МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 37, № 4 [1985]

О НЕКОТОРЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

В. М. Миллионщиков

Интерес к объектам, рассматриваемым в этой статье, возникает в связи с некоторыми вопросами теории показателей Ляпунова (см., например, [1]). К таким вопросам относится вопрос об изучении множества точек полунепрерывности показателей Ляпунова, рассматриваемых как функции на том или ином топологическом пространстве, точкой которого является задача Коши. При рассмотрении подобного рода вопросов удобно пользоваться некоторыми метриками в соответствующих топологических пространствах. Обычно при этом существенную роль играет полнота метрического пространства, но бывает так, что ту же топологию можно задать другой метрикой, определяемой проще, в результате чего формулировки теорем выигрывают в простоте.

В предлагаемой вниманию читателя статье изучаются те метрические пространства, которые возникают при рассмотрении дискретно-временного аналога задачи Коши. Как известно, дискретно-временным аналогом дифференциального уравнения служит отображение (аналог автономного дифференциального уравнения) или последовательность отображений (аналог неавтономного дифференциального уравнения). Эти объекты соотносятся друг с другом следующим образом. Если дано дифференциальное уравнение, то можно рассмотреть последовательность отображений $\{X_m\}$, ставящих в соответствие начальному значению всякого решения значение того же решения в момент времени m (термин «время» носит здесь условный характер, так называется независимое переменное, какое бы физическое истолкование оно ни допускало). Если дифференциальное уравнение автономно, т. е. имеет вид

$$\dot{x} = f(x),$$

то так определенные отображения являются степенями некоторого отображения: $X_m = X^m$, поэтому поведение решений рассматриваемого дифференциального уравнения в целочисленные моменты времени полностью определяется одним отображением X. Это отображение (или множество его степеней) и называют дискретно-временным аналогом дифференциального уравнения. На эту же роль, но не на любом многообразии, а лишь на векторном пространстве, имеется и другой претендент — разностное уравнение (система); известно, впрочем, что рассмотрение автономного разностного уравнения вполне адекватно рассмотрению отображения X, определяемого по решениям этого уравнения точно так же, как выше по решениям дифференциального уравнения определено отображение X (для дифференциального уравнения столь же полной, как для разностного уравнения, адекватности нет).

Рассмотрение дискретно-временных аналогов дифференциальных уравнений в ряде отношений ничем не отличается от рассмотрения дифференциальных уравнений, но в некоторых отношениях, конечно, проще. Последнее легко понять, если принять во внимание, что в дискретно-временном варианте вопрос о существовании решения решается, очевидно, много проще, чем для дифференциального уравнения.

Однако, возможно, не всем читателям случалось обращать внимание на то обстоятельство, что имеются и такие вопросы, изучение которых в дискретно-временном варианте требует несколько больше работы, чем в варианте с непрерывным временем. Такого рода вопросы имеются, в частности, в том разделе теории показателей Ляпунова, который мы бегло обрисовали в начале статьи. Так, метрики в пространствах диффеоморфизмов определяются более сложным образом, чем в пространствах векторных полей. Это вполне естественно, поскольку сравнивать производные отображений в точке сложнее, чем сравнивать производные векторных полей: в первом случае приходится прибегать к параллельному перенесению, во втором — нет.

После этих вводных замечаний перейдем к основному изложению, содержание которого — рассмотрение метрик в некоторых множествах диффеоморфизмов произвольного риманова многообразия.

Пусть V — связное n-мерное дифференцируемое (класса C^2) многообразие со счетной базой, на котором фиксирована некоторая риманова метрика $\delta(\cdot,\ \cdot)$ (класса C^1).

Как известно, с помощью римановой метрики многообразие V наделяется структурой метрического пространства. Напомним, как это делается. Для всяких $y \in V$, $z \in V$ через $G(y,\ z)$ обозначается множество всех кусочно-гладких путей, идущих из точки z в точку y; при этом под кусочно-гладким путем, идущим из точки z в точку y, понимается непрерывное отображение $u:[0,\ 1] \to V$ (значение этого отображения в точке t обозначаем через u_t), имеющее кусочно-непрерывную производную и принимающее в точке $t=0$ значение z ($u_0 = z$), а в точке $t=1$ — значение $y: u_1 = y$. Как известно, из связности дифференцируемого многообразия V вытекает, что $G(y,\ z) \neq \varnothing$ для всяких точек $y \in V$, $z \in V$; в частности, множество $G(y,\ y)$ содержит путь u, определяемый формулой $u_t \equiv y$ ($t \in [0,\ 1]$); длина пути u определяется формулой

$$s(u) = \int_0^1 [\delta(\dot{u}_t,\ \dot{u}_t)]^{1/2}\,\mathrm{d}t; \tag{1}$$

в частности, длина пути, определенного формулой $u_t \equiv y$, равна нулю; расстояние $\rho(\cdot,\ \cdot)$ задается формулой

$$\rho(y,\ z) = \inf_{u \in G(y,\ z)} s(u) \tag{2}$$

для всяких точек $y \in V$, $z \in V$, где $s(u)$ определена формулой (1).

Обозначим через S множество диффеоморфизмов f класса C^1, отображающих V на V и удовлетворяющих условию

$$\max\{|||\,\mathrm{d}f\,|||,\ |||\,(\mathrm{d}f)^{-1}\,|||\} < +\infty, \tag{3}$$

где

$$|||\,\mathrm{d}f\,||| = \sup_{x \in V} \|\,\mathrm{d}f_x\,\|,\ |||\,(\mathrm{d}f)^{-1}\,||| = \sup_{x \in V} \|\,(\mathrm{d}f_x)^{-1}\,\|. \tag{4}$$

Для пояснения формулы (4) заметим, что для всякого, дифференцируемого отображения f его производная $\mathrm{d}f_x$ в точке x есть линейное отображение касательного пространства T_xV в точке x в касательное пространства $T_{fx}V$ в точке fx; для диффеоморфизма f это отображение есть невырожденное линейное отображение T_xV на $T_{fx}V$; риманова метрика $\delta(\cdot,\ \cdot)$ на V индуцирует на касательных пространствах многообразия V структуры евклидовых пространств, что позволяет определить норму производной в точке и норму обратного к ней отображения;

$$\|\,\mathrm{d}f_x\,\| = \sup_{\mathfrak{x} \in T_xV} \{|\,\mathrm{d}f_x\mathfrak{x}\,| \cdot |\,\mathfrak{x}\,|^{-1}\}, \tag{5}$$

$$\|\,(\mathrm{d}f_x)^{-1}\,\| = \sup_{\mathfrak{y} \in T_{fx}V} \{|\,(\mathrm{d}f_x)^{-1}\mathfrak{y}\,| \cdot |\,\mathfrak{y}\,|^{-1}\}, \tag{6}$$

где $|\,\mathfrak{z}\,| = [\delta(\mathfrak{z},\ \mathfrak{z})]^{1/2}$.

Для всякого $j \in S$ рассмотрим множество S_j всех диффеоморфизмов f, принадлежащих множеству S и удовлетворяющих дополнительному условию

$$\sup_{x \in V} \rho(fx,\ jx) < +\infty. \tag{7}$$

Для всякого $j \in S$ определим отображения

$$d_j : S_j \times S_j \to \overline{\mathbf{R}},\ \tilde{d}_j : S_j \times S_j \to \overline{\mathbf{R}}$$

($\overline{\mathbf{R}}$ — расширенная числовая прямая: $\overline{\mathbf{R}} = \{-\infty\} \bigcup \mathbf{R} \bigcup \{+\infty\}$) формулами

$$\begin{aligned} d_j(f,\ g) = \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx,\ gx)} \{s(u) + \\ + \| \varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x \| + \| (\varphi_u \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1} \| \}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\tilde{d}_j(f,\ g) = \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx,\ gx)} \{s(u) + \| \varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x \| \}. \tag{9}$$

В этих формулах преобразование $\varphi_u : T_z V \to T_y V$ есть параллельный перенос вдоль пути $u \in G(y,\ z)$ иными словами, для всякого $\mathfrak{x} \in T_z V$ вектор $\varphi_u \mathfrak{x} \in T_y V$ есть результат параллельного перенесения вектора $\mathfrak{x}$ вдоль пути u; параллельное перенесение осуществляется с помощью римановой связности, индуцированной римановой метрикой $\delta(\cdot,\ \cdot)$; известно, что так определенное отображение $\varphi_u : T_z V \to T_y V$ есть изоморфизм касательных пространств (как евклидовых пространств); в частности, если $u_t \equiv y$, то $\varphi_u = 1_{T_y V}$.

П р е д л о ж е н и е 1. *При всяком* $j \in S$ *формула* (8) *определяет расстояние* $d_j(\cdot,\ \cdot)$ *на* S_j

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть дано $j \in S$.

1) Для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$ имеет место неравенство $d_j(f,\ g) < +\infty$. Докажем это.

Пусть даны $f \in S_j$, $g \in S_j$. Для всякого $x \in V$ для всякого пути $u \in G(fx,\ gx)$ имеем

$$\begin{aligned} \| \varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x \| \leqslant \| \varphi_u \| \| \mathrm{d}g_x \| + \| \mathrm{d}f_x \| = \\ = \| \mathrm{d}g_x \| + \| \mathrm{d}f_x \| \leqslant ||| \mathrm{d}g ||| + ||| \mathrm{d}f |||; \end{aligned} \tag{10}$$

равенство в цепочке (10) вытекает из того, что φ_u — изоморфизм евклидовых пространств. Для всяких $x \in V$, $u \in G(fx,\ gx)$ имеем

$$\begin{aligned} \| (\varphi_u \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1} \| \leqslant \| (\mathrm{d}g_x)^{-1} \| \cdot \| (\varphi_u)^{-1} \| + \| (\mathrm{d}f_x)^{-1} \| = \\ = \| (\mathrm{d}g_x)^{-1} \| + \| (\mathrm{d}f_x)^{-1} \| \leqslant ||| (\mathrm{d}g)^{-1} ||| + ||| (\mathrm{d}f)^{-1} |||. \end{aligned} \tag{11}$$

Последние неравенства в цепочках (10), (11) — следствия формулы (4). Из неравенств (10), (11) следует, что для всяких $x \in V$, $u \in G(fx,\ gx)$ имеем

$$\begin{aligned} s(u) + \| \varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x \| + \| (\varphi_u \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1} \| \leqslant \\ \leqslant \| s(u) + ||| \mathrm{d}f ||| + ||| (\mathrm{d}f)^{-1} ||| + ||| \mathrm{d}g ||| + ||| (\mathrm{d}g)^{-1} |||. \end{aligned}$$

Следовательно, для всякого $x \in V$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \inf_{u \in G(fx,\ gx)} \{s(u) + \| \varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x \| + \| (\varphi_u \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1} \| \} \leqslant \\ \leqslant ||| \mathrm{d}f ||| + ||| (\mathrm{d}f)^{-1} ||| + ||| \mathrm{d}g ||| + ||| (\mathrm{d}g)^{-1} ||| + \inf_{u \in G(fx,\ gx)} s(u) \end{aligned}$$

последнее слагаемое в правой части которого в силу формулы (2) равно $\rho(fx,\ gx)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx,\ gx)} \{s(u) + \| \varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x \| + \| (\varphi_u \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1} \| \} \leqslant \\ \leqslant ||| \mathrm{d}f ||| + ||| (\mathrm{d}f)^{-1} ||| + ||| \mathrm{d}g ||| + ||| (\mathrm{d}g)^{-1} ||| + \sup_{x \in V} \rho(fx,\ gx) < +\infty; \end{aligned} \tag{12}$$

последнее неравенство в этой цепочке — следствие того, что $f \in S$, $g \in S$ (см. формулу (3)) и цепочки неравенств $\sup\limits_{x \in V} \rho(fx,\ gx) \leqslant \sup\limits_{x \in V} [\rho(fx,\ jx) + \rho(gx,\ jx)] < +\infty$, последнее неравенство в которой — следствие того, что $f \in S_j$, $g \in S_j$ (см. формулу (7)). Из формулы (12), левая часть которой в силу (8) равна $d_j(f, g)$, следует неравенство $d_j(f, g) < +\infty$. Утверждение, сформулированное в начале п. 1, доказано.

2) Для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$ имеет место неравенство

$$d_j(f, g) \geqslant 0, \tag{13}$$

непосредственно вытекающее из формулы (8).

Итог п. 1), 2): формула (8) определяет отображение

$$d_j : S_j \times S_j \to \mathbf{R}^+.$$

3) Для всякого $f \in S_j$ имеет место равенство $d_j(f, f) = 0$. Докажем это.

Пусть дано $f \in S_j$. Для всякого $x \in V$ множество $G(fx, fx)$ содержит путь $u(fx) : u(fx)_t = fx$. Для этого пути $s(u(fx)) = 0$, $\varphi_{u(fx)} = 1_{T_{fx}V}$.

Таким образом, для всякого $x \in V$ имеется путь $u \in G(fx, gx)$, для которого

$$s(u) + \| \varphi_u \mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_x \| + \| (\varphi_u \mathrm{d}f_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1} \| = 0. \tag{14}$$

Следовательно, в силу формулы (8) имеем $d_j(f, f) \leqslant 0$. Отсюда в силу п. 2), содержащего формулу (13), следует равенство

$$d_j(f, f) = 0. \tag{15}$$

4) Если $f \in S_j$, $g \in S_j$ удовлетворяют равенству

$$d_j(f, g) = 0, \tag{16}$$

то $f = g$. Докажем это.

Пусть даны $f \in S_j$, $g \in S_j$ удовлетворяющие равенству (16). Из формулы (2) для всякого $x \in V$ имеем

$$\begin{aligned}\rho(fx, gx) &= \inf_{u \in G(fx, gx)} s(u) \leqslant \\ &\leqslant \inf_{u \in G(fx, gx)} \{ s(u) + \| \varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x \| + \| (\varphi_u \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1} \| \} \leqslant 0;\end{aligned}$$

последнее неравенство этой цепочки — следствие формул (8), (16). Следовательно, для всякого $x \in V$ выполнено равенство $fx = gx$. Равенство $f = g$ доказано.

5) Для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$ имеет место равенство $d_j(f, g) = d_j(g, f)$. Докажем это.

Пусть даны $f \in S_j$, $g \in S_j$. Для всяких $y \in V$, $z \in V$, для всякого пути $u \in G(y, z)$ обозначим через u^{-1} путь, определенный формулой $(u^{-1})_t = u_{1-t}$ $(t \in [0, 1])$. Из этого определения следует, что если $u \in G(y, z)$, то $u^{-1} \in G(z, y)$, и что $u = (u^{-1})^{-1}$. При этом из определения длины пути следует тождество

$$s\left(u^{-1}\right) = s\left(u\right), \tag{17}$$

а из определения параллельного переноса вытекает тождество

$$\varphi_{u^{-1}} = \left(\varphi_u\right)^{-1}. \tag{18}$$

Для всяких $x \in V$, $u \in G\left(fx, gx\right)$ имеет место равенство

$$\varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x = \varphi_u \left[\mathrm{d}g_x - \left(\varphi_u\right)^{-1} \mathrm{d}f_x \right],$$

из которого вследствие (18) вытекает равенство $\varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x = \varphi_u \left[\mathrm{d}g_x - \varphi_{u^{-1}} \mathrm{d}f_x \right]$, откуда следует (поскольку φ_u — изоморфизм евклидовых пространств) формула

$$\left\| \varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x \right\| = \left\| \varphi_{u^{-1}} \mathrm{d}f_x - \mathrm{d}g_x \right\|. \tag{19}$$

Для всяких $x \in V$, $u \in G\left(fx, gx\right)$ имеет место цепочка равенств:

$$(\varphi_u \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1} = \left[(\mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1}\varphi_u\right](\varphi_u)^{-1} = \left[(\mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1}\left(\varphi_{u^{-1}}\right)^{-1}\right](\varphi_u)^{-1} = \\ = \left[(\mathrm{d}g_x)^{-1} - \left(\varphi_{u^{-1}}\mathrm{d}f_x\right)^{-1}\right](\varphi_u)^{-1}; \tag{20}$$

предпоследнее равенство этой цепочки — следствие формулы (18). Так как φ_u — изоморфизм евклидовых пространств, то из (20) следует равенство

$$\left\|(\varphi_u \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1}\right\| = \left\|(\varphi_u \mathrm{d}f_x)^{-1} - (\mathrm{d}g_x)^{-1}\right\|. \tag{21}$$

При всяких $x \in V$, $u \in G(fx, gx)$ имеет место равенство (получаемое сложением равенств (17), (19), (21))

$$s(u) + \|\varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x\| + \left\|(\varphi_u \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1}\right\| = s\left(u^{-1}\right) + \left\|\varphi_{u^{-1}}\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}g_x\right\| + \left\|\left(\varphi_{u^{-1}}\mathrm{d}f_x\right)^{-1} - (\mathrm{d}g_x)^{-1}\right\|.$$

Отсюда

$$\inf_{u\in G(fx,gx)}\left\{s(u) + \|\varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x\| + \left\|(\varphi_u \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1}\right\|\right\} = \\ = \inf_{v\in G(fx,gx)}\left\{s(v) + \|\varphi_v \mathrm{d}f_x - \mathrm{d}g_x\| + \left\|(\varphi_v \mathrm{d}f_x)^{-1} - (\mathrm{d}g_x)^{-1}\right\|\right\}$$

при всяком $x \in V$. Взяв от обеих частей полученного равенства точную верхнюю грань по $x \in V$, получаем равенство, которое в силу формулы (8) и формулы, полученной из нее заменой f на g, а g на f, записывается в виде $d_j(f,g) = d_j(g,f)$. Утверждение, сформулированное в начале пункта, доказано.

6) Для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$, $h \in S_j$ имеет место неравенство $d_j(f,g) \leqslant d_j(f,h) + d_j(h,g)$. Докажем это.

Пусть даны $f \in S_j$, $g \in S_j$, $h \in S_j$. Для всяких $x \in V$, $y \in V$, $z \in V$, $u \in G(x,y)$, $v \in G(y,z)$ обозначим через $u \circ v$, путь, определенный формулой

$$(u \circ v) = \begin{cases} v_{21} & \text{при} \quad t \in [0, 1/2), \\ u_{2t-1} & \text{при} \quad t \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Из этой формулы следует, что $u \circ v \in G(x,z)$. Кроме того, в силу этой формулы из определения длины пути следует равенство

$$s(u \circ v) = s(u) + s(v), \tag{22}$$

а из определения параллельного перенесения вдоль пути следует равенство

$$\varphi_{u\circ v} = \varphi_u \varphi_v. \tag{23}$$

Для всяких $x \in V$, $u \in G(fx, hx)$, $v \in G(hx, gx)$ имеют место равенства

$$\varphi_{u\circ v}\mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x = \varphi_u\varphi_v \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x = \varphi_u(\varphi_v \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}h_x) + \varphi_u \mathrm{d}h_x - \mathrm{d}f_x,$$

из которых следует неравенство

$$\|\varphi_{u\circ v}\mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x\| \leqslant \|\varphi_v \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}h_x\| + \|\varphi_u \mathrm{d}h_x - \mathrm{d}f_x\|. \tag{24}$$

Для всяких $x \in V$, $u \in G(fx, hx)$, $v \in G(hx, gx)$ имеет место цепочка равенств

$$(\varphi_{u\circ v}\mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1} = (\mathrm{d}g_x)^{-1}(\varphi_{u\circ v})^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1} = (\mathrm{d}g_x)^{-1}(\varphi_u\varphi_v)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1} = \\ = \left[(\mathrm{d}g_x)^{-1}(\varphi_v)^{-1} - (\mathrm{d}h_x)^{-1}\right](\varphi_u)^{-1} + (\mathrm{d}h_x)^{-1}(\varphi_u)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1} = \\ = \left[(\varphi_v \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}h_x)^{-1}\right](\varphi_u)^{-1} + (\varphi_u \mathrm{d}h_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1};$$

второе равенство в этой цепочке — следствие формулы (23); из этих равенств следует неравенство

$$\left\|(\varphi_{u\circ v}\mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1}\right\| \leqslant \left\|(\varphi_v \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}h_x)^{-1}\right\| + \left\|(\varphi_u \mathrm{d}h_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1}\right\|, \tag{25}$$

так как φ_u — изоморфизм евклидовых пространств. Для всяких $x \in V$, $u \in G(fx, hx)$, $v \in G(hx, gx)$ имеет место неравенство, получаемое почленным сложением равенства (22) и неравенств (24) и (25):

$$s(u \circ v) + \|\varphi_{u\circ v} \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x\| + \left\|(\varphi_{u\circ v} \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1}\right\| \leqslant \left[s(u) + \|\varphi_u \mathrm{d}h_x - \mathrm{d}f_x\| + \left\|(\varphi_u \mathrm{d}h_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1}\right\|\right] + \\ + \left[s(v) + \|\varphi_v \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}h_x\| + \left\|(\varphi_v \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}h_x)^{-1}\right\|\right]$$

При любом фиксированном $x \in V$ первая квадратная скобка в правой части этого неравенства зависит только от u, а вторая — только от v, поэтому при всяком $x \in V$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} &\inf_{\substack{u \in G(fx,hx)\\ v\in G(hx,gx)}} \left[s(u \circ v) + \|\varphi_{u\circ v} \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x\| + \left\|(\varphi_{u\circ v} \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1}\right\|\right] \leqslant \\ &\leqslant \inf_{u \in G(fx,hx)} \left[s(u) + \|\varphi_u \mathrm{d}h_x - \mathrm{d}f_x\| + \left\|(\varphi_u \mathrm{d}h_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1}\right\|\right] + \\ &+ \inf_{v \in G(hx,gx)} \left[s(v) + \|\varphi_v \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}h_x\| + \left\|(\varphi_v \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}h_x)^{-1}\right\|\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

Так как $u \circ v \in G(fx, gx)$ при всяких $x \in V$, $u \in G(fx, hx)$, $v \in G(hx, gx)$, то для всякого $x \in V$ из (26) следует неравенство

$$\begin{aligned} &\inf_{w \in G(fx,gx)} \left[s(w) + \|\varphi_w \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x\| + \left\|(\varphi_w \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1}\right\|\right] \leqslant \\ &\leqslant \inf_{u \in G(fx,hx)} \left[s(u) + \|\varphi_u \mathrm{d}h_x - \mathrm{d}f_x\| + \left\|(\varphi_u \mathrm{d}h_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1}\right\|\right] + \\ &+ \inf_{v \in G(hx,gx)} \left[s(v) + \|\varphi_v \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}h_x\| + \left\|(\varphi_v \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}h_x)^{-1}\right\|\right]. \end{aligned}$$

Взяв от обеих частей этого неравенства точную верхнюю грань по $x \in V$ и воспользовавшись тем, что

$$\sup_{a\in A}\left[\alpha(a) + \beta(a)\right] \leqslant \sup_{a\in A} \alpha(a) + \sup_{a\in A} \beta(a)$$

для всяких функций $\alpha(\cdot): A \to \mathbf{R}$, $\beta(\cdot): A \to \mathbf{R}$, где A — произвольное множество, получаем неравенство

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in V} \inf_{w \in G(fx,gx)} \left[s(w) + \|\varphi_w \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x\| + \left\|(\varphi_w \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1}\right\|\right] \leqslant \\ &\leqslant \sup_{x\in V} \inf_{u \in G(fx,hx)} \left[s(u) + \|\varphi_u \mathrm{d}h_x - \mathrm{d}f_x\| + \left\|(\varphi_u \mathrm{d}h_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1}\right\|\right] + \\ &+ \sup_{x\in V} \inf_{v \in G(hx,gx)} \left[s(v) + \|\varphi_v \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}h_x\| + \left\|(\varphi_v \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}h_x)^{-1}\right\|\right], \end{aligned}$$

которое в силу формулы (8) и формул, полученных из нее заменами $g \mapsto h$ и $f \mapsto h$, переписывается в виде $d_j(f, g) \leqslant d_j(f, h) + d_j(h, g)$. Утверждение, сформулированное в начале пункта, доказано. Предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 2. *При всяком* $j \in S$ *формула* (9) *определяет расстояние* $\tilde{d}_j$ *на* S_j.

Доказательство этого предложения может быть проведено аналогично доказательству предложения 1, но мы докажем его несколько иначе; отметим, что по тому же плану могло бы быть доказано и предложение 1. Сначала изложим некоторый вспомогательный материал.

При всяком $x \in V$ рассмотрим множество J_xV пар (y, L), где $y \in V$, а $L \in \mathrm{Hom}(T_xV, T_yV)$, т. е. L есть линейное отображение касательного пространства в точке x в касательное пространство в точке y. Такую пару (y, L) будем называть 1-струей, вытекающей из точки x. Этот термин согласуется с общепринятым: обычно 1-струя определяется как класс эквивалентности дифференцируемых отображений по некоторому определенному отношению эквивалентности, которое можно описать как совпадение значений этих отображений и их производных первого порядка в данной точке x; поставив в соответствие всякому такому классу эквивалентности пару (y, L), где y — образ точки x при всяком отображении, являющемся представителем этого класса, а L — производная любого представителя этого класса, взятая в точке x, мы получаем отображение, устанавливающее соответствие стандартного определения с определением, приведенным выше.

ЛЕММА 1. *Для всяких* $y \in V$, $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$ *существует* $\delta \in \mathbf{R}_*^+$, *такое, что для всякого пути* $u \in G(y, y)$ *длины* $s(u) < \delta$ *выполнено неравенство* $\left\|\varphi_u - 1_{T_yV}\right\| < \varepsilon$.

Доказательство. Выберем карту некоторой открытой окрестности U точки y, в которой точке y соответствует точка $0 \in R^n$, где R^n — пространство столбцов из n действительных чисел. Фиксируем $\delta_0 \in \mathbf{R}_*^+$, такое, что замыкание δ_0-окрестности U_0 точки y (в пространстве (V, ρ)) компактно и содержится в U. Образ окрестности U_0 в выбранной карте обозначим W.

Риманова метрика $\delta(\cdot,\cdot)$ на V индуцирует на R^n скалярное произведение $(a, b)_z = g_{\alpha\beta}(z) a^\alpha b^\beta$, гладко зависящее от точки $z \in \overline{W}$; здесь и далее в доказательстве леммы 1 в выражениях, содержащих повторяющиеся вверху и внизу индексы, подразумевается суммирование от 1 до n. Найдется $c \in \mathbf{R}_*^+$, такое, что для символов Кристоффеля

$$\Gamma_{ij}^k(z) = \frac{1}{2} g^{kl}(z) \left[\frac{\partial g_{il}(z)}{\partial z^j} + \frac{\partial g_{jl}(z)}{\partial z^i} - \frac{\partial g_{ij}(z)}{\partial z^l} \right],$$

где (g^{kl}) — матрица, обратная к матрице ($g_{\alpha\beta}$), имеет место неравенство

$$\left|\Gamma_{ij}^k(z)\right| \leqslant c \tag{27}$$

для всяких $z \in \overline{W}$, $i, j, k \in \{1, ..., n\}$, а для нормы $|a|_z = \sqrt{(a, a)_z}$ всякого вектора $a \in R^n$ при всяком $z \in \overline{W}$ имеет место неравенство

$$c^{-1}|a|_0 \leqslant |a|_z \leqslant c|a|_0. \tag{28}$$

Пути $u \in G(y, y)$ длины $< \delta \leqslant \delta_0$ соответствует в выбранной карте кусочно-гладкая функция $v : [0, 1] \to W$, удовлетворяющая условиям

$$v(0) = v(1) = 0, \tag{29}$$

$$s(v) \underset{\text{def}}{=} \int_0^1 |\dot{v}(t)|_{\tau(t)} \, \mathrm{d}t < \delta. \tag{30}$$

Параллельному перенесению вдоль пути $u \in G(y, y)$ соответствует в этой карте отображение $a(0) \mapsto a(1)$, где $a(\cdot)$ — произвольное решение линейной системы дифференциальных уравнений $\dot{a} = A_v(t) a \quad (a \in R^n)$, в которой $A_v(t)$ — квадратная матрица с элементами $-\Gamma_{ij}^k(v(t)\dot{v}^i(t))$, ($j, k \in \{1, ..., n\}$). Неравенству $\left\|\varphi_u - 1_{T_yV}\right\| < \varepsilon$ соответствует в этой карте неравенство

$$|a(1) - a(0)|_0 < \varepsilon |a(0)|_0. \tag{31}$$

Поэтому для доказательства утверждения леммы достаточно доказать следующее вспомогательное утверждение. Для всякого $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$ найдется $\delta \in \mathbf{R}_*^+$, такое, что для всякой кусочно-гладкой функции $v:[0,1]\to W$, удовлетворяющей условиям (29), (30), для всякого решения $a(\cdot)\neq 0$ системы $\dot a = A_v(t)a$ имеет место неравенство (31).

Прежде чем доказывать это вспомогательное утверждение, заметим, что существует $c_1\in\mathbf{R}_*^+$, такое, что

$$c_1^{-1}|a|_0\leqslant\sum_{i=1}^n|a_i|\leqslant c_1|a|_0 \tag{32}$$

для всякого $a=\operatorname{col}\left(a^1,\dots,a^n\right)\in R^n$.

Пусть теперь $v:[0,1]\to W$ — кусочно-гладкая функция, удовлетворяющая условиям (29), (30). В силу леммы Гронуолла для всякого решения $a(\cdot)$ линейной системы дифференциальных уравнений

$$\dot a = A_v(t)a \tag{33}$$

при всяком $t\in[0,1]$ выполнено неравенство

$$|a(t)|_0\leqslant|a(0)|_0\exp\int_0^t\|A_v(\tau)\|_0^0\,\mathrm{d}\tau. \tag{34}$$

Через $\|A\|_0^0$ обозначена норма матрицы, индуцированная, нормой $|\cdot|_0$ в R^n, т. е. $\max\limits_{n\in R_*^n}\left\{|Aa|_0\left(|a|_0\right)^{-1}\right\}$; звездочка справа внизу означает выбрасывание нуля. Так как при всяком $\tau\in[0,1]$ для модуля всякого элемента матрицы $A_v(\tau)$ имеет место цепочка неравенств

$$\left|\Gamma_{ij}^k\left(v(\tau)\right)\dot v^i(\tau)\right|\leqslant c\sum_{i=1}^n\left|\dot v^i(\tau)\right|\leq cc_1\left|\dot v(\tau)\right|_0\leqslant c^2c_1\left|\dot v(\tau)\right|_{v(\tau)}.$$

(предпоследнее неравенство этой цепочки вытекает из: (32), последнее — из (28)), то при всяком $\tau\in[0,1]$ имеет место неравенство (см. (32))

$$\|A_v(\tau)\|_0^0\leqslant\bar c\left|\dot v(\tau)\right|_{v(\tau)}, \tag{35}$$

где $\bar c = nc^2c_1^3$. Из (34), (35) следует, что для всякого решения $a(\cdot)$ системы (33) при всяком $t\in[0,1]$ выполнено неравенство

$$|a(t)|_0\leqslant|a(0)|_0\exp\left(\int_0^t\left|\dot v(\tau)\right|_{v(\tau)}\mathrm{d}\tau\right). \tag{36}$$

Так как при всяком $t\in[0,1]$ в силу (30) имеем

$$\int_0^t\left|\dot v(\tau)\right|_{v(\tau)}\mathrm{d}\tau\leqslant\int_0^1\left|\dot v(\tau)\right|_{v(\tau)}\mathrm{d}\tau=s(v)<\delta,$$

то из (36) следует, что для всякого решения $a(\cdot)$ системы (33) при всяком $t\in[0,1]$ имеет место неравенство

$$|a(t)|_0\leqslant|a(0)|_0\exp(\bar c\delta). \tag{37}$$

Для всякого решения $a(\cdot)$ системы (33) имеем

$$|a(1)-a(0)|_0=\left|\int_0^1A_v(\tau)a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|_0\leqslant\int_0^1\|A_v(\tau)\|_0^0|a(\tau)|_0\,\mathrm{d}\tau.$$

В силу неравенств (35), (37) отсюда вытекает, что для всякого решения $a(\cdot)$ системы (33) выполнено неравенство

$$\left|a(1)-a(0)\right|_0 \leqslant \left|a(0)\right|_0 \left[\exp(\bar{c}\delta)\right]\bar{c}\int_0^1 \left\|\dot{v}(\tau)\right\|_{v(\tau)} \mathrm{d}\tau,$$

из которого вследствие условия (30) вытекает неравенство

$$\left|a(1)-a(0)\right|_0 \leqslant \left|a(0)\right|_0 \bar{c}\delta\exp(\bar{c}\delta).$$

Так как $s\exp s \to 0$ при $s \to 0$, то из доказанного следует, что для всякого $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$ найдется $\delta \in \mathbf{R}_*^+$, такое, что для всякой кусочно-гладкой функции $v:[0,1] \to W$, удовлетворяющей условиям (29), (30), для всякого решения $a(\cdot) \neq 0$ системы (33) имеет место неравенство (31). Вспомогательное утверждение доказано. Лемма 1 доказана.

П р е д л о ж е н и е 3. *При всяком* $x \in V$ *отображение* $\rho_x : J_xV \times J_xV \to \overline{\mathbf{R}}$, *определенное формулой*

$$\rho_x\left((y,L),(z,M)\right) = \inf_{u\in G(y,z)} \left\{s(u) + \left\|\varphi_u M - L\right\|\right\} \tag{38}$$

для любых $(y,L) \in J_xV$, $(z,M) \in J_xV$, *является расстоянием на* J_xV.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дано $x \in V$. 1) Так как при всяких $y \in V$, $z \in V$, $L \in \mathrm{Hom}(T_xV, T_yV)$, $M \in \mathrm{Hom}(T_xV, T_zV)$ фигурная скобка в правой части равенства (38) есть неотрицательное действительное число, то отображение $\rho_x : J_xV \times J_xV \to \overline{\mathbf{R}}$, определенное формулой (38), в действительности является отображением $J_xV \times J_xV \to \overline{\mathbf{R}}$. 2) Пусть дано $(y,L) \in J_xV$ Множество $G(y,y)$ содержит путь $u(y)$, определенный равенством $u(y)_t \equiv y\left(t \in [0,1]\right)$. Для этого пути имеют место равенства $s\left(u(y)\right) = 0$, $\varphi_{u(y)} = 1_{T_yV}$, поэтому

$$\rho_x\left((y,L),(y,L)\right) = \inf_{u\in G(y,y)} \left\{s(u) + \left\|\varphi_u L - L\right\|\right\} \leqslant s\left(u(y)\right) + \left\|\varphi_{u(y)}L - L\right\| = 0.$$

А так как в силу результата предыдущего пункта $\rho_x\left((y,L),(y,L)\right) \geq 0$, то $\rho_x\left((y,L),(y,L)\right) = 0$. 3) Для всяких $(y,L) \in J_xV$, $(z,M) \in J_xV$ из (38) следует неравенство

$$\rho_x\left((y,L),(z,M)\right) = \inf_{u\in G(y,y)} s(u),$$

правая часть которого в силу формулы (2) равна $\rho(y,z)$.

Пусть даны $(y,L) \in J_xV$, $(z,M) \in J_xV$, такие, что

$$\rho_x\left((y,L),(z,M)\right) = 0 \tag{39}$$

Тогда $\rho(y,z) \leqslant \rho_x\left((y,L),(z,M)\right) \leqslant 0$ и, следовательно, $y = z$. Из формул (38), (39) имеем поэтому

$$\inf_{u\in G(y,y)} \left\{s(u) + \left\|\varphi_u M - L\right\|\right\} = 0. \tag{40}$$

Пусть дано $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$. В силу леммы 1 найдется $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0,\varepsilon)$, такое, что для всякого пути $u \in G(y,y)$ длины $s(u) < \delta(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\left\|\varphi_u - I\right\| < \varepsilon$, где $I = 1_{T_yV}$. В силу (40) найдется путь $u\left(\delta(\varepsilon)\right) \in G(y,y)$, удовлетворяющий неравенству

$$s\left(u\left(\delta(\varepsilon)\right)\right) + \left\|\varphi_{u(\delta(\varepsilon))}M - L\right\| < \delta(\varepsilon); \tag{41}$$

так как из этого неравенства следует неравенство $s\left(u\left(\delta(\varepsilon)\right)\right) < \delta(\varepsilon)$, то в силу предыдущей фразы

$$\left\|\varphi_{u(\delta(\varepsilon))} - I\right\| < \varepsilon. \tag{42}$$

Кроме того, из (41) следует неравенство
$$\left\|\varphi_{u(\delta(\varepsilon))}M - L\right\| < \delta(\varepsilon) < \varepsilon. \tag{43}$$
Представив $L - M$ в виде $L - \varphi_{u(\delta(\varepsilon))}M + \left(\varphi_{u(\delta(\varepsilon))} - I\right)M$, получаем неравенство
$$\|L - M\| \leqslant \left\|\varphi_{u(\delta(\varepsilon))}M - L\right\| + \left\|\varphi_{u(\delta(\varepsilon))} - I\right\| \cdot \|M\|,$$
из которого вследствие (42), (43) вытекает, что $L - M\| \leqslant \varepsilon\left(1 + \|M\|\right)$. Так как $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$ произвольно, то из последнего неравенства следует $L = M$. Итак, доказано, что для всяких $(y, L) \in J_x V$, $(z, M) \in J_x V$ из (39) следует равенство $(y, L) \in (z, M)$.

Пусть $(y, L) \in J_x V$, $(z, M) \in J_x V$. Воспользовавшись равенством
$$\|\varphi_u M - L\| = \left\|-\varphi_u\left((\varphi_u)^{-1} L - M\right)\right\| = \left\|(\varphi_u)^{-1} L - M\right\|,$$
вытекающим из того, что φ_u — изоморфизм евклидовых пространств, перепишем формулу (38) в виде
$$\rho_x\left((y, L), (z, M)\right) = \inf_{u \in G(y,z)} \left\{s(u) + \left\|(\varphi_u)^{-1} L - M\right\|\right\}. \tag{44}$$

Для всякого пути u обозначим через u^{-1} путь, определенный формулой $\left(u^{-1}\right)_t = u_{1-t}\left(t \in [0,1]\right)$. Отображение $u \mapsto u^{-1}$ есть биекция множества $G(y, z)$ на множество $G(z, y)$, так как из $u^{-1} = v^{-1}$ следует $u = v$ и для всякого пути $w \in G(z, y)$ имеет место формула $w = u^{-1}$, где $u = w^{-1} \in G(y, z)$. Далее, из определения пути u^{-1} следуют тождества
$$s\left(u^{-1}\right) = s(u), \tag{45}$$
$$\varphi_{u^{-1}} = (\varphi_u)^{-1}. \tag{46}$$
Вследствие тождеств (45), (46) равенство (44) можно переписать в виде
$$\rho_x\left((y, L), (z, M)\right) = \inf_{u \in G(y,z)} \left\{s\left(u^{-1}\right) + \left\|\varphi_{u^{-1}} L - M\right\|\right\}. \tag{47}$$
Так как отображение $u \mapsto u^{-1}$ есть биекция $G(y, z)$ на $G(z, y)$, то
$$\inf_{u \in G(y,z)} \left\{s\left(u^{-1}\right) + \left\|\varphi_{u^{-1}} L - M\right\|\right\} = \inf_{u \in G(z,y)} \left\{s(v) + \|\varphi_v L - M\|\right\}. \tag{48}$$
Правая часть последнего равенства есть не что иное, как $\rho_x\left((z, M), (y, L)\right)$ (это следует из формулы, получающейся из (38) заменой $y \leftrightarrow z$, $L \leftrightarrow M$), а левая часть в силу формулы (47) равна $\rho_x\left((y, L), (z, M)\right)$. Тем самым доказано, что для всяких $(y, L) \in J_x V$, $(z, M) \in J_x V$ имеет место равенство $\rho_x\left((y, L), (z, M)\right) = \rho_x\left((z, M), (y, L)\right)$. 5) Пусть даны $(y, L) \in J_x V$, $(z, M) \in J_x V$, $(q, K) \in J_x V$. В силу определения отображения $\rho_x(\cdot, \cdot)$ (см. формулу (38)) имеем
$$\rho_x\left((y, L), (z, M)\right) = \inf_{u \in G(y,z)} \left\{s(u) + \|\varphi_u M - L\|\right\}, \tag{49}$$
$$\rho_x\left((y, L), (q, K)\right) = \inf_{v \in G(y,q)} \left\{s(v) + \|\varphi_v K - L\|\right\}, \tag{50}$$
$$\rho_x\left((q, K), (z, M)\right) = \inf_{w \in G(q,z)} \left\{s(w) + \|\varphi_w M - K\|\right\}. \tag{51}$$

Для всяких путей $v \in G(y, q)$, $w \in G(q, z)$ обозначим через $v \circ w$ путь $\in G(y, z)$, определенный формулой

$$\left(v\circ w\right)_t=\begin{cases}u_{2t} & \text{при} \quad t\in\left[0,1/2\right),\\ v_{2t-1} & \text{при} \quad t\in\left(1/2,1\right].\end{cases}$$

Так как для этого пути имеют место равенства

$$s(v\circ w)=s(v)+s(w),\ \varphi_{v\circ w}=\varphi_v\varphi_w,$$

то

$$s(v\circ w)+\left\|\varphi_{v\circ w}M-L\right\|=s(v)+s(w)+\left\|\varphi_v\varphi_w M-L\right\|. \tag{52}$$

Далее,

$$\varphi_v\varphi_w M-L=\varphi_v\left(\varphi_w M-K\right)+\varphi_v K-L.$$

Поскольку φ_v — изоморфизм евклидовых пространств, из последнего равенства следует неравенство

$$\left\|\varphi_v\varphi_w M-L\right\|\leqslant\left\|\varphi_w M-K\right\|+\left\|\varphi_v K-L\right\|,$$

подставив которое в формулу (52), получаем неравенство

$$s(v\circ w)+\left\|\varphi_{v\circ w}M-L\right\|\leqslant s(v)+\left\|\varphi_v K-L\right\|+s(w)+\left\|\varphi_w M-K\right\|.$$

Из этого неравенства в силу формул (50), (51) следует

$$\inf_{\substack{v\in G(y,q)\\ w\in G(q,z)}}\left\{s(v\circ w)+\left\|\varphi_{v\circ w}M_x-L\right\|\right\}\leqslant\rho_x\left((y,L),(q,K)\right)+\rho_x\left((q,K),(z,M)\right).$$

Левая часть этого неравенства в силу формулы (49) больше или равна $\rho_x\left((y,L),(z,M)\right)$, поскольку $v\circ w\in G(y,z)$ для всяких $v\in G(y,q)$, $w\in G(q,z)$. Тем самым доказано, что для всяких $(y,L)\in J_xV$, $(z,M)\in J_xV$, $(q,K)\in J_xV$ имеет место неравенство

$$\rho_x\left((y,L),(z,M)\right)\leqslant\rho_x\left((y,L),(q,K)\right)+\rho_x\left((q,K),(z,M)\right).$$

Предложение доказано.

Пусть даны множества B, E и дано отображение $p:E\to B$ множества E на множество B. Пусть при всяком $x\in B$ на множестве $p^{-1}(x)$ задано расстояние $\rho_x(\cdot,\cdot)$. Отображение $\alpha:B\to E$, такое, что $p\alpha=1_B$, будем называть сечением абстрактного расслоения (E,p,B), отображение p будем называть проекцией, множество B — базой. Слово «абстрактное» указывает на то, что никакой топологии или какой-либо иной структуры ни на E, ни на B не задано и соответственно этому ни непрерывности, ни каких-либо иных свойств у отображения p не предполагается; точно так же и от сечения не требуется никаких дополнительных свойств (например, непрерывности, о которой в этой ситуации и говорить не приходится) — словом, терминология здесь несколько отличается от используемой в некоторых книгах по топологии, где под словами «пространство», «отображение», «сечение» подразумеваются слова «топологическое пространство», «непрерывное отображение», «непрерывное сечение». Множество всех сечений абстрактного расслоения (E,p,B) обозначим через Σ. Для всякого $\alpha\in\Sigma$ через Σ_α обозначим множество всех сечений β, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x\in B}\rho_x\left(\beta x,\alpha x\right)<+\infty. \tag{53}$$

Л Е М М А 2. *Для всякого* $\alpha\in\Sigma$ *отображение* $\rho:\Sigma_\alpha\times\Sigma_\alpha\to\overline{\mathbf{R}}$, *определенное формулой*

$$\rho(\beta,\gamma)=\sup_{x\in B}\rho_x\left(\beta x,\gamma x\right), \tag{54}$$

есть расстояние на Σ_α.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дано $\alpha\in\Sigma$.

1) Пусть даны $\beta\in\Sigma_\alpha$, $\gamma\in\Sigma_\alpha$. Тогда

$$\sup_{x\in B}\rho_x\left(\beta x,\alpha x\right)<+\infty,$$

$$\sup_{x\in B}\rho_x\left(\gamma x,\alpha x\right)<+\infty.$$

Поэтому

$$\rho(\beta,\gamma)=\sup_{x\in B}\rho_x(\beta x,\gamma x)\leqslant\sup_{x\in B}\left[\rho_x(\beta x,\gamma x)+\left(\rho_x(\gamma x,\alpha x)\right)\right]<+\infty .$$

Так как $\rho_x(\beta x,\gamma x)\geq 0$ для всякого $x\in B$, то $\rho(\beta,\gamma)\geq 0$. Таким образом, отображение $\rho:\Sigma_\alpha\times\Sigma_\alpha\to\overline{\mathbf{R}}$, определенное формулой (54), в действительности является отображением $\Sigma_\alpha\times\Sigma_\alpha\to\mathbf{R}^+$.

2) Для всякого $\beta\in\Sigma_\alpha$ имеем

$$\rho(\beta,\beta)=\sup_{x\in B}\rho_x(\beta x,\beta x)=0 .$$

3) Если $\beta\in\Sigma_\alpha$, $\gamma\in\Sigma_\alpha$ таковы, что $\rho(\beta,\gamma)=0$, то в силу (54) имеем $\rho_x(\beta x,\gamma x)\leq 0$ для всякого $x\in B$, откуда $\beta x=\gamma x$ для всякого $x\in B$, т. е. $\beta=\gamma$.

4) Из того, что для $\rho_x(y,z)=\rho_x(z,y)$ всяких, $x\in B$, $y\in p^{-1}(x)$, $z\in p^{-1}(x)$, в силу формулы (54) следует, что $\rho(\beta,\gamma)=\rho(\gamma,\beta)$ для всяких $\beta\in\Sigma_\alpha$, $\gamma\in\Sigma_\alpha$.

5) Из неравенства треугольника для расстояния $\rho_x(\cdot,\cdot)$ в силу формулы (54) следует неравенство треугольника для $\rho(\cdot,\cdot)$. В самом деле, для всяких $\beta\in\Sigma_\alpha$, $\gamma\in\Sigma_\alpha$, $\delta\in\Sigma_\alpha$ имеем

$$\rho(\beta,\gamma)=\sup_{x\in B}\rho_x(\beta x,\gamma x)\leqslant\sup_{x\in B}\left[\rho_x(\beta x,\delta x)+\rho_x(\delta x,\gamma x)\right]\leqslant\sup_{x\in B}\rho_x(\beta x,\delta x)+\sup_{x\in B}\rho_x(\delta x,\gamma x)=\rho(\beta,\delta)+\rho(\delta,\gamma).$$

Лемма доказана.

Доказательство предложения 2. Положив

$$E=\bigcup\nolimits_{x\in V}J_xV,\ B=V,\ p(y,L)=x$$

для всяких $x\in V$, $(y,L)\in J_xV$, мы получаем абстрактное расслоение (E,p,B) (в действительности оно, как известно, наделяется структурой расслоения, понимаемого в обычном смысле, но здесь нам эта дополнительная структура не понадобится). Согласно предложению 3, формула (38) при всяком $x\in B=V$ определяет расстояние ρ_x на $J_xV\in p^{-1}(x)$. Обозначим, как и в лемме 2, через Σ множество сечений абстрактного расслоения (E,p,B). Напомним, что отображение $\mathrm{jet}:S\to\Sigma$ определяется формулой $(\mathrm{jet}f)x=(fx,\mathrm{d}f_x)$ ($x\in V$). Из этого определения следует, что отображение jet есть инъекция (взаимно однозначное отображение в) S в Σ.

С помощью (38) формулу (9) можно переписать в виде

$$\tilde{d}_j(f,g)=\sup_{x\in V}\rho_x\left((fx,\mathrm{d}f_x),(gx,\mathrm{d}g_x)\right)=\sup_{x\in B}\rho_x\left((\mathrm{jet}f)x,(\mathrm{jet}g)x\right)\tag{55}$$

(для всяких $j\in S$, $f\in S_j$, $g\in S_j$).

Для всяких $j\in S$, $f\in S_j$ имеет место неравенство

$$\sup_{x\in B}\rho_x\left((\mathrm{jet}f)x,(\mathrm{jet}j)x\right)<+\infty .\tag{56}$$

В самом деле, левая часть этого неравенства в силу формул (38), (55) (с j вместо g) записывается в виде

$$\sup_{x\in V}\inf_{u\in G(fx,jx)}\left\{s(u)+\left\|\varphi_u\mathrm{d}j_x-\mathrm{d}f_x\right\|\right\},$$

а так как

$$\left\|\varphi_u\mathrm{d}j_x-\mathrm{d}f_x\right\|\leqslant\left\|\mathrm{d}j_x\right\|+\left\|\mathrm{d}f_x\right\|\leqslant\left\|\left|\mathrm{d}j\right|\right\|+\left\|\left|\mathrm{d}f\right|\right\|$$

для всякого $x\in V$, то

$$\inf_{u\in G(fx,jx)}\left\{s(u)+\left\|\varphi_u\mathrm{d}j_x-\mathrm{d}f_x\right\|\right\}\leqslant\left\|\left|\mathrm{d}g\right|\right\|+\left\|\left|\mathrm{d}f\right|\right\|+\rho(fx,jx).$$

Так как $f\in S_j$, то $\rho(fx,jx)$ есть ограниченная функция от $x\in V$, что и заканчивает доказательство неравенства (56). Доказанное для всяких $j\in S$, $f\in S_j$ неравенство (56) означает, что для всяких $j \in S$, $f \in S_j$ сечение $\mathrm{jet}f$ абстрактного расслоения (E, p, B) принадлежит множеству $\Sigma_{\mathrm{jet}j}$, определенному фразой, содержащей формулу (53). А так как $\mathrm{jet}: S \to \Sigma$ — инъекция, то при всяком $j \in S$, отображение $\mathrm{jet}|_{S_j}$ (сужение отображения jet на множество S_j) есть инъекция множества S_j в множество $\Sigma_{\mathrm{jet}j}$. Поэтому, в силу леммы 2, формула (55) при всяком $j \in S$ определяет расстояние на S_j. Предложение доказано.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
01.11.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VI. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 5, с. 804-821.