ДЕСЯТАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО НЕЛИНЕЙНЫМ КОЛЕБАНИЯМ ВАРНА – КУРОРТ „ДРУЖБА"

12–17 сентября 1984

TENTH ITERNATIONAL CONFERENCE ON NONLINEAR OSCILLATIONS VARNA – DROUJBA

September 12–17, 1984

УСТОЙЧИВОСТЬ И ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА – ТИПИЧНЫЕ СВОЙСТВА

В.М.Миллионщиков

Пусть $x_0 \in \mathbf{R}^n$ – неподвижная точка автономного дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$ ($f(\cdot)$ класса C^1). Если действительные части всех собственных значений производной df_{x_0} отрицательны, то точка x_0 экспоненциально устойчива – теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению – см. [1].

Как известно, из экспоненциальной устойчивости нулевого решения уравнения в вариациях уравнения $\dot{x} = f(x)$ вдоль решения $x(\cdot)$ не всегда вытекает устойчивость решения $x(\cdot)$. Это показывает пример Перрона [2] , изложенный в книге [3] (глава IV, пункт 9):

$$\begin{cases} \dot{u} = -au \\ \dot{v} = (\sin\ln t + \cos\ln t - 2a)\, v + u^2 \end{cases} \qquad (1)$$

При $1 > a > \dfrac{1}{2}$ нулевое решение системы уравнений в вариациях системы (l) в нуле

$$\begin{cases} \dot{u} = -au \\ \dot{v} = (\sin\ln t + \cos\ln t - 2a)\, v \end{cases} \qquad (2)$$

экспоненциально устойчиво, так как старший показатель Ляпунова системы(2) равен $1-2a$; но при $a \in \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}e^{-\pi}\right)$ нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Однако, как показывают сформулированные ниже теоремы, устойчивость по первому приближению типична в смысле категорий Бэра. Более того, приводимые ниже теоремы показывают, что устойчивость по первому приближению типично стабильна, т.е. сохраняется при малых возмущениях уравнения и начального значения его решения, исследуемого на устойчивость. Напомним, что свойство называется типичным, если им обладает всюду плотное множество точек, имеющее тип G_δ.

Обозначим буквой S_n множество диффеоморфизмов f евклидова пространства E^n на себя, имеющих равномерно непрерывную производную, удовлетворяющую неравенству

$$\sup_{x \in E^n} \max\left\{ \|df_x\|, \|(df_x)^{-1}\| \right\} < +\infty.$$

Для всякого $j \in S$ через S_j обозначается множество диффеоморфизмов $f \in S$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{x \in E^n} |fx - jx| < +\infty;$$

в множестве S_j задается расстояние

$$d(f,g)=\sup_{x\in E^n}\left(|fx-gx|+\|df_x-dg_x\|\right).$$

Теорема 1. При всяком $j\in S$ в пространстве $S_j\times E^n$ имеется всюду плотное множество D_j типа G_δ такое, что если для некоторого $(f,x)\in D_j$ старший показатель Ляпунова диффеоморфизма f в точке x отрицателен:

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\left\|d(f^m)_x\right\|<0,$$

то множество тех $(g,y)\in S_j\times E^n$, для которых точка y экспоненциально устойчива относительно диффеоморфизма g ,есть окрестность точки (f,x).

Для диффеоморфизмов замкнутого гладкого многообразия аналогичная теорема дифференциально-топологически инвариантна и формулируется проще.

Обозначим буквой S множество диффеоморфизмов замкнутого гладкого многообразия V на себя, принадлежащих классу C^1, наделенное C^1-топологией.

Теорема 2. В пространстве $S\times V$ имеется всюду плотное множество D типа G_δ такое, что если для некоторого $(f,x)\in D$ старший показатель Ляпунова диффеоморфизма f в точке x отрицателен:

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\left\|d(f^m)_x\right\|<0, \qquad (3)$$

то множество тех $(g,y)\in S\times V$, которых точка y экспоненциально устойчива относительно диффеоморфизма g есть окрестность точки (f,x).

Поясним, что норма производной стандартным способом определяется через риманову метрику на V , а так как V компактно, то всякие две римановы метрики эквивалентны и показатель Ляпунова, стоящий в левой части неравенства (3), не зависит от выбора римановой метрики на V .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А.М. Собрание сочинений, т.2, М.:Изд-во АН СССР, 1956.
2. Perron O. Math. Zeltschr., 29, 1928, 129-160.
3. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.

СССР II9899 Москва МГУ
мех.-мат. факультет