МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 2, № 3 (1967), 315—318

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СТАТИСТИЧЕСКИ ПРАВИЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. М. Миллионщиков

Экспоненциальный рост (убывание) $x(t)$ решения системы $\dot{x} = A(t)x$ описывается числом

$$\lambda = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln\|x(t)\|}{t},$$

называемым *характеристическим показателем* (см. [2], стр. 182). Мы будем говорить, что характеристические показатели системы $\dot{x} = A(t)x$ *устойчивы*, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что из $\|B(t)\|<\delta (t \geqslant t_0)$ вытекает

$$|\lambda_i - \mu_i| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где λ_i и μ_i — характеристические показатели соответственно систем

$$\dot{x} = A(t)x \text{ и } \dot{y} = A(t)y + B(t)y,$$

занумерованные в порядке убывания (в противном случае будем говорить, что показатели системы

$$\dot{x} = A(t)x$$

неустойчивы).

Первый пример системы с неустойчивыми показателями принадлежат Перрону (см. [3], а также [2], стр. 199). Существуют даже п р а в и л ь н ы е системы (см. [1], стр. 283—284), обладающие свойством неустойчивости показателей. Соответствующий пример принадлежит Р. Э. Винограду (см. [4], а также [1], стр. 187—190).

Ниже рассматривается подкласс правильных систем (будем называть их *статистически правильными*), для которых заведомо не проходит рассуждение Р. Э. Винограда [4] (для них не выполнено то условие, на котором основана сама идея примера). Тем не менее оказывается, что и среди таких систем имеются системы с неустойчивыми показателями; доказательству этого факта и посвящена настоящая работа.

О п р е д е л е н и е. Пусть треугольная система

$$\dot{u} = P(t)u$$

правильная, то есть существуют

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t p_i(\tau)d\tau = \lambda_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $p_i(t)$ есть i-й диагональный элемент треугольной матрицы $P(t)$. Пусть для всякого $\varepsilon>0$ существует H такое, что для любого $h \geqslant H$ относительная мера множества $S_{h,\varepsilon}$ (т.е. $\overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{T} \operatorname{mes} S_{h,\varepsilon} \cap [0,T]$) тех t, при которых хотя бы для одного $i (1 \leqslant i \leqslant n)$

$$\left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} p_i(\tau) d\tau - \lambda_i \right| \geqslant \varepsilon,$$

меньше ε. Такую систему, а также всякую систему $\dot{x} = A(t)x$ которая некоторым перроновским преобразованием (см. [1], стр. 261—266) приводится к такой системе, будем называть *статистически правильной системой.*

Т Е О Р Е М А. *Существует статистически правильная система с неустойчивыми показателями.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$A(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{при } \tau_k = \sum_{i=1}^{k-1} (i^2 + i) + k^2 \leqslant \\ \leqslant t < \sum_{i=1}^{k} (i^2 + i) = t_k \quad (k = 1, 2, \ldots), \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{при остальных } t, \end{cases}$$

и

$$B_m(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2k} (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{при } \sum_{i=1}^{k-1} (i^2 + i) + k^2 \leqslant \\ \leqslant t < \sum_{i=1}^{k} (i^2 + i) (k = m, m+1, \ldots), \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Тогда у системы $\dot{x} = A(t)x$ решения с начальными условиями (1, 0), (0, 1) имеют характеристические показатели соответственно 1 и —1.

Легко видеть также, что эта система статистически правильная.

У системы же

$$\dot{y} = A(t)y + B_m(t)y,$$

при всяком $m = 1, 2, \ldots$ (заметим, что $\| B_m(t) \| \leqslant \pi / 2m$) решение с начальным условием (1, 0) имеет характеристический показатель 0.

В самом деле, это решение ведет себя следующим образом: при $t < t_m$ оно идет по оси Ox и логарифмическая производная его нормы равна 1; за время от τ_m до t_m оно поворачивается вокруг начала координат на угол $(-1)^m \frac{\pi}{2}$; затем при $t_m < t < \tau_{m+1} = t_m + (m+1)^2$ оно идет по оси Oy, и логарифмическая производная его нормы равна —1; за время от τ_{m+1} до t_{m+1} оно поворачивается вокруг начала координат на угол $(-1)^{m+1} \frac{\pi}{2}$ (т.е. попадает снова на ось Ox) и т. д.

В результате

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\|x(t)\|=$$

$$=\lim_{\delta\to\infty}\frac{t_m-(m+1)^2+\ldots-(m+2s-1)^2+(m+2s)^2}{t_{m+2s}}=$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{(2m+3)+\ldots+(2m+4s-1)}{t_{m+2s}}=0,$$

так как числитель $\approx \mathrm{const}\cdot s^2$, а знаменатель $\approx \mathrm{const}\cdot s^3$.

Теорема доказана.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 21.III.1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова, М., 1966.

[2] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М.— Л., 1949.

[3] Perron O., Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungs-systeme, Math. Z., 31, № 5 (1930), 748—766.

[4] Виноград Р. Э., Отрицательное решение вопроса об устойчивости характеристических показателей правильных систем Прикл. матем. и мех., 17, № 6 (1953). 645—650.