МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 36, № 6 (1984)

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

В. М. Миллионщиков

Показатели Ляпунова служат для исследования экспоненциальной устойчивости (условной экспоненциальной устойчивости) решений систем дифференциальных уравнений. Верхний центральный показатель линейной системы дифференциальных уравнений (см. [1, § 7, 8, 13, 15]) оценивает сверху старший показатель Ляпунова этой системы. На пространстве линейных систем $\dot{x} = A(t)x$, наделенном топологией равномерной сходимости на $\mathbf{R}^+$ (система отождествляется с непрерывной ограниченной функцией $A(\cdot): \mathbf{R}^+ \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$), центральный показатель как функция системы полунепрерывен сверху, в то время как старший показатель Ляпунова этим свойством не обладает. В этой статье мы рассматриваем центральные показатели как функции не на указанном выше пространстве линейных систем, а на пространстве задач Коши для нелинейных дифференциальных уравнений. Точкой этого пространства является пара: нелинейная система дифференциальных уравнений (то или иное множество таких систем наделяется топологией, естественной в некотором смысле) — первый элемент пары и точка фазового пространства — второй элемент пары; нелинейная задача Коши линеаризуется, и центральный показатель полученной системы уравнений в вариациях рассматривается как функция нелинейной задачи Коши. На таких пространствах не только старший показатель Ляпунова, но и верхний центральный показатель не является всюду полунепрерывным сверху.

Оказывается, однако, что, в таких пространствах полунепрерывность сверху центральных показателей типична — (см. [2]); напомним, что свойство типично, если им обладает множество точек, являющееся всюду плотным пересечением счетной совокупности открытых множеств. Центральные показатели (с номерами >1) имеют по крайней мере две разновидности. В [2] доказана типичность полунепрерывности сверху одной из них. В настоящей статье рассматривается другая разновидность центральных показателей и доказывается типичность полунепрерывности сверху центральных показателей этой разновидности. Эта теорема имеет меньшую степень общности и более сложное доказательство, чем теорема [2]. Отметим, что в настоящей статье рассмотрен дискретно-временной аналог описанной выше ситуации: вместо нелинейных дифференциальных уравнений рассматриваются диффеоморфизмы, а вместо решений — траектории диффеоморфизмов.

§ 1. 1. Пусть $(E, p, B; \langle\cdot, \cdot\rangle)$ — метризованное векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$, базой B и римановой метрикой $\langle\cdot, \cdot\rangle$ (B — полное метрическое пространство).

2. Пусть $\mathbf{G}$ — группа $\mathbf{R}$ или группа $\mathbf{Z}$ и пусть $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}(E, p, B))$, где через $\mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}(E, p, B))$ обозначается множество гомоморфизмов группы $\mathbf{G}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения (E, p, B), обозначаемую через $\mathrm{Aut}(E, p, B)$. Напомним, что для всякого $t \in \mathbf{G}$ образ $\mathfrak{H}t$ точки t при гомоморфизме $\mathfrak{H}$ есть пара

$(X^t,\ \chi^t)$, где X^t — гомеоморфизм E на E, χ^t — гомеомофизм B на B, причем а) $pX^t = \chi^t p$; б) при всяком $b \in B$ сужение $X^t[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X^t есть линейное отображение $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^t b)$; в) при всяких $t \in \mathbf{G}$, $s \in \mathbf{G}$ имеют место равенства $X^{t+s} = X^t X^s$, $\chi^{t+s} = \chi^t \chi^s$ (вместо X^1 пишем X, вместо χ^1 — χ). Наложим на гомоморфизм $\mathfrak{H}$ условие, состоящее в следующем: существует функция $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ такая, что при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ имеют место равенство

$$a(\chi^t b) = a(b) \tag{1}$$

и неравенство

$$\| X^t[b] \| \leqslant \exp(|t|\, a(b)). \tag{2}$$

Норма линейного отображения слоя на слой определяется стандартным образом через нормы в слоях, индуцированные римановой метрикой $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$.

$$\| X^t[b] \| = \sup_{\xi \in p_*^{-1}(b)} \{ | X^t \xi | \cdot | \xi |^{-1} \},$$

где $| \eta | = \langle \eta,\ \eta \rangle^{1/2}$; звездочка справа внизу означает выбрасывание нуля.

3. Для всякого $\theta \in \mathbf{G}$ определим гомоморфизм $\mathfrak{H}_\theta \in \operatorname{Hom}(\mathbf{Z},\ \operatorname{Aut}(E,\ p,\ B))$ формулой

$$\mathfrak{H}_\theta s = \mathfrak{H}(s\theta) = (X^{s\theta},\ \chi^{s\theta}) \ \ (s \in \mathbf{Z}). \tag{3}$$

Так как по условию при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ выполнено неравенство $\| X^t[b] \| \leqslant \exp(|t|\, a(b))$, то при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ выполнено неравенство $\| X^{s\theta}[b] \| \leqslant \exp(|s| \cdot |\theta|\, a(b))$, т. е. гомоморфизм $\mathfrak{H}_\theta$ удовлетворяет условию п. 2 с функцией $a_\theta(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ (вместо $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$), определенной формулой

$$a_\theta(b) = |\theta|\, a(b) \ \ (b \in B).$$

4. *Показатель Ляпунова* $\lambda_k(\mathfrak{H},\ b)$ гомоморфизма $\mathfrak{H}$ определяется при всех $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ формулой

$$\lambda_k(\mathfrak{H},\ b) = \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \ \sup_{\xi \in \mathbf{R}^{n-k+1}} \lambda(\mathfrak{H},\ \xi), \tag{4}$$

здесь

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln | X^t \xi |, \tag{5}$$

$G_i(p^{-1}(b))$ — грассманово многообразие i-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$; $\ln 0 = -\infty$.

5. Определение 1 (ср. [1 § 7, 8, 13, 15]). *Центральный показатель* $\Omega_k(\mathfrak{H},\ b)$ гомоморфизма $\mathfrak{H}$ определяется при всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $b \in B$ формулой

$$\Omega_k(\mathfrak{H},\ b) = \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \ \inf_{\tau \in \mathbf{G}_*^+} \ \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \|. \tag{6}$$

Через X_L^τ обозначается сужение отображения X^τ на множество L. Как отмечено выше, вместо $X^\tau_{p^{-1}(b)}$ пишем также $X^\tau[b]$; так как $X^t[b]: p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^t b)$ — невырожденное линейное отображение, то образ $X^t \mathbf{R}^i$ всякого i-мерного векторного подпространства $\mathbf{R}^i$ слоя $p^{-1}(b)$ есть векторное подпространство слоя $p^{-1}(\chi^t b)$, имеющее ту же размерность i; норма линейного отображения $X^\tau_{\mathbf{R}^i}$ определяется стандартным образом

$$\| X^\tau_{\mathbf{R}^i} \| = \sup_{\xi \in \mathbf{R}^i_*} (| X^\tau \xi | \cdot | \xi |^{-1}),$$

$\mathbf{G}_*^+$ — множество всех положительных элементов группы $\mathbf{G}$.

Вместо $\Omega_1(\mathfrak{H},\ b)$ пишем также $\Omega(\mathfrak{H},\ b)$.

В [4] доказаны следующие два предложения.

Предложение 1. *Для всякого* $b \in B$ *имеет место цепочка неравенств* $a(b) \geqslant \Omega_1(\mathfrak{H},\ b) \geqslant \ldots \geqslant \Omega_n(\mathfrak{H},\ b) \geqslant -a(b)$.

Предложение 2. *Для всяких* $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $b \in B$ *имеет место неравенство* $\lambda_k(\mathfrak{H},\ b) \leqslant \Omega_k(\mathfrak{H},\ b)$.

6. При всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $b \in B$ определим множество

$$E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b) = \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \leqslant \lambda_k(\mathfrak{H},\ b)\}; \tag{7}$$

в § 1 [3] доказано, что $E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$ — векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$. Если для некоторых $b \in B$, $k \in \{2,\ \ldots,\ n\}$ имеет место неравенство $\lambda_{k-1}(\mathfrak{H},\ b) \neq \lambda_k(\mathfrak{H},\ b)$, то $\dim E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b) = n-k+1$ (см. [3, предложение 8]), и тогда $E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$ обозначается через $\mathbf{R}_0^{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$:

$$\mathbf{R}_0^{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b) = E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b), \text{ если } \lambda_{k-1}(\mathfrak{H},\ b) \neq \lambda_k(\mathfrak{H},\ b). \tag{8}$$

Определение 2 (ср. [1, § 7, 8, 13, 15]). *Центральный показатель* $\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\ b)$ гомоморфизма $\mathfrak{H}$ определяется при всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $b \in B$ формулой

$$\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\ b) = \inf_{\tau \in \mathbf{G}_*^+} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau} E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)} \|. \tag{9}$$

В [4] доказаны следующие три предложения.

Предложение 3. *Для всякого* $b \in B$ *имеет место равенство* $\Omega^{(1)}(\mathfrak{H},\ b) = \Omega_1(\mathfrak{H},\ b)$.

Предложение 4. *Для всякого* $b \in B$ *имеет место цепочка неравенств* $\Omega^{(1)}(\mathfrak{H},\ b) \geqslant \ldots \geqslant \Omega^{(n)}(\mathfrak{H},\ b)$.

Предложение 5. *Для всяких* $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $b \in B$ *имеет место неравенство* $\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\ b) \geqslant \Omega_k(\mathfrak{H},\ b)$.

§ 2. Напомним определение Перрона в удобной для дальнейшего изложения форме.

Определение 3. Гомоморфизм $\mathfrak{H}$ называется *экспоненциально разделенным* (на $\mathbf{G}^+$) с индексом $n-k+1 \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ в точке $b \in B$, если найдется $\mathbf{R}_0^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ такое, что для всякого алгебраического дополнения $\mathbf{R}^{k-1} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0^{n-k+1}$ векторного подпространства $\mathbf{R}_0^{n-k+1}$ существуют $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, $\beta \in \mathbf{R}_*^+$ такие, что для всех $\xi \in \mathbf{R}_*^{k-1}$, $\eta \in \mathbf{R}_{0*}^{n-k+1}$, для всех $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X^t\xi|\,|X^s\xi|^{-1} \geqslant \alpha\,|X^t\eta|\,|X^s\eta|^{-1} \exp(\beta\,(t-s)). \tag{10}$$

ЛЕММА. *Если гомоморфизм* $\mathfrak{H}$ *экспоненциально разделен с индексом* $n-k+1$ *в точке* b, *то*

$$E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b) = \mathbf{R}_0^{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b) = \mathbf{R}_0^{n-k+1},$$

где $\mathbf{R}_0^{n-k+1}$ *— подпространство, обладающее свойствами, указанными в определении* 3.

Доказательство. Пусть выполнено условие леммы, т. е. существует $\mathbf{R}_0^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ такое, что для всякого $\mathbf{R}^{k-1} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0^{n-k+1}$ существуют $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, $\beta \in \mathbf{R}_*^+$ такие, что всяких $\xi \in \mathbf{R}_*^{k-1}$, $\eta \in \mathbf{R}_{0*}^{n-k+1}$, для всех $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство (10).

а) Фиксируем какое-нибудь $\mathbf{R}^{k-1} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0^{n-k+1}$. Фиксируем соответствующие ему $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, $\beta \in \mathbf{R}_*^+$.

Положив в (10) $s = 0$, получаем, что для всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $\xi \in \mathbf{R}_*^{k-1}$, $\eta \in \mathbf{R}_{0*}^{n-k+1}$ выполнено неравенство

$$|X^t\xi|\,|\xi|^{-1} \geqslant \alpha\,|X^t\eta|\,|\eta|^{-1}\exp(\beta t).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$|X^t\xi| \geqslant \gamma\,|X^t\eta|\exp(\beta t),$$

где $\gamma=\gamma(\xi,\ \eta)=\alpha\,|\xi|\,|\eta|^{-1}$ не зависит от $t\in\mathbf{G}^+$.

б) Для всяких $\xi\in\mathbf{R}_*^{k-1}$, $\eta\in\mathbf{R}_{0*}^{n-k+1}$ из последнего неравенства следует:

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X^t\xi| \geqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln(\gamma\,|X^t\eta|\exp(\beta t)) =$$

$$=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}(\ln\gamma+\ln|X^t\eta|+\beta t)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X^t\eta|+\beta.$$

Пользуясь обозначением (5) (при $|\eta|=0$ имеем $\lambda(\mathfrak{H},\ \eta)+\beta=-\infty$), перепишем доказанное в следующем виде: для всяких $\xi\in\mathbf{R}_*^{k-1}$, $\eta\in\mathbf{R}_0^{n-k+1}$ имеет место неравенство

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\geqslant\lambda(\mathfrak{H},\ \eta)+\beta. \tag{11}$$

в) Так как $p^{-1}(b)=\mathbf{R}^{k-1}\oplus\mathbf{R}_0^{n-k+1}$, то всякий вектор $\xi\in p^{-1}(b)$ можно представить в виде $\zeta=\xi+\eta$, где $\xi\in\mathbf{R}^{k-1}$, $\eta\in\mathbf{R}_0^{n-k+1}$.

Если $\zeta\in p^{-1}(b)\setminus\mathbf{R}_0^{n-k+1}$, то вектор ξ отличен от нуля и, следовательно, $\xi\in\mathbf{R}_*^{k-1}$. Поэтому из результата пункта б) следует: для всякого $\zeta\in p^{-1}(b)\setminus\mathbf{R}_0^{n-k+1}$ имеет место равенство $\zeta=\xi+\eta$, где векторы ξ, η удовлетворяют неравенству (11). Так как $\beta\in\mathbf{R}_*^+$, то из неравенства (11) следует равенство $\lambda(\mathfrak{H},\ \zeta)=\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)$ (при $\eta\neq 0_b$, где через 0_b обозначается нуль векторного пространства $p^{-1}(b)$, это следует в силу предложения 4 [3] (см. также замечание об обозначениях на стр. 2140 в [3]), а при $\eta=0_b$ — в силу равенства $\zeta=\xi$). Итак, доказано следующее. Для всякого $\zeta\in p^{-1}(b)\setminus\mathbf{R}_0^{n-k+1}$ имеет место равенство $\lambda(\mathfrak{H},\ \zeta)=\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)$, где $\xi\in\mathbf{R}_*^{k-1}$ таково, что $\zeta-\xi\in\mathbf{R}_0^{n-k+1}$.

г) Из результатов пунктов б), в) вытекает, что для всяких $\zeta\in p^{-1}(b)\setminus\mathbf{R}_0^{n-k+1}$, $\eta\in\mathbf{R}_0^{n-k+1}$ имеет место неравенство $\lambda(\mathfrak{H},\ \zeta)\geqslant\lambda(\mathfrak{H},\ \eta)+\beta$. Следовательно, для всякого $\zeta\in p^{-1}(b)\setminus\mathbf{R}_0^{n-k+1}$ выполнено неравенство

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \zeta)\geqslant\sup_{\eta\in\mathbf{R}_0^{n-k+1}}\lambda(\mathfrak{H},\ \eta)+\beta. \tag{12}$$

д) Для всякого $\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$, отличного от $\mathbf{R}_0^{n-k+1}$, найдется $\zeta\in\mathbf{R}^{n-k+1}$ такое, что $\zeta\notin\mathbf{R}_0^{n-k+1}$. Поэтому из результата пункта г) вытекает (так как $\beta>0$) следующее утверждение. Для всякого $\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ такого, что $\mathbf{R}^{n-k+1}\neq\mathbf{R}_0^{n-k+1}$, имеет место неравенство

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}^{n-k+1}}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)>\sup_{\eta\in\mathbf{R}_0^{n-k+1}}\lambda(\mathfrak{H},\ \eta).$$

е) Для всякого $\mathbf{R}^{n-k+2}\in G_{n-k+2}(p^{-1}(b))$ найдется $\zeta\in\mathbf{R}^{n-k+2}$ такое, что $\zeta\notin\mathbf{R}_0^{n-k+1}$. Поэтому из результата пункта г) вытекает следующее. Для всякого $\mathbf{R}^{n-k+2}\in G_{n-k+2}(p^{-1}(b))$ имеет место неравенство

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}^{n-k+2}}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\geqslant\sup_{\eta\in\mathbf{R}_0^{n-k+1}}\lambda(\mathfrak{H},\ \eta)+\beta.$$

ж) В силу результата пункта д) из формулы (4) следует равенство

$$\lambda_k(\mathfrak{H},\ b)=\sup_{\xi\in\mathbf{R}_0^{n-k+2}}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi). \tag{13}$$

з) Заменив в формуле (4) k на $k-1$, получаем равенство

$$\lambda_{k-1}(\mathfrak{H},\ b)=\inf_{\mathbf{R}^{n-k+2}\in G_{n-k+2}(p^{-1}(b))}\ \sup_{\xi\in\mathbf{R}^{n-k+2}}\lambda(\mathfrak{H},\ \xi).$$

Из этой формулы в силу результата пункта е) следует не равенство

$$\lambda_{k-1}(\mathfrak{H},\ b)\geqslant\sup_{\eta\in\mathbf{R}_0^{n-k+1}}\lambda\,(\mathfrak{H},\ \eta)+\beta>\sup_{\eta\in\mathbf{R}_0^{n-k+1}}\lambda\,(\mathfrak{H},\ \eta),$$

из которого в силу формулы (13) следует строгое неравенство

$$\lambda_{k-1}(\mathfrak{H},\ b)>\lambda_k(\mathfrak{H},\ b).$$

Из последнего неравенства в силу формулы (8) следует равенство

$$\mathbf{R}_0^{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)=E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b). \tag{14}$$

и) Из формул (7), (13) следует включение

$$\mathbf{R}_0^{n-k+1}\subset E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b). \tag{15}$$

В силу результата пункта г) для всякого $\zeta\in p^{-1}(b)\setminus\mathbf{R}_0^{n-k+1}$ имеет место неравенство (12), которое с помощью формулы (13) переписывается в виде

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \zeta)\geqslant\lambda_k(\mathfrak{H},\ b)+\beta>\lambda_k(\mathfrak{H},\ b).$$

Отсюда в силу формулы (7) следует включение $E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)\subset\mathbf{R}_0^{n-k+1}$. Соединив это включение с доказанным выше включением (15), получаем равенство $\mathbf{R}_0^{n-k+1}=E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b).$, соединением которого с равенством (14) заканчивается доказательство леммы.

ТЕОРЕМА 1. *Если гомоморфизм $\mathfrak{H}$ экспоненциально разделен с индексом $n-k+1$ в точке b, то*

$$\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\ b)=\Omega_k(\mathfrak{H},\ b).$$

Доказательство. Пусть выполнено условие теоремы. В силу леммы имеет место равенство

$$E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)=\mathbf{R}_0^{n-k+1}, \tag{16}$$

где $\mathbf{R}_0^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ таково, что для всякого $\mathbf{R}^{k-1}=p^{-1}(b)\ominus\mathbf{R}_0^{n-k+1}$ существуют $\alpha\in\mathbf{R}_*^+$, $\beta\in\mathbf{R}_*^+$ такие, что для всяких $\xi\in\mathbf{R}_*^{k-1}$, $\eta\in\mathbf{R}_{0*}^{n-k+1}$, для всяких $t\in\mathbf{G}^+$, $s\in\mathbf{G}^+$ таких, что $t\geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X^t\xi|\cdot|X^s\xi|^{-1}\geqslant\alpha\,|X^t\eta|\cdot|X^s\eta|^{-1}\exp\,(\beta(t-s)). \tag{17}$$

Фиксируем какое-нибудь $\mathbf{R}^{k-1}=p^{-1}(b)\ominus\mathbf{R}_0^{n-k+1}$; фиксируем соответствующие $\alpha\in\mathbf{R}_*^+$, $\beta\in\mathbf{R}_*^+$.

1. Положив в неравенстве (17) $t=(j+1)\tau$, $s=j\tau$, получаем, что для всяких $\xi\in\mathbf{R}_*^{k-1}$, $\eta\in\mathbf{R}_{0*}^{n-k+1}$, $\tau\in\mathbf{G}_*^+$, $j\in\mathbf{Z}^+$ имеет место неравенство

$$|X^{(j+1)\tau}\xi|\cdot|X^{j\tau}\xi|^{-1}\geqslant\alpha\,|X^{(j+1)\tau}\eta|\cdot|X^{j\tau}\eta|^{-1}\exp\,(\beta\tau).$$

Так как $X^t[b]:p^{-1}(b)\to p^{-1}(\chi^t b)$ — невырожденное линейное преобразование (при всяком $t\in\mathbf{G}$), то

$$\|\,X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}_0^{n-k+1}}\,\|=\sup_{\eta\in\mathbf{R}_{0*}^{n-k+1}}\{|X^{(j+1)\tau}\eta|\cdot|X^{j\tau}\eta|^{-1}\}$$

и потому из предыдущей фразы вытекает следующее: для всяких $\xi\in\mathbf{R}_*^{k-1}$, $\tau\in\mathbf{G}_*^+$, $j\in\mathbf{Z}^+$ выполнено неравенство

$$|X^{(j+1)\tau}\xi|\cdot|X^{j\tau}\xi|^{-1}\geqslant\alpha\,\|\,X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}_0^{n-k+1}}\,\|\exp\,(\beta\tau). \tag{18}$$

Перемножив неравенства (18) по j от 0 до $m-1$, получаем, что для всяких $\xi\in\mathbf{R}_*^{k-1}$,

$\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $m \in \mathbf{N}$ имеет место неравенство

$$| X^{m\tau}\xi | \cdot | \xi |^{-1} \geqslant \alpha^m \exp (m\beta\tau) \prod\nolimits_{j=0}^{m-1} \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}_0^{n-k+1}} \|. \tag{19}$$

Для всяких $\xi \in \mathbf{R}_*^{k-1}$, $\tau \in \mathbf{G}_*^+$ имеем

$$\begin{gathered} \varlimsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \ln (| X^{m\tau}\xi | \cdot | \xi |^{-1}) = \\ = \varlimsup_{m\to+\infty} \left(\frac{1}{m} \ln | X^{m\tau}\xi | - \frac{1}{m} \ln | \xi | \right) = \varlimsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \ln | X^{m\tau}\xi |, \end{gathered} \tag{20}$$

поэтому из (19) следует:

$$\begin{gathered} \varlimsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m\tau} \ln | X^{m\tau}\xi | \geqslant \\ \geqslant \varlimsup_{m\to+\infty} \left(\frac{1}{\tau} \ln \alpha + \beta + \frac{1}{m\tau} \sum\nolimits_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}_0^{n-k+1}} \| \right) = \\ = \frac{1}{\tau} \ln \alpha + \beta + \varlimsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m\tau} \sum\nolimits_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}_0^{n-k+1}} \|. \end{gathered}$$

Так как число $\varlimsup\limits_{m\to+\infty} \dfrac{1}{m\tau} \ln | X^{m\tau}\xi |$, стоящее в левой части последнего неравенства, есть ничто иное как $\dfrac{1}{\tau} \ln (\mathfrak{H}_\tau,\ \xi)$ (см. формулы (3), (5)), то доказано следующее:

Для всяких $\xi \in \mathbf{R}_*^{k-1}$, $\tau \in \mathbf{G}_*^+$ имеет место неравенство

$$\begin{gathered} \frac{1}{\tau} \ln (\mathfrak{H}_\tau,\ \xi) \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{\tau} \ln \alpha + \beta + \varlimsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m\tau} \sum\nolimits_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}_0^{n-k+1}} \|. \end{gathered} \tag{21}$$

2. Положив в неравенстве (17) $t = m\tau$, $s = 0$, получаем, что для всяких $\xi \in \mathbf{R}_*^{k-1}$, $\eta \in \mathbf{R}_{0*}^{n-k+1}$, $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $m \in \mathbf{N}$ выполнено неравенство

$$| X^{m\tau}\xi | \cdot | \xi |^{-1} \geqslant \alpha | X^{m\tau}\eta | \cdot | \eta |^{-1} \exp (\beta m\tau),$$

откуда, пользуясь формулой (20), получаем

$$\begin{gathered} \varlimsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \ln | X^{m\tau}\xi | \geqslant \\ \geqslant \varlimsup_{m\to+\infty} \left(\frac{1}{m} \ln \alpha - \frac{1}{m} \ln | \eta | + \frac{1}{m} \ln | X^{m\tau}\eta | + \beta\tau \right) = \\ = \beta\tau + \varlimsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \ln | X^{m\tau}\eta |, \end{gathered}$$

т. е.

$$\lambda (\mathfrak{H}_\tau,\ \xi) \geqslant \beta\tau + \lambda (\mathfrak{H}_\tau,\ \eta) > \lambda (\mathfrak{H}_\tau,\ \eta) \tag{22}$$

для всяких $\xi \in \mathbf{R}_*^{k-1}$, $\eta \in \mathbf{R}_{0*}^{n-k+1}$, $\tau \in \mathbf{G}_*^+$.

3. Так как $p^{-1}(b) = \mathbf{R}^{k-1} \oplus \mathbf{R}_0^{n-k+1}$, то всякий вектор $\zeta \in p^{-1}(b) \setminus \mathbf{R}_0^{n-k+1}$ можно представить в виде $\zeta = \xi + \eta$, где $\xi \in \mathbf{R}_*^{k-1}$, $\eta \in \mathbf{R}_0^{n-k+1}$. Если при этом $\eta \neq 0_b$, то в силу предложения 4 [3] (см. также замечание об обозначениях на стр. 2140 в [3]), примененного к гомоморфизму $\mathfrak{H}_\tau$ (вместо $\mathfrak{H}$), из результата п. 2 (см. неравенство (22)) следует, что для всякого $\tau \in \mathbf{G}_*^+$ имеет место равенство $\lambda(\mathfrak{H}_\tau,\ \zeta) = \lambda(\mathfrak{H}_\tau,\ \xi)$. Если же при этом $\eta = 0_b$, то $\xi = \zeta$ и потому равенство $\lambda(\mathfrak{H}_\tau,\ \zeta) = \lambda(\mathfrak{H}_\tau,\ \xi)$ тоже верно

Итак, для всяких $\zeta \in p^{-1}(b) \setminus \mathbf{R}_0^{n-k+1}$, $\tau \in \mathbf{G}_*^+$ найдется $\xi \in \mathbf{R}_*^{k-1}$ такое, что $\lambda(\mathfrak{H}_\tau, \zeta) = \lambda(\mathfrak{H}_\tau, \xi)$. Соединив это с результатом п. 1 (см. формулу (21)), получаем: для всяких $\zeta \in p^{-1}(b) \setminus \mathbf{R}_0^{n-k+1}$, $\tau \in \mathbf{G}_*^+$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{\tau}\ln(\mathfrak{H}_\tau, \xi) \geqslant \frac{1}{\tau}\ln\alpha + \\ +\beta + \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\| X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}_0^{n-k+1}} \|. \tag{23}$$

4. Пусть дано $\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$, отличное от $\mathbf{R}_0^{n-k+1}$. Тогда $\mathbf{R}^{n-k+1} \setminus \mathbf{R}_0^{n-k+1} \neq \varnothing$. Фиксируем какое-нибудь $\zeta \in \mathbf{R}^{n-k+1} \setminus \mathbf{R}_0^{n-k+1}$.

Для всяких $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $j \in \mathbf{Z}^+$ имеем

$$| X^{(j+1)\tau}\zeta | \cdot | X^{j\tau}\zeta |^{-1} \leqslant \| X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \|.$$

Перемножив эти неравенства по j от 0 до $m-1$ получаем, что для всяких $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $m \in \mathbf{N}$ выполнено неравенство

$$| X^{m\tau}\zeta | \cdot |\zeta|^{-1} \leqslant \prod_{j=0}^{m-1}\| X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \|,$$

из которого следует

$$\ln| X^{m\tau}\zeta | \leqslant \ln|\zeta| + \sum_{j=0}^{m-1}\ln\| X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \|,$$

Разделив это неравенство на $m\tau$ и взяв верхний предел при $m \to +\infty$, получаем, что для всякого $\tau \in \mathbf{G}_*^+$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{\tau}\ln(\mathfrak{H}_\tau, \zeta) = \frac{1}{\tau}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln| X^{m\tau}\zeta | \leqslant \\ \leqslant \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\| X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \|. \tag{24}$$

5. Соединив результаты пп. 3, 4 (см. неравенства (23), (24)), получаем, что для всякого $\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$, отличного от $\mathbf{R}_0^{n-k+1}$, для всякого $\tau \in \mathbf{G}_*^+$ имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\| X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \| \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{\tau}\ln\alpha + \beta + \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\| X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}_0^{n-k+1}} \|. \tag{25}$$

Отсюда в силу леммы 1 [4] следует, что для всякого $\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$, отличного от $\mathbf{R}_0^{n-k+1}$, имеет место неравенство

$$\inf_{\tau\in\mathbf{G}_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\| X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \| \geqslant \\ \geqslant \beta + \inf_{\tau\in\mathbf{G}_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\| X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}_0^{n-k+1}} \|. \tag{26}$$

6. Так как $\beta > 0$, то из результата п. 5 следует равенство

$$\inf_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \inf_{\tau\in\mathbf{G}_*^+} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \| =$$

$$= \inf_{\tau\in\mathbf{G}_*^+} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}_0^{n-k+1}} \|,$$

левая часть которого в силу формулы (6) равна $\Omega_k(\mathfrak{H}, \zeta)$, а правая часть в силу формул (9), (16) равна $\Omega^{(k)}(\mathfrak{H}, \zeta)$ Теорема 1 доказана.

§ 3. О п р е д е л е н и е 4 (см. [5]). Гомоморфизм $\mathfrak{H}$ называется *насыщенным*, если для всякой точки $b\in B$ такой, что $\chi^{\theta}b\neq b$ при всяком $\theta\in\mathbf{G}_*$, для всякой окрестности $W(b)$ точки b (в пространстве B), всякого базиса $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ и всяких окрестностей $U(\xi_i)$ точек ξ_i ($i\in\{1, \ldots, n\}$) (в пространстве E) найдется $\delta\in\mathbf{R}_*^+$ такое, что для всякого $t\in\mathbf{N}$ и всяких невырожденных линейных операторов $Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1}b)\to p^{-1}(\chi^m b)$ ($m\in\{1, \ldots, t\}$), удовлетворяющих при всяком $m\in\{1, \ldots, t\}$ неравенству

$$\| Y_m(X[\chi^{m-1}b]^{-1} - I \| + \| X[\chi^{m-1}b]Y_m^{-1} - I \| < \delta,$$

найдется точка $b'\in W(b)$ и для всякого $m\in\{0, \ldots, t\}$ найдется изоморфизм слоев (как евклидовых пространств) $\psi_m : p^{-1}(\chi^m b')\to p^{-1}(\chi^m b)$, причем выполнены следующие требования: *i*) $\psi_0^{-1}\xi_i\in U(\xi_i)$ при всяком $i\in\{1, \ldots, n\}$, *ii*) при всяком $m\in\{1, \ldots, t\}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(\chi^{m-1}b') & \xrightarrow[X[\chi^{m-1}b']]{} & p^{-1}(\chi^m b') \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_{m-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_m} \\ p^{-1}(\chi^{m-1}b) & \xrightarrow[Y_m]{} & p^{-1}(\chi^m b) \end{array}$$

коммутативна.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть гомоморфизм $\mathfrak{H}$ насыщенный. Тогда в пространстве B имеется всюду плотное множество D типа G_δ такое, что при всяком $q\in\{1, \ldots, n\}$ функция $\Omega^{(q)}(\mathfrak{H}, \cdot) : B\to\mathbf{R}$ полунепрерывна сверху во всякой точке $b\in D$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . 1) В силу теоремы [5] (в [3], [6] изложена подробная проработка тех двух деталей доказательства теоремы [5], которые в самой статье [5] изложены сжато) в пространстве B имеется всюду плотное множество D_1 типа G_δ такое, что для всяких $b\in D_1$, $k\in\{2, \ldots, n\}$ имеет место альтернатива: либо $\lambda_{k-1}(\mathfrak{H}, b) = \lambda_k(\mathfrak{H}, b)$, либо гомоморфизм $\mathfrak{H}$ экспоненциально разделен (на $\mathbf{G}^+$) с индексом $n-k+1$ в точке b, причем $\mathbf{R}_0^{n-k+1} = \mathbf{R}_0^{n-k+1}(\mathfrak{H}, b) = E_{n-k+1}(\mathfrak{H}, b)$. Здесь $\mathbf{R}_0^{n-k+1}$ — подпространство слоя $p^{-1}(b)$, обладающее свойствами, указанными в определении 3, а $E_{n-k+1}(\mathfrak{H}, b)$, $\mathbf{R}_0^{n-k+1}(\mathfrak{H}, b)$ определены формулами (7), (8).

2) В силу теоремы [2] в пространстве B имеется всюду плотное множество D_2 типа G_δ такое, что для всякого $k\in\{1, \ldots, n\}$ функция $\Omega_k(\mathfrak{H}, \cdot) : B\to\mathbf{R}$ полунепрерывна сверху во всякой точке $b\in D_2$.

3) В силу теоремы [7] в пространстве B имеется всюду плотное множество D_3 типа G_δ такое, что для всяких $k\in\{2, \ldots, n\}$, $b\in D_3$ справедливо утверждение: если гомоморфизм $\mathfrak{H}$ экспоненциально разделен с индексом $n-k+1$ в точке b, то он экспоненциально разделен с тем же индексом $n-k+1$ во всякой точке из некоторой окрестности $U(b)$ точки

b.

4) Положим $D = D_1 \bigcap D_2 \bigcap D_3$. Так как D_1, D_2, D_3 — всюду плотные множества типа G_δ в полном метрическом пространстве B, то их пересечение D — тоже всюду плотное множество типа G_δ в пространстве B (теорема Бэра — см. [8, стр. 163]).

5) Пусть даны $q \in \{1, \ldots, n\}$, $b \in D$. Обозначим через m минимум тех $l \in \{1, \ldots, n\}$, для которых $\lambda_l(\mathfrak{H}, b) = \lambda_q(\mathfrak{H}, b)$.

Разберем две возможности.

а) $m = 1$. Тогда $\lambda_1(\mathfrak{H}, b) = \lambda_q(\mathfrak{H}, b)$, откуда в силу формулы (7) следует равенство $E_{n-q+1}(\mathfrak{H}, b) = E_n(\mathfrak{H}, b)$, из которого вследствие формулы (9) вытекает равенство

$$\Omega^{(q)}(\mathfrak{H}, b) = \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}, b). \tag{27}$$

Так как $b \in D \subset D_2$, то (см. п. 2) функция $\Omega_1(\mathfrak{H}, \cdot) : B \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху в точке b. Согласно предложению 3 функция $\Omega^{(1)}(\mathfrak{H}, \cdot) : B \to \mathbf{R}$ совпадает с функцией $\Omega_1(\mathfrak{H}, \cdot) : B \to \mathbf{R}$. Поэтому для всякого $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$ найдется окрестность V_ε точки b в пространстве B такая, что $\Omega^{(1)}(\mathfrak{H}, c) < \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}, b) + \varepsilon$ для всякого $c \in V_\varepsilon$, откуда в силу равенства (27) следует, что для всякого $c \in V_\varepsilon$ имеет место неравенство $\Omega^{(1)}(\mathfrak{H}, c) < \Omega^{(q)}(\mathfrak{H}, b) + \varepsilon$. В силу предложения 4 для всякого $c \in B$ выполнено неравенство $\Omega^{(q)}(\mathfrak{H}, c) \leqslant \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}, c)$, поэтому для всякого $c \in V_\varepsilon$ имеет место неравенство $\Omega^{(q)}(\mathfrak{H}, c) < \Omega^{(q)}(\mathfrak{H}, b) + \varepsilon$. Полунепрерывность сверху функции $\Omega^{(q)}(\mathfrak{H}, \cdot) : B \to \mathbf{R}$ в точке b доказана (в разбираемом случае, т. е. когда $m = 1$).

б) $m \in \{2, \ldots, n\}$. Тогда

$$\lambda_{m-1}(\mathfrak{H}, b) \neq \lambda_m(\mathfrak{H}, b) = \lambda_q(\mathfrak{H}, b). \tag{28}$$

Так как $b \in D \subset D_1$, то (см. п. 1)) гомоморфизм $\mathfrak{H}$ экспоненциально разделен с индексом $n-m+1$ в точке b, причем $\mathbf{R}_0^{n-m+1} = \mathbf{R}_0^{n-m+1}(\mathfrak{H}, b) = E_{n-m+1}(\mathfrak{H}, b)$. Так как $b \in D \subset D_3$, то (см. п. 3)) найдется окрестность $U(b)$ точки b (в пространстве B) такая, что гомоморфизм $\mathfrak{H}$ экспоненциально разделен с тем же индексом $n-m+1$ во всякой точке этой окрестности. Так как $b \in D \subset D_2$, то (см. п. 2)) функция $\Omega_m(\mathfrak{H}, \cdot) : B \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху в точке b, т. е. для всякого $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$ найдется окрестность W_ε точки b (в пространстве B) такая, что $\Omega_m(\mathfrak{H}, c) < \Omega_m(\mathfrak{H}, b) + \varepsilon$ для всякого $c \in W_\varepsilon$. Поэтому для всяких $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$, $c \in U(b) \bigcap W_\varepsilon$ имеет место неравенство $\Omega_m(\mathfrak{H}, c) < \Omega_m(\mathfrak{H}, b) + \varepsilon$ и гомоморфизм $\mathfrak{H}$ экспоненциально разделен с индексом $n-m+1$ в точке c. В силу теоремы 1 из экспоненциальной разделенности $\mathfrak{H}$ с индексом $n-m+1$ в точке a следует равенство $\Omega^{(m)}(\mathfrak{H}, a) = \Omega_m(\mathfrak{H}, a)$. Полагая здесь $a = c$, $a = b$, получаем из предыдущей фразы, что для всяких $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$, $c \in U(b) \bigcap W_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\Omega^{(m)}(\mathfrak{H}, c) < \Omega^{(m)}(\mathfrak{H}, b) + \varepsilon. \tag{29}$$

Из равенства в формуле (28) в силу формулы (7) следует равенство $E_{n-q+1}(\mathfrak{H}, b) = E_{n-m+1}(\mathfrak{H}, b)$, из которого вследствие формулы (9) вытекает равенство $\Omega^{(q)}(\mathfrak{H}, b) = \Omega^{(m)}(\mathfrak{H}, b)$. Поэтому неравенство (29) переписывается в виде $\Omega^{(m)}(\mathfrak{H}, c) < \Omega^{(q)}(\mathfrak{H}, b) + \varepsilon$.

Итак, для всякого $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$ нашлась окрестность $U(b) \bigcap W_\varepsilon$ точки b (в пространстве B) такая, что

$$\Omega^{(m)}(\mathfrak{H}, c) < \Omega^{(q)}(\mathfrak{H}, b) + \varepsilon \tag{30}$$

для всякого $c \in U(b) \bigcap W_\varepsilon$.

Так как $m \leqslant q$ то $\Omega^{(q)}(\mathfrak{H}, c) \leqslant \Omega^{(m)}(\mathfrak{H}, c)$ для всякого $c \in B$ (в силу предложения 4). Поэтому из (30) следует неравенство

$$\Omega^{(q)}(\mathfrak{H}, c) < \Omega^{(q)}(\mathfrak{H}, b) + \varepsilon. \tag{31}$$

Мы доказали, что для всякого $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$ существует окрестность $U(b) \bigcap W_\varepsilon$ точки b (в пространстве B) такая, что для всякого $c \in U(b) \bigcap W_\varepsilon$ выполнено неравенство (31). Полунепрерывность сверху функции $\Omega^{(q)}(\mathfrak{H}, \cdot) : B \to \mathbf{R}$ в точке b доказана и в случае $m \in \{2, \ \ldots, \ n\}$. Теорема 2 доказана.

§ 4. Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие класса C^3; риманову метрику класса C^2 на нем обозначаем через $\delta(\cdot, \cdot)$. Через S обозначаем множество всех диффеоморфизмов f класса C^1, отображающих V^n на себя и удовлетворяющих условию

$$\sup_{x \in V^n} \max\{\| df_x \|, \ \| (df_x)^{-1} \|\} < +\infty$$

через $\mathrm{d}f_x$ обозначается производная отображения f в точке x; через $\|\cdot\|$ обозначается норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом (как максимум нормы образа нормированного вектора) через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой. Касательное расслоение многообразия V^n обозначаем через $(TV^n, \ \pi, \ V^n)$.

Множество S наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{d}}_S(f, g) = \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(fx, gx)} \{\min\{s(u), \ [1 + \rho(x, x_0)]^{-1}\} + \\ + \| \varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x \|\}; \end{aligned} \tag{32}$$

здесь: x_0 — некоторая фиксированная точка многообразия V^n, $G(y, z)$ — множество всех кусочно-гладких путей, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y, $s(u)$ — длина пути u, $\rho(\cdot, \cdot)$ — расстояние между точками многообразия V^n, φ_u — параллельный перенос касательных векторов вдоль пути u.

При всяких $k \in \{1, \ \ldots, \ n\}$, $f \in S$, $x \in V^n$ положим

$$\begin{aligned} \lambda_k((f, x)) = \\ = \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(T_x V^n)} \sup_{\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^{n-k+1}} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m} \ln |\mathrm{d}f^m \mathfrak{x}|, \end{aligned} \tag{33}$$

где $\mathrm{d}f$ — производная отображения f, а $G_i(T_x V^n)$ — грассманово многообразие i-мерных векторных подпространств касательного пространства $T_x V^n = \pi^{-1}(x)$ многообразия V^n в точке x,

$$E_{n-k+1}(f, x) = \left\{ \mathfrak{x} \in T_x V^n : \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m} \ln |\mathrm{d}f^m \mathfrak{x}| \leqslant \lambda_k(f, x) \right\}, \tag{34}$$

$$\Omega^{(k)}((f, x)) = \inf_{\tau \in \mathbf{N}} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| \mathrm{d}f^{\tau}_{\mathrm{d}f^{j\tau} E_{n-k+1}(f, x)} \|. \tag{35}$$

ТЕОРЕМА 3. *В пространстве $S \times V^n$ имеется всюду плотное множество D типа G_δ такое, что при всяком $q \in \{1, \ \ldots, \ n\}$ функция $\Omega^{(q)} : S \times V^n \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху во всякой точке $(f, x) \in D$*

Д о к а з а т е л ь с т в о . а) В п. 4 [9] доказано, что формула (32) (в [9] ей соответствует формула (5)) в самом деле определяет расстояние в S, и доказано, что метрика $\tilde{\mathrm{d}}_S$ индуцирует на S ту же топологию, что и некоторая другая метрика d_S, определенная формулой (38) статьи [9], причем метрическое пространство $(S,\ \mathrm{d}_S)$ полно в силу предложения 1 [10].

b) Положим

$$E = S \times TV^n,\ p = 1_S \times \pi,\ B = S \times V^n. \tag{36}$$

Так определенное расслоение $(E,\ p,\ B)$ наделяется структурой векторного расслоения со слоем $\mathbf{R}^n$; а именно, векторное расслоение $(E,\ p,\ B)$ определяется как векторное расслоение, индуцированное отображением $\mathrm{pr}_2 : S \times V^n \to V^n$ (pr_2 — проекция произведения на второй сомножитель) и касательным расслоением $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$ многообразия V^n.

c) Для всяких $\xi \in E$, $\eta \in E$ таких, что $p\xi = p\eta$, положим

$$\langle \xi,\ \eta \rangle = \delta\,(\mathrm{pr}_2\xi,\ \mathrm{pr}_2\eta), \tag{37}$$

где pr_2 — проекция произведения $E = S \times TV^n$ на второй сомножитель, а $\delta(\cdot,\ \cdot)$ — риманова метрика на V^n. В [11], п. 1, § 1, доказано, что формула (37) определяет риманову метрику $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$ векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, определенного в пункте b).

d) При всяком $t \in \mathbf{Z}$ положим

$$\mathfrak{H}t = (X^t,\ \chi^t), \tag{38}$$

где отображения $X : E \to E$, $\chi : B \to B$ определены следующим образом. Всякое $\xi \in E$ есть, согласно формуле (36), пара $(f,\ \mathfrak{x})$, где $f \in S$, $\mathfrak{x} \in TV^n$; полагаем

$$X\xi = X(f,\ \mathfrak{x}) = (f,\ \mathrm{d}f\mathfrak{x}). \tag{39}$$

Всякое $b \in B$ есть, согласно формуле (36), пара $(f,\ x)$, где $f \in S$, $x \in V^n$; полагаем

$$\chi b = \chi(f,\ x) = (f,\ fx). \tag{40}$$

Пара $(X,\ \chi)$ так определенных отображений есть автоморфизм векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ — это доказано в [11, § 1, п. 2]. Поэтому формула (38) имеет смысл и определяет гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$.

e) Положим

$$a((f,\ x)) = \ln \sup_{y \in V^n} \max\{\|\,\mathrm{d}f_y\,\|,\ \|(\mathrm{d}f_y)^{-1}\,\|\} \tag{41}$$

для всяких $f \in S$, $x \in V^n$; в [11, § 1, п. 3], доказано, что формула (41) (в цитируемой статье эта формула имеет номер (1.53)) определяет отображение $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$ Из определения функции $a(\cdot)$ и отображений X, χ следует, что для всяких $t \in \mathbf{Z}$, $b \in B$ имеют место формулы (1), (2).

f) В силу леммы 1 [12] гомоморфизм $\mathfrak{H}$, определенный в п. d) — насыщенный.

g) Для определенного в п. d) гомоморфизма $\mathfrak{H}$ для всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $j \in S$, $f \in S_j$, $x \in V^n$ имеют место равенства $\lambda_k(\mathfrak{H},\ (f,\ x)) = \lambda_k(f,\ x)$ (в силу формул (4), (5), (33), (37)), $E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ (f,\ x)) = \{f\} \times E_{n-k+1}(f,\ x)$ (в силу предыдущего равенства и формул (7), (34), (37)), $\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\ (f,\ x)) = \Omega^{(k)}(f,\ x)$ (в силу предыдущего равенства и формул (9), (35), (37)). В силу последнего из этих равенств доказываемая теорема следует из теоремы 2. Теорема 3 доказана.

§ 5. Для всякого $j \in S$ через S_j обозначается подмножество множества S, определенного в начале § 4, состоящее из диффеоморфизмов f, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x\in V^n}\rho\,(fx,\,jx)<+\infty.$$

Для всякого $j\in S$ множество S_j наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния

$$\tilde{\mathrm{d}}_1(f,\,g)=\sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G(fx,\,gx)}\{s(u)+\|\,\varphi_u\mathrm{d}g_x-\mathrm{d}f_x\,\|\}. \tag{42}$$

Для всяких $q\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $j\in S$, $f\in S_j$ определим $\Omega^{(k)}(f,\,x)$ формулами (33)—(35).

ТЕОРЕМА 4. *Для всякого $j\in S$ в пространстве $S_j\times V^n$ имеется всюду плотное множество D_j типа G_δ такое, что при всяком $q\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\Omega^{(q)}:S_j\times V^n\to\mathbf{R}$ полунепрерывна сверху во всякой точке $(f,\,x)\in D_j$.*

Доказательство. a) При всяком $j\in S$ множество S_j можно наделить и другой структурой метрического пространства, задав расстояние

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_1(f,\,g)=\sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G(fx,\,gx)}\{s(u)+\|\,\varphi_u\mathrm{d}g_x-\mathrm{d}f_x\,\|+\\+\|\,(\varphi_u\mathrm{d}g_x)^{-1}-(\mathrm{d}f_x)^{-1}\,\|\}.\end{aligned} \tag{43}$$

В п. 5 [9] доказано, что при всяком $j\in S$ формулы (42), (43) в самом деле определяют расстояния в S_j и что при всяком $j\in S$ расстояние d_1 индуцирует на S_j ту же топологию, что и расстояние $\tilde{\mathrm{d}}_1$. В силу предложения 2 [10] метрическое пространство $(S_j,\,\mathrm{d}_1)$ полно при всяком $j\in S$.

b) При всяком $j\in S$ положим

$$E_j=S_j\times TV^n,\ p_j=1_{S_j}\times\pi,\ B_j=S_j\times V^n.$$

При всяком $j\in S$ так определенное расслоение $(E_j,\,p_j,\,B_j)$ наделяется структурой векторного расслоения со слоем $\mathbf{R}^n$; а именно, векторное расслоение $(E_j,\,p_j,\,B_j)$ определяется как векторное расслоение, индуцированное отображением $\mathrm{pr}_2:S\times V^n\to V^n$ (pr_2 — проекция произведения на второй сомножитель) и касательным расслоением $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$ многообразия V^n.

c) Риманову метрику на векторном расслоении $(E_j,\,p_j,\,B_j)$, отображения $X_j:E_j\to E_j$, $\chi_j:B_j\to B_j$ и функцию $a_j(\cdot):B_j\to\mathbf{R}^+$ определим при всяком $j\in S$ как сужения римановой метрики $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$, отображений $X:E\to E$, $\chi:B\to B$ и функции $a(\cdot):B\to\mathbf{R}^+$, определенных в пп. c) — e) доказательства теоремы 3. При всяких $j\in S$, $t\in\mathbf{Z}$ положим $\mathfrak{H}_jt=(X_j^t,\,\chi_j^t)$.

d) В силу леммы 2 [12] при всяком $j\in S$ гомоморфизм $\mathfrak{H}_j$, определенный в п. c), — насыщенный.

e) При всяком $j\in S$ для гомоморфизма $\mathfrak{H}_j$, определенного в п. c), для всяких $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $f\in S_j$, $x\in V^n$, имеют место равенства $\lambda_k(\mathfrak{H}_j,\,(f,\,x))=\lambda_k(f,\,x)$, $E_{n-k+1}(\mathfrak{H}_j,\,(f,\,x))=\{f\}\times E_{n-k+1}(f,\,x)$, $\Omega^{(k)}(\mathfrak{H}_j,\,(f,\,x))=\Omega^{(k)}(f,\,x)$. Вследствие последнего равенства доказываемая теорема вытекает из теоремы 2. Теорема 4 доказана.

§ 6. Пусть V^n — n-мерное компактное дифференцируемое многообразие класса C^3. Обозначим через S множество всех диффеоморфизмов V^n на V^n класса C^1, наделенное C^1-топологией.

Взяв любую риманову метрику $\delta(\cdot,\,\cdot)$ класса C^2 на V^n, определим $\Omega^{(k)}(f,\,x)$ для всяких $f \in S$, $x \in V^n$ формулами (33)—(35). Фигурирующая в формуле (35) норма $\|\cdot\|$ линейного отображения касательного пространства в касательное пространство определяется стандартным образом (как максимум нормы образа нормированного вектора) через норму $|\cdot|$ в касательных пространствах, индуцированную римановой метрикой $\delta(\cdot,\ \cdot)$ по формуле $|\mathfrak{x}| = [\delta(\mathfrak{x},\ \mathfrak{x})]^{1/2}$.

Нормы $|\cdot|$, $\|\cdot\|$ зависят, конечно, от римановой метрики $\delta(\cdot,\ \cdot)$, но объекты $\lambda_k(f,\ x)$, $E_{n-k+1}(f,\ x)$, $\Omega^{(k)}(f,\ x)$, определенные формулами (33)—(35), от выбора римановой метрики на V^n не зависят, так как вследствие компактности многообразия V^n всякие две римановы метрики $\delta_1(\cdot,\ \cdot)$ и $\delta_2(\cdot,\ \cdot)$ на V^n эквивалентны в том смысле, что отношение $\delta_1(\mathfrak{x},\ \mathfrak{x})[\delta_2(\mathfrak{x},\ \mathfrak{x})]^{-1}$ заключено между двумя положительными числами, не зависящими от касательного вектора $\mathfrak{x}$. Поэтому излагаемая ниже теорема 5 дифференциально-топологически инвариантна.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть V^n — компактное дифференцируемое многообразие класса C^3. Тогда в пространстве $S \times V^n$*, где S — *множество всех диффеоморфизмов V^n на V^n, наделенное C^1-топологией*, *имеется всюду плотное множество D типа G_δ такое*, *что при всяком $q \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\Omega^{(q)} : S \times V^n \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху во всякой точке $(f,\ x) \in D$.*

Доказательство. Фиксируем на V^n произвольную риманову метрику класса C^2. В силу компактности многообразия V^n для всякого диффеоморфизма f класса C^1, отображающего V^n на V^n, выполнено неравенство

$$\sup_{x \in V^n} \max \{\| \mathrm{d}f_x \|,\ \| (\mathrm{d}f_x)^{-1} \|\} < +\infty.$$

Из простейших свойств параллельного переноса следует, что метрика, определенная на S формулой (32), — вследствие компактности V^n она эквивалентна метрике, определенной на S формулой (42) (заметим, что для компактного многообразия V^n имеем $S_j = S$ при всяком $j = S$) — индуцирует C^1-топологию на S. Поэтому теорема 5 есть частный случай теоремы 3 (и теоремы 4). Теорема 5 доказана.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
7.VI.1984

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., «Наука», 1966.

[2] Миллионщиков В. М., О типичных свойствах условной экспоненциальной устойчивости. II, Дифф. уравнения, **19**, № 9 (1983), 1503—1510.

[3] Миллионщиков В. М., Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. X, Дифф. уравнения, **18**, № 12 (1982), 2132—2148.

[4] Миллионщиков В. М., О типичных свойствах условной экспоненциальной устойчивости. I, Дифф. уравнения, **19**, № 8 (1983), 1344—1356.

[5] Миллионщиков В. М., Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. IV, Дифф. уравнения, **17**, № 3 (1981), 431—468.

[6] Миллионщиков В. М., Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. XI, Дифф. уравнения, **19**, № 2 (1983), 196—214.

[7] Миллионщиков В. М., Об индексах экспоненциальной разделенности, Матем. сб., **124**, № 4 (1984), 451—485.

[8] Хаусдорф Ф., Теория множеств, М.—Л., ОНТИ, 1937.

[9] М и л л и о н щ и к о в В. М., Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VI, Дифф. уравнения, **18**, № 5 (1982), 804—821.

[10] М и л л и о н щ и к о в В. М., Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VII, Дифф. уравнения, **18**, № 6 (1982), 957—978.

[11] М и л л и о н щ и к о в В. М., Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VIII, Дифф. уравнения, **18**, № 8 (1982), 1330—1345.

[12] М и л л и о н щ и к о в В. М., Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. IX, Дифф. уравнения, **18**, № 9 (1982), 1507—1548.