm{b})>\lambda_{k+1}(\mathfrak{M},\mathrm{b})$. Из этого неравенства и формул (28), (30) следует, что $\lambda_k(\mathfrak{M},\mathrm{b})$ является одним из значений сужения отображения $\lambda(\mathfrak{M},\cdot): E \to \overline{R}$ на множество $E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)\setminus E_{n-k}(\mathfrak{M},b)$. В силу леммы 4 это сужение есть постоянное отображение. Поэтому $\lambda(\mathfrak{M},\xi) = \lambda_k(\mathfrak{M},\mathrm{b})$ для всякого $\xi \in E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)\setminus E_{n-k}(\mathfrak{M},b)$. Предложение 4 доказано.

Предложение 5. *Для всякого* $b \in B$ *имеет место равенство*

$$\dim E_n(\mathfrak{M},b) = n.$$

При всяких $k \in \{1,...,n-1\}$, $b \in B$ *имеет место неравенство*

$$\dim E_k(\mathfrak{M},b) \ge k,$$

а для равенства $\dim E_k(\mathfrak{M},b) = k$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$E_{k+1}(\mathfrak{M},b) \ne E_k(\mathfrak{M},b).$$

Доказательство. Пусть дано $b \in B$. Равенство $\dim E_n(\mathfrak{M},b) = n$ следует из формулы (8).

1) Вследствие (5), (6) всякое $k \in \{1,...,n\}$ принадлежит либо (первый случай) множеству

$$\{1,...,\dim E(\mathfrak{M},b,\mu_0)\} \tag{31}$$

(определенному в случае $E(\mathfrak{M},b,\mu_0) \ne \{0_b\}$), либо (второй случай) одному из множеств

$$\{\dim E(\mathfrak{M},b,\mu_{s-1})+1, \dim E(\mathfrak{M},b,\mu_s)\} \tag{32}$$

($s \in \{1,...,m\}$). В любом из этих случаев вследствие построений п. 5 для некоторого $s \in \{0,...,m\}$ имеют место неравенство

$$k \le \dim E(\mathfrak{M}, b, \mu_s) \tag{33}$$

и равенство $\dim E_k(\mathfrak{M}, b) = \dim E(\mathfrak{M}, b, \mu_s)$, вытекающие в первом случае из (10), а во втором — из (9). Поэтому $\dim E_k(\mathfrak{M}, b) \ge k$ для всякого $k \in \{1,...,n\}$, а равенство здесь наступает в том и только том случае, если в (33) — равенство, т. е. если

$$k = \dim E(\mathfrak{M}, b, \mu_s) \tag{34}$$

для некоторого $s \in \{0,...,m\}$.

2) Пусть дано $k \in \{1,...,n-1\}$, удовлетворяющее равенству (34) для некоторого $s \in \{0,...,m\}$. Это s не может равняться m, так как $\dim E(\mathfrak{M}, b, \mu_m) = n > n-1$ в силу (6). Поэтому (34) выполнено для некоторого $s \in \{0,...,m-1\}$. Следовательно (см. фразы, содержащие формулы (9), (10)),

$$E_k(\mathfrak{M}, b) = E(\mathfrak{M}, b, \mu_s). \tag{35}$$

Из (34) следует также, что $k+1 = \dim E(\mathfrak{M}, b, \mu_s) + 1$, откуда (см. фразу, содержащую формулу (9), где надо теперь вместо k взять $k+1$, а вместо s взять $s+1$) вытекает равенство

$$E_{k+1}(\mathfrak{M}, b) = E(\mathfrak{M}, b, \mu_{s+1}). \tag{36}$$

Из (35), (36) следует, что $E_{k+1}(\mathfrak{M}, b) \ne E_k(\mathfrak{M}, b)$, так как все включения в цепочке (5) — строгие.

3) Пусть дано $k \in \{1,...,n-1\}$, не удовлетворяющее равенству (34) ни при каком $s \in \{0,...,m\}$. Это означает, что k не является наибольшим элементом того из множеств (31), (32), в котором оно содержится. Поэтому $k+1$ содержится в том же множестве (31) или (32), в котором содержится k. Отсюда (см. фразы, содержащие формулы (9), (10)) следует, что $E_{k+1}(\mathfrak{M}, b) = E_k(\mathfrak{M}, b)$. Предложение 5 доказано.

§ 3. Показатель Ляпунова $\lambda_k^*(\mathfrak{M}, \mathrm{b})$ семейства $\mathfrak{M}$ эндоморфизмов абстрактного векторного расслоения (E, p, B), наделенного римановой метрикой $<\cdot,\cdot>$, определяется при всяких $k \in \{1,...,n\}$, $b \in B$ формулой

$$\lambda_k^*(\mathfrak{M}, \mathrm{b}) = \inf_{R^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \sup_{\xi \in R^{n-k+1}} \lambda(\mathfrak{M}, \xi), \tag{37}$$

где $G_q(p^{-1}(b))$ — грассманово многообразие q-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$.

Так как при всяком $b \in B$ отображение

$$\lambda(\mathfrak{M}, \cdot)|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \to \overline{R}$$

принимает в силу леммы 5 лишь конечное множество различных значений, то верхняя и нижняя грани в формуле (37) достигаются, и потому эта формула может быть переписана в виде

$$\lambda_k^*(\mathfrak{M}, \mathrm{b}) = \min_{R^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{\xi \in R^{n-k+1}} \lambda(\mathfrak{M}, \xi). \tag{38}$$

Т Е О Р Е М А**.** Для всяких $q \in \{1,...,n\}$, $b \in B$ имеет место равенство

$$\lambda_q^*(\mathfrak{M}, \mathrm{b}) = \lambda_q(\mathfrak{M}, \mathrm{b}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть даны $q \in \{1,...,n\}$, $b \in B$.

1) В силу предложения 5 имеет место неравенство

$$\dim E_{n-q+1}(\mathfrak{M},b)\geq n-q+1.$$
Поэтому существует $R_0^{n-q+1}\in G_{n-q+1}\left(p^{-1}(b)\right)$, являющееся подмножеством в $E_{n-q+1}(\mathfrak{M},\mathrm{b})$ и потому удовлетворяющее неравенству
$$\sup_{\xi\in R_0^{n-q+1}}\lambda(\mathfrak{M},\xi)\leq\sup_{\xi\in E_{n-q+1}(\mathfrak{M},\mathrm{b})}\lambda(\mathfrak{M},\xi).$$
Отсюда следует неравенство
$$\inf_{R^{n-q+1}\in G_{n-q+2}\left(p^{-1}(b)\right)}\sup_{\xi\in R^{n-q+1}}\lambda(\mathfrak{M},\xi)\leq\sup_{\xi\in E_{n-q+1}(\mathfrak{M},\mathrm{b})}\lambda(\mathfrak{M},\xi).$$
Левая часть этого неравенства равна $\lambda_q^*(\mathfrak{M},\mathrm{b})$ в силу формулы (37), служащей определением показателей $\lambda_k^*(\mathfrak{M},\mathrm{b})$, а правая часть равна $\lambda_q(\mathfrak{M},\mathrm{b})$ — в силу формулы (11), служащей определением показателей $\lambda_k(\mathfrak{M},\mathrm{b})$. Поэтому доказанное неравенство переписывается в виде
$$\lambda_q^*(\mathfrak{M},\mathrm{b})\leq\lambda_q(\mathfrak{M},\mathrm{b}).\tag{39}$$
2) Обозначим через t максимальный из тех индексов $k\in\{1,...,n\}$, для которых $E_{n-k+1}(\mathfrak{M},\mathrm{b})=E_{n-q+1}(\mathfrak{M},\mathrm{b})$. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $t=n$. В этом случае $E_{n-q+1}(\mathfrak{M},\mathrm{b})=E_{n-t+1}(\mathfrak{M},\mathrm{b})$ при $t=n$, откуда в силу (11) следует равенство
$$\lambda_q(\mathfrak{M},\mathrm{b})=\lambda_n(\mathfrak{M},\mathrm{b}).\tag{40}$$
Так как $p^{-1}(b)=E_n(\mathfrak{M},b)$ (формула (8)), то множество $p^{-1}(b)_*$ ненулевых векторов слоя $p^{-1}(b)$ является объединением множеств $E_1(\mathfrak{M},b)_*$, $E_{k+1}(\mathfrak{M},b)\setminus E_k(\mathfrak{M},b)$ $\left(k\in\{1,...,n-1\}\right)$. В силу предложения 4 отображение $\lambda(\mathfrak{M},\cdot):E\to\overline{R}$ принимает на этих множествах только значения $\lambda_1(\mathfrak{M},\mathrm{b}),...,\lambda_n(\mathfrak{M},\mathrm{b})$, из которых наименьшим, вследствие предложения 1, является $\lambda_n(\mathfrak{M},\mathrm{b})$. Поэтому $\lambda(\mathfrak{M},\xi)\geq\lambda_n(\mathfrak{M},\mathrm{b})$ для всякого $\xi\in p^{-1}(b)_*$. Отсюда вытекает, что
$$\sup_{\xi\in R^{n-q+1}}\lambda(\mathfrak{M},\xi)\geq\lambda_n(\mathfrak{M},\mathrm{b})$$
для всякого $R^{n-q+1}\in G_{n-q+1}\left(p^{-1}(b)\right)$. Следовательно,
$$\inf_{R^{n-q+1}\in G_{n-q+1}\left(p^{-1}(b)\right)}\sup_{\xi\in R^{n-q+1}}\lambda(\mathfrak{M},\xi)\geq\lambda_n(\mathfrak{M},\mathrm{b}).$$
Левая часть этого неравенства в силу формулы (37), взятой при $k=q$, равна $\lambda_q^*(\mathfrak{M},\mathrm{b})$. Поэтому $\lambda_q^*(\mathfrak{M},\mathrm{b})\geq\lambda_n(\mathfrak{M},\mathrm{b})$, что в сочетании с формулой (40) дает неравенство $\lambda_q^*(\mathfrak{M},\mathrm{b})\geq\lambda_q(\mathfrak{M},\mathrm{b})$.

Второй случай: $t<n$. В этом случае
$$E_{n-k+1}(\mathfrak{M},b)=E_{n-q+1}(\mathfrak{M},b)\tag{41}$$
при всяком $k\in\{q,...,t\}$ (это следует из (7)), а
$$E_{n-t}(\mathfrak{M},b)\neq E_{n-q+1}(\mathfrak{M},b).\tag{42}$$
Из формулы (41), взятой при $k=t$, и формулы (42) следует неравенство $E_{n-t}(\mathfrak{M},b)\neq E_{n-t+1}(\mathfrak{M},b)$. Отсюда в силу предложения 5 вытекает равенство $\dim E_{n-t}(\mathfrak{M},b)=n-t$. Так как $t\geq q$, то $\dim E_{n-t}(\mathfrak{M},b)\leq n-q$. Поэтому для всякого $R^{n-q+1}\in G_{n-q+1}\left(p^{-1}(b)\right)$ имеет место неравенство

$$R^{n-q+1} \setminus E_{n-t}(\mathfrak{M}, b) \neq \varnothing. \tag{43}$$

Вследствие равенства $p^{-1}(b) = E_n(\mathfrak{M}, b)$ (формула (8)) множество $p^{-1}(b) \setminus E_{n-t}(\mathfrak{M}, b)$ есть объединение множеств $E_{n-s+1}(\mathfrak{M}, b) \setminus E_{n-s}(\mathfrak{M}, b)$ $(s \in \{1, ..., t\})$. Отсюда в силу предложения 4 вытекает, что для всякого $\xi \in p^{-1}(b) \setminus E_{n-t}(\mathfrak{M}, b)$ показатель $\lambda(\mathfrak{M}, \xi)$ принимает одно из значений $\lambda_s(\mathfrak{M}, \mathrm{b})$ $(s \in \{1, ..., t\})$. Вследствие предложения 1 наименьшим из этих значений является $\lambda_t(\mathfrak{M}, \mathrm{b})$. Положив $k = t$ в формуле (41), получим

$$E_{n-t+1}(\mathfrak{M}, b) = E_{n-q+1}(\mathfrak{M}, b);$$

отсюда в силу (11) следует равенство $\lambda_t(\mathfrak{M}, \mathrm{b}) = \lambda_q(\mathfrak{M}, \mathrm{b})$. Итак, для всякого $\xi \in p^{-1}(b) \setminus E_{n-t}(\mathfrak{M}, b)$ имеет место неравенство $\lambda(\mathfrak{M}, \xi) \geq \lambda_q(\mathfrak{M}, \mathrm{b})$. Для всякого $R^{n-q+1} \in G_{n-q+1}(p^{-1}(b))$ вследствие формулы (43) найдется $\xi \in R^{n-q+1}$, принадлежащее множеству $p^{-1}(b) \setminus E_{n-t}(\mathfrak{M}, b)$ и потому имеющее показатель $\lambda(\mathfrak{M}, \xi) \geq \lambda_q(\mathfrak{M}, \mathrm{b})$. Поэтому для всякого $R^{n-q+1} \in G_{n-q+1}(p^{-1}(b))$ имеет место неравенство

$$\sup_{\xi \in R^{n-q+1}} \lambda(\mathfrak{M}, \xi) \geq \lambda_q(\mathfrak{M}, \mathrm{b}).$$

Отсюда

$$\inf_{R^{n-q+1} \in G_{n-q+1}(p^{-1}(b))} \sup_{\xi \in R^{n-q+1}} \lambda(\mathfrak{M}, \xi) \geq \lambda_q(\mathfrak{M}, \mathrm{b}).$$

Левая часть этого неравенства вследствие формулы (37), взятой при $k = q$, равна $\lambda_q^*(\mathfrak{M}, \mathrm{b})$. Поэтому

$$\lambda_q^*(\mathfrak{M}, \mathrm{b}) \geq \lambda_q(\mathfrak{M}, \mathrm{b}). \tag{44}$$

Итак, в обоих случаях доказано неравенство (44). Соединив его с (39), получаем равенство $\lambda_q^*(\mathfrak{M}, \mathrm{b}) = \lambda_q(\mathfrak{M}, \mathrm{b})$. Теорема доказана.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
10.01.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ляпунов А. М. Собр. соч., т. 2.—М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

[2] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.— М.: Наука, 1966.

[3] Изобов Н. А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.— В кн.: Итоги науки и техники (Мат. анализ), т. 12, М.: Изд-во ВИНИТИ, 1974, с 71—146.