УДК 517.926.4

В. М. Миллионщиков

Москва, СССР

БЭРОВСКНЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ И ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА

Пусть V^n — связное дифференцируемое (класса C^2) n-мерное многообразие со счетной базой, на котором фиксирована некоторая риманова метрика (класса C^1), по которой стандартным образом определяется расстояние ρ в V^n. Пусть метрическое пространство $(V^n,\ \rho)$ полно.

Через S обозначается множество всех диффеоморфизмов f класса C^1, отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию*

$$\sup_{x\in V^n}\max\,(\| df_x \|,\ \| (df_x)^{-1} \|) < +\infty.$$

Через $\hat{d}$ обозначается расстояние в S, определяемое формулой

$$\begin{gathered}\hat{d}\,(f_1, f_2) = \sup_{x\in V^n}\inf_{u_t\in G\,(f_1x,\, f_2x)}\{\min\,[s\,(u_t),\\ [1+\rho\,(x,\ x_0)]^{-1}] + \| \varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x} \|\},\end{gathered} \tag{1}$$

где x_0 — некоторая фиксированная (отмеченная) точка многообразия V^n, через $G\,(y_1,\ y_2)$ обозначено множество всех кусочно-гладких кривых (путей), идущих в многообразии V^n из точки y_2 в точку y_1, через $s\,(u_t)$ обозначена длина кривой (пути) u_t, а через $\varphi_{u_t} : T_{y_2}V^n \to T_{y_1}V^n$ — параллельный перенос вдоль кривой (пути) $u_t \in G\,(y_1,\ y_2)$ (через T_yV^n обозначается касательное пространство многообразия V^n в точке y).

Через $S\times V^n$ обозначается произведение топологических пространств S (с топологией, индуцированной метрикой $\hat{d}$) и V^n.

Для всяких $f\in S$, $x\in V^n$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ определяется показатель Ляпунова**:

$$\lambda_{n-k+1}((f,\ x)) = \min_{\mathbf{R}^k\in G_k(T_xV^n)}\ \max_{\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^k_*}\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln| df_x^{mt}\mathfrak{x} |,$$

где $G_k(T_xV^n)$ — грассманово многообразие k-мерных векторных подпространств касательного пространства T_xV^n; $\mathbf{R}^k_*$ — множество всех ненулевых векторов пространства $\mathbf{R}^k$; $|\cdot|$ — норма касательного вектора, индуцированная фиксированной выше римановой метрикой многообразия V^n.

Теорема 1. При всяком $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\lambda_i(\cdot): S\times V^n \to \mathbf{R}$ есть бэровская функция второго класса.

Теорема 2. В пространстве $S\times V^n$ найдется всюду плотное множество $\mathcal{D}$ типа G_δ,

---

* $\|\cdot\|$ — норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство (в той же или в другой точке), определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные фиксированной выше римановой метрикой. Через df_x обозначается производная отображения f в точке x.

** Многие авторы вместо λ_{n-k+1} пишут λ_k.

такое, что при всяком $i \in \{1, \ldots, n\}$ функция* $\lambda_i|_{\mathcal{D}}(\cdot) : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ непрерывна.

Теорема 3. В пространстве $S \times V^n$ найдется всюду плотное множество C типа G_δ такое, что при всяком $i \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\lambda_i(\cdot) : S \times V^n \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху в каждой точке $(f, x) \in C$.

Замечание 1. Если V^n компактно (т. е. V^n — замкнутое многообразие), то метрика $\hat{d}$, определенная формулой (1), индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\bar{d}$, определяемая формулой

$$\bar{d}\,(f_1, f_2) = \sup_{x \in V^n} \inf_{u_t \in G(f_1 x, f_2 x)} \{s\,(u_t) + \| \varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x} \|\}.$$

Замечание 2. Пусть $V^n = \mathbf{R}^n$. Фиксируем в $\mathbf{R}^n$ какую-нибудь евклидову структуру. Тем самым на $V^n = \mathbf{R}^n$ фиксируется риманова метрика. Тогда метрика $\hat{d}$, определенная формулой (1), индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\tilde{d}$, определяемая формулой**

$$\tilde{d}\,(f_1, f_2) = | f_1 x_0 - f_2 x_0 | + \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \| df_{1x} - df_{2x} \|.$$

1. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I. — Дифференц. уравнения, 1980, 16, № 8, с. 1408—1416.

2. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. III. — Дифференц. уравнения, 1980, 16, № 10, с. 1766—1785.

3. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. IV. — Дифференц. уравнения, 1981, 17, № 3, с. 431—468.

---

* Через $\lambda_i|_{\mathcal{D}}(\cdot)$ обозначается сужение функции $\lambda_i(\cdot)$ на множество $\mathcal{D}$.

** В случае $V^n = \mathbf{R}^n$ касательные пространства стандартным образом отождествляются с $\mathbf{R}^n$; после этого отождествления разность $df_{1x} - df_{2x}$ приобретает смысл.