УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. VII

1. Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие (риманову метрику на нем обозначаем через $\delta(\cdot,\ \cdot)$)*). Через S обозначается множество всех диффеоморфизмов $f: V^n \to V^n$ класса C^1, отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию**)

$$\sup_{x\in V^n} \max\{\| df_x \|,\ \| (df_x)^{-1} \|\} < +\infty. \tag{1}$$

Множество S наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния

$$\tilde{d}_S(f,\ g) = \sup_{x\in V^n} \inf_{u\in G(fx,gx)} \{\min\{s(u),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\} + \| \varphi_u dg_x - df_x \|\}, \tag{2}$$

здесь x_0 — некоторая фиксированная точка многообразия V^n; $G(y,\ z)$ — множество всех кусочно-гладких путей, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y; $s(u)$ — длина пути u; $\rho(\cdot,\ \cdot)$ — расстояние между точками многообразия V^n; φ_u — преобразование, состоящее в параллельном перенесении касательных векторов вдоль пути u.

З а м е ч а н и е 1. Если V^n компактно (т. е. V^n — замкнутое многообразие), то метрика $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$ индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\tilde{d}_1(\cdot,\ \cdot)$, определяемая формулой

$$\tilde{d}_1(f,\ g) = \sup_{x\in V^n} \inf_{u\in G(fx,gx)} \{s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \|\}.$$

З а м е ч а н и е 2. Пусть $V^n = E^n$ (n-мерное евклидово пространство). Тогда метрика $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$ индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$, определяемая формулой***):

$$\tilde{\tilde{d}}_S(f,\ g) = | fx_0 - gx_0 | + \sup_{x\in E^n} \| df_x - dg_x \|.$$

2. Для всяких $f \in S$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ определяется *показатель Ляпунова*

$$\lambda_k((f,\ x)) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(T_xV^n)} \sup_{\text{æ} \in \mathbf{R}_*^{n-k+1}} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln | df^m \text{æ} |, \tag{3}$$

где $G_k(T_xV^n)$ — множество всех k-мерных векторных подпространств касательного пространства T_xV^n многообразия в V^n точке x; через $\mathbf{R}_*^k$ обозначается $\mathbf{R}^k \setminus \{0\}$, а норма $|\mathfrak{y}|$ определена формулой $|\mathfrak{y}| \underset{\text{def}}{=} (\delta(\mathfrak{y},\ \mathfrak{y}))^{1/2}$ для всякого $\mathfrak{y} \in TV^n$.

3. *Центральный показатель* $\Omega_k((f,\ x))$ определяется при всяких $f \in S$, $x \in V^n$,

---

*) Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^3, риманова метрика $\delta(\cdot,\ \cdot)$ — классу C^2.

**) Через df_x обозначается производная отображения f в точке x. Через $\|\cdot\|$ обозначается норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой.

***) В случае $V^n = E^n$ касательные пространства стандартным образом отождествляются с E^n. После этого отождествления разность $df_x - dg_x$ (и норма этой разности) приобретает смысл.

$k\in\{1,\ \dots,\ n\}$ формулой

$$\Omega_k((f,\ x)) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(T_xV^n)} \inf_{\tau\in\mathbf{N}} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\| df^{\tau}|_{df^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}}\| \qquad (4)$$

($dg|_C$ — сужение отображения dg на множество C, норма линейного отображения $dg\mathbf{R}^i$ определяется стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой $\delta(\cdot,\ \cdot)$). *Центральный показатель* $\Omega^{(k)}((f,\ x))$ определяется при всяких $j\in S$, $x\in V^n$, $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$ формулой

$$\Omega^{(k)}((f,\ x)) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\tau\in\mathbf{N}} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\| df^{\tau}|_{df^{j\tau}E_{n-k+1}(f,\ x)}\|, \qquad (4')$$

где векторное подпространство $E_{n-k+1}(f,\ x)$ касательного пространства T_xV^n определено формулой

$$E_{n-k+1}(f,\ x) \underset{\text{def}}{=} \{\text{æ}\in T_xV^n : \lambda(f,\ x)\leqslant\lambda_k((f,\ x))\}, \qquad (4'')$$

в которой

$$\lambda(f,\ \text{æ}) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\dfrac{1}{m}\ln|df^m\text{æ}| & \text{при} \quad |\text{æ}|\neq 0, \\ -\infty \quad \text{при} \quad |\text{æ}|=0 \end{cases} \qquad (4''')$$

($f\in S$, $\text{æ}\in TV^n$; через TV^n обозначается пространство касательного расслоения многообразия V^n).

4. Предложение. *Для всяких $j\in S$, $x\in V^n$, $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$ имеют место неравенства $\lambda_k((f,\ x))\leqslant\Omega_k((f,\ x))\leqslant\Omega^{(k)}((f,\ x))$.*

Доказательство этого предложения см. ниже в п. 9.

5. Через $S\times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S (с топологией, индуцированной метрикой $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$) и топологического пространства V^n.

Теорема. *В пространстве $S\times V^n$ найдется всюду плотное множество $\mathfrak{D}$ типа G_δ, обладающее свойствами:*

а) при всяких $(f,\ x)\in\mathfrak{D}$, $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$ функция $\Omega_k(\cdot): S\times V^n\to\mathbf{R}$ полунепрерывна сверху в точке $(f,\ x)$;

б) при всяких $(f,\ x)\in\mathfrak{D}$, $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$ имеют место равенства $\lambda_k((f,\ x))=\Omega_k((f,\ x))=\Omega^{(k)}((f,\ x))$;

в) при всяких $(f,\ x)\in\mathfrak{D}$, $k\in\{1,\ \dots,\ n-1\}$ имеет место альтернатива: либо $\lambda_{n-k}((f,\ x))=\lambda_{n-k+1}((f,\ x))$, либо подпространство $E_k(f,\ x)$ экспоненциально отделено от всякого своего алгебраического дополнения в пространстве T_xV^n, т. е. для всякого алгебраического дополнения l^{n-k} подпространства $E_k(f,\ x)$ (в векторном пространстве T_xV^n) существуют вещественные числа $\alpha>0$, $\beta>0$ такие, что для всяких $\text{æ}\in l^{n-k}$, $\mathfrak{y}\in E_k(f,\ x)$ и всяких целых чисел $t\geqslant s\geqslant 0$ выполнено неравенство

$$|df^t\text{æ}|\cdot|df^s\mathfrak{y}|\geqslant\alpha|df^s\text{æ}|\cdot|df^t\mathfrak{y}|\exp(\beta(t-s)).$$

Доказательство теоремы см. ниже в п. 10.

6. В этом пункте напоминаются некоторые сведения из статей [1 — 3]. а) Множество S можно наделить также другой структурой метрического пространства, задав расстояние

$$d_S(f,\ g) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V^n} \inf_{u\in G(fx,\ gx)} \{\min\{s(u),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}+ \\ +\|\varphi_u dg_x - df_x\| + \|(\varphi_u dg_x)^{-1}-(dg_x)^{-1}\|\} \tag{5}$$

(смысл обозначений разъяснен выше после формулы (2)). В [1] п. 3 доказано, что формула (5) (в [1] ей соответствует формула (5)) в самом деле определяет расстояние в S. В [1], п. 4а), доказано, что формула (2) (которой в [1] соответствует формула (38)) тоже определяет расстояние в S. В [1], п. 4б), доказано, что расстояние $d_S(\cdot,\ \cdot)$, определенное формулой (5), индуцирует на S ту же топологию, что и расстояние $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$, определенное формулой (2).

В силу предложения 1 [2] метрическое пространство $(S,\ d_S)$ полное.

б) Положим

$$B = S\times V^n,\ \ E = S\times TV^n,\ \ p = 1_s\times\pi, \tag{6}$$

где TV^n (соответственно π) — пространство (соответственно проекция) касательного расслоения $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$ многообразия V^n (таким образом, $T_xV^n = \pi^{-1}(x)$ при всяком $x\in V^n$).

Расстояние в B определяется формулой

$$\tilde{d}_B((f,\ x),\ (g,\ y)) \underset{\text{def}}{=} \tilde{d}_S(f,\ g)+\rho(x,\ y) \tag{7}$$

для всяких $j\in S$, $g\in S$, $x\in V^n$, $y\in V^n$.

Можно определить другое расстояние в B формулой

$$d_B((f,\ x),\ (g,\ y)) \underset{\text{def}}{=} d_S(f,\ g)+\rho(x,\ y) \tag{8}$$

для всяких $j\in S$, $g\in S$, $x\in V^n$, $y\in V^n$.

Так как расстояния $\tilde{d}_B(\cdot,\ \cdot)$ и $d_B(\cdot,\ \cdot)$ индуцируют на S одну и ту же топологию, то расстояния $\tilde{d}_B(\cdot,\ \cdot)$ и $d_B(\cdot,\ \cdot)$, определенные формулами (7) и (8), индуцируют на B одну и ту же топологию.

Топологическое пространство E определяется как произведение топологического пространства S (с топологией, индуцированной расстоянием $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$; напомним, что эта топология совпадает с топологией, индуцированной расстоянием $d_S(\cdot,\ \cdot)$) и топологического пространства TV^n (TV^n стандартным образом наделено структурой дифференцируемого многообразия класса C^2, поскольку V^n — дифференцируемое многообразие класса C^3; структура дифференцируемого многообразия индуцирует топологию на TV^n).

Непрерывность отображения $p \underset{\text{def}}{=} I_S\times\pi : E\to B$ вытекает в силу определения топологии на E и формулы (7) из непрерывности отображения $\pi : TV^n\to V^n$.

в) Расслоение (E, p, B), определенное формулами (6), естественным образом наделяется структурой векторного расслоения со слоем $\mathbf{R}^n$ (подробно это объяснено в [3], § 1, п. 1).

г) На так определенном векторном расслоении $(E,\ p,\ B)$ зададим риманову метрику $\Delta(\cdot,\ \cdot)$, положив для всяких $\xi\in E$, $\eta\in E$ таких, что $p\xi = p\eta$, по определению

$$\Delta(\xi,\ \eta) \underset{\text{def}}{=} \delta(\mathrm{pr}_2\xi,\ \mathrm{pr}_2\eta), \tag{9}$$

где pr_2 — проекция произведения $E \underset{(6)}{=} S\times TV^n$ на второй сомножитель, а $\delta(\cdot,\ \cdot)$ — риманова метрика, имеющаяся на V^n как на римановом многообразии. В [3], п. 1, § 1, доказано, что $\Delta(\cdot,\ \cdot)$, определенное формулой (9), является римановой метрикой векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, определенного в подпунктах б), в).

д) При всяком $t \in \mathbf{Z}$ положим

$$\mathfrak{H}t \underset{\text{def}}{=} (X^t,\ \chi^t) \tag{10}$$

где отображения $X: E \to E$, $\chi: B \to B$, определены следующим образом. Всякое $\xi \in E$ есть, согласно формуле (6), пара $(f,\ \mathfrak{x})$, где $f \in S$, $\mathfrak{x} \in TV^n$; полагаем

$$X\xi = X(f,\ \mathfrak{x}) \underset{\text{def}}{=} (f,\ df\mathfrak{x}). \tag{11}$$

Всякое $b \in B$ есть, согласно формуле (6), пара $(f,\ x)$, где $f \in S$, $x \in TV^n$; полагаем

$$\chi b = \chi(f,\ x) \underset{\text{def}}{=} (f,\ fx). \tag{12}$$

Пара отображений $(X,\ \chi)$, определенных формулами (11), (12), есть автоморфизм векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ (это доказано в [3], § 1, п. 2). Поэтому формула (10) имеет смысл и определяет гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$, где через $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ обозначается множество гомоморфизмов группы $\mathbf{Z}$ в группу $\mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B)$ автоморфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$.

е) Положим

$$a((f,\ x)) \underset{\text{def}}{=} \ln \sup_{y \in V^n} \max\{\|df_y\|,\ \|(df_y)^{-1}\|\} \tag{13}$$

для всяких $f \in S$, $x \in V^n$; в [3], § 1, п. 3, доказано, что формула (13) (в цитируемой статье эта формула имеет номер (1.53)) определяет отображение $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$. Для так определенной функции $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ и отображения $\chi: B \to B$, определенного формулой (12), для всякого $b \in B$ выполнено равенство

$$a(\chi b) = a(b) \tag{14}$$

(докажем это: для всякого $b \in B$ имеем $b \underset{(6)}{=} (f,\ x)$, где $f \in S$, $x \in V^n$, поэтому $\chi b = \chi(f,\ x) \underset{(12)}{=} (f,\ fx)$; но $a((f,\ x)) = a((f,\ fx))$, так как $a((f,\ x)) \underset{(13)}{=} a((f,\ y))$ для всяких $f \in S$, $x \in V^n$, $y \in V^n$, что и требовалось доказать). Далее, для функции $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$, определенной формулой (13), и отображения $X: E \to E$, определенного формулой (11), для всякого $b \in B$ выполнено неравенство*)

$$\max\{\|X[b]\|,\ \|(X[b])^{-1}\|\} \leqslant \exp(a(b)). \tag{15}$$

Докажем это. Для всякого $b \in B$ имеем $b = (f,\ x)$, где $f \in S$, $x \in V^n$; всякое $\xi \in p^{-1}(b)$ есть, согласно формуле (6), пара $(f,\ \mathfrak{x})$, где $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x)$; поэтому

$$\|X[b]\| \underset{\text{def}}{=} \sup_{\xi \in p_*^{-1}(b)} (|X\xi| \cdot |\xi|^{-1}) = \sup_{\xi \in p_*^{-1}(b)} ((\Delta(X\xi,\ X\xi))^{1/2} (\Delta(\xi,\ \xi))^{-1/2}); \tag{16}$$

подставив в формулу (16) равенства

$$\xi = (f,\ \mathfrak{x}),\ X\xi = X(f,\ \mathfrak{x}) \underset{(11)}{=} (f,\ df\mathfrak{x}) \tag{17}$$

и воспользовавшись равенством (9), получаем

$$\begin{aligned} \|X[b]\| &= \sup_{\mathfrak{x} \in \pi_*^{-1}(x)} ((\delta(df\mathfrak{x},\ df\mathfrak{x}))^{\frac{1}{2}} (\delta(\mathfrak{x},\ \mathfrak{x}))^{-\frac{1}{2}}) = \\ &= \|df_x\| \underset{(13)}{\leqslant} \exp(a((f,\ x))) = \exp(a(b)). \end{aligned} \tag{18}$$

Далее, так как $(X,\ \chi)$ — автоморфизм векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, то $(X[b])^{-1}$ существует при всяком $b \in B$ и

---

*) Напомним, что через $X[b]$ обозначается сужение X на слой $p^{-1}(b)$.

$$\|(X[b])^{-1}\| \underset{\text{def}}{=} \sup_{\xi\in p_*^{-1}(b)} (|\xi|\cdot|X\xi|^{-1}) = \\ = \sup_{\xi\in p_*^{-1}(b)} ((\Delta(\xi,\ \xi))^{\frac{1}{2}}(\Delta(X\xi,\ X\xi))^{-\frac{1}{2}}). \tag{19}$$

Подставив в формулу (19) равенства (17) и воспользовавшись равенством (9), получаем

$$\|(X[b])^{-1}\| = \sup_{\mathfrak{X}\in\pi_*^{-1}(x)} ((\delta(\mathfrak{x},\ \mathfrak{x}))^{\frac{1}{2}}(\delta(df\,\mathfrak{X},\ df\,\mathfrak{X}))^{-\frac{1}{2}}) = \\ = \|(df_x)^{-1}\| \underset{(13)}{\leqslant} \exp(a((f,\ x))) = \exp(a(b)). \tag{20}$$

Объединением неравенств (18), (20) заканчивается доказательство неравенства (15).

Таким образом, автоморфизм $(X,\ \chi)\in \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B)$, определенный формулами (II), (12), удовлетворяет условиям п. 1.2 введения [3] (формулы (В. 1.1), (В. 1.2) цитируемой статьи совпадают с формулами-(14), (15) соответственно). В п. 1.4 введения [3] доказано: из того, что автоморфизм $(X,\ \chi)$ удовлетворяет условиям п. 1.2 введения [3], следует, что для гомоморфизма $\mathfrak{H}\in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$, определенного формулой (10), имеют место формула (В.1.4) [3] (при всяких $b\in B$, $m\in\mathbf{N}$) и формула (В.1.6) [3] (при всяких $b\in B$, $m\in\mathbf{Z}$), т. е. выполнены условия п. 2 введения [4].

ж) Для гомоморфизма $\mathfrak{H}\in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$, определенного формулами (10) — (12), рассмотрим при всяких $b\in B$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ показатель Ляпунова (см. в [4] формулу (2) и соглашение об обозначениях перед леммой 2):

$$\lambda_k(\mathfrak{H},\ b) \underset{\text{def}}{=} \min_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))}\ \max_{\xi\in\mathbf{R}_*^{n-k+1}}\ \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X^t\xi|, \tag{21}$$

где $G_i(p^{-1}(b))$ — множество i-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$; напомним, что $|\eta| \underset{\text{def}}{=} (\Delta(\eta,\ \eta))^{1/2}$ для всякого $\eta\in E$. В § 1 [4] доказана корректность этого определения (т. е. доказано, что в формуле (21) можно писать $\max$, а не $\sup$ и $\min$, а не $\inf$). Рассмотрим семейство автоморфизмов

$$(X(m),\ \chi(m)) \underset{\text{def}}{=} (X^m,\ \chi^m) \quad (m\in\mathbf{N})$$

векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$. В силу лемм 2, 3 [4] (в которых надо положить теперь $\tau=1$) при всяких $b\in B$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ показатель Ляпунова этого семейства, определенный в [5] на с. 1408, равен $\lambda_k(\mathfrak{H},\ b)$.

з) Центральный показатель $\Omega_k(\mathfrak{H},\ b)$ гомоморфизма $\mathfrak{H}\in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ определяется при всяких $b\in B$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ формулой (см. [6], § 8, 13, а также [7], формулу (5)):

$$\Omega_k(\mathfrak{H},\ b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))}\ \inf_{\tau\in\mathbf{N}}\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}}\|, \tag{22}$$

где X_L^{τ} — сужение на множество L отображения X^{τ}; для всяких $t\in\mathbf{N}$, $b\in B$ для всякого векторного подпространства L слоя $p^{-1}(b)$ норма $\|X_L^{\tau}\|$ определяется стандартным образом через нормы в слоях, индуцированные римановой метрикой $\Delta(\cdot,\ \cdot)$, определенной формулой (9), а именно

$$\|X_L^{\tau}\| \underset{\text{def}}{=} \sup_{\xi\in L_*}(|X^{\tau}\xi|\cdot|\xi|^{-1}),$$

где $L_* \underset{\text{def}}{=} L\setminus\{0\}$.

Центральный показатель $\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\ b)$ гомоморфизма $\mathfrak{H}\in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ определяется при всяких $b\in B$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ формулой ([7], формула (16)):

$$\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\ b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\tau\in\mathbf{N}} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)} \|, \tag{22$'$}$$

в которой

$$E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b) \underset{\text{def}}{=} \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \leqslant \lambda_k(\mathfrak{H},\ b)\}, \tag{22$''$}$$

где показатель Ляпунова $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)$ при всяком $\xi \in E$ определен формулой

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{1}{m} \ln |X^m\xi| & \text{при } |\xi| \neq 0, \\ -\infty \quad \text{при } |\xi| = 0 \end{cases} \tag{22$'''$}$$

(в [4], § 1, доказано, что $E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$ — векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$).

7. Лемма 1. *При всяких* $f \in S$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ *имеет место равенство* $\lambda_k((f,\ x)) = \lambda_k(\mathfrak{H},\ (f,\ x))$, *левая часть которого определена формулой (3), а правая — формулой (21).*

Доказательство. Пусть даны произвольные $f \in S$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$. Тогда

$$b \underset{\text{def}}{=} (f,\ x) \in S \times V^n \underset{(6)}{=} B.$$

1. Всякое $\xi \in p^{-1}(b)$ имеет, согласно формуле (6), вид $\xi \in (f,\ \mathfrak{x})$, где $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x)$, наоборот, согласно той же формуле (6), для всякого $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x)$ имеем $(f,\ \mathfrak{x}) \in p^{-1}(b)$.

В силу определения структуры векторного расслоения $(E,\, p,\, B)$ (см. [3], § 1, п. 1) отображение $\mathrm{pr}_{2,\,b}$ (сужение на слой $p^{-1}(b)$ проекции pr_2 произведения $S \times TV^n$ на второй сомножитель) есть изоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$ на векторное пространство и $\pi^{-1}(x)$ всякое $\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ имеет вид

$$\mathbf{R}^{n-k+1} = (f,\ \widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}),\ \text{где}\ \widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1} = \mathrm{pr}_{2,\,b}\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(\pi^{-1}(x)). \tag{23}$$

2) Имеем

$$\lambda_k(\mathfrak{H},\ b) \underset{(21)}{=} \min_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{\xi \in \mathbf{R}^{n-k+1}_*} \overline{\lim_{\substack{t\to+\infty \\ (t\in\mathbf{Z})}}} \frac{1}{t} \ln((\Delta(X^t\xi,\ X^t\xi))^{\frac{1}{2}}). \tag{24}$$

Поскольку всякое $\xi \in p^{-1}(b)$ есть $(f,\ \mathfrak{x})$, где $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x)$, то при всяком $\xi \in p^{-1}(b)$ имеем

$$X^t\xi = X^t(f,\ \mathfrak{X}) \underset{(11)}{=} (f,\ df\mathfrak{X});$$

$$\Delta(X^t\xi,\ X^t\xi) = \Delta(f,\ df^t\mathfrak{x}), \quad (f,\ df^t\mathfrak{x}) \underset{(9)}{=} \delta(df^t\mathfrak{x},\ df^t\mathfrak{x}).$$

Подставив последнюю формулу в формулу (24) и воспользовавшись формулой (23), получаем

$$\lambda_k(\mathfrak{H},\ b) = \min_{\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(\pi^{-1}(x))} \max_{\mathfrak{x} \in \widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}_*} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln((\delta(df^t\mathfrak{x},\ df^t\mathfrak{x}))^{\frac{1}{2}}) =$$
$$\underset{(3)}{=} \lambda_k((f,\ x)).$$

Лемма 1 доказана.

Замечание. Попутно доказано, что в формуле (3) можно писать $\min$ вместо $\inf$ и $\max$ вместо $\sup$.

8. Лемма 2. *При всяких* $f \in S$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ *имеет место равенство* $\Omega_k((f,\ x)) = \Omega_k(\mathfrak{H},\ (f,\ x))$, *левая часть которого определена формулой (4), а правая — формулой (22), в которой* $\mathfrak{H}$ — *гомоморфизм* $\mathbf{Z} \to \mathrm{Aut}\,(E,\, p,\, B)$, *определенный формулами (10) — (12).*

Доказательство. Пусть даны произвольные $f \in S$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$. Имеем

$b \underset{\text{def}}{=} (f,\ x) \in S \times V^n \underset{(6)}{=} B.$

1) Всякое $\xi \in p^{-1}(b)$ имеет, согласно формуле (6), вид $\xi \in (f,\ \mathfrak{x})$, где $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x)$; наоборот (согласно той же формуле (6)), для всякого $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x)$ имеем $(f,\ \mathfrak{x}) \in p^{-1}(b)$. В силу определения структуры векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ (см. п. 1, § 1 [3]) отображение $\mathrm{pr}_{2,\ b}$ (сужение на слой $p^{-1}(b)$ проекции pr_2 произведения $S \times TV^n$ на второй сомножитель) есть изоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$ на векторное пространство $\pi^{-1}(x)$ и всякое $\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ имеет вид

$$\mathbf{R}^{n-k+1} = (f,\ \widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}), \tag{25}$$

где

$$\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1} = \mathrm{pr}_{2,\ b}\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(\pi^{-1}(x)). \tag{26}$$

2) Для всяких $\tau \in \mathbf{N}$, для всяких $j \in \mathbf{Z}^+$, $\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ имеем

$$X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1} \underset{(25)}{=} X^{j\tau}(f,\ \widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}) \underset{(11)}{=} (f,\ df^{j\tau}\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}). \tag{27}$$

Для всякого $\tau \in \mathbf{N}$, для всяких $j \in \mathbf{Z}^+$, $\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$, для всякого $\xi \in (X^{j\tau}\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1})_*$ имеем в силу формулы (27)

$$\xi = (f,\ \mathfrak{x}),\ \text{где}\ \mathfrak{x} \in df^{j\tau}\widehat{\mathbf{R}}_*^{n-k+1}, \tag{28}$$

и, наоборот, для всякого $\mathfrak{x} \in df^{j\tau}\widehat{\mathbf{R}}_*^{n-k+1}$ имеем $\xi \underset{\text{def}}{=} (f,\ \mathfrak{x}) \in (X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1})_*$, где $\mathbf{R}^{n-k+1} = (f,\ \widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1})$,

$$X^{\tau}\xi \underset{(28)}{=} X^{\tau}(f,\ \mathfrak{x}) \underset{(11)}{=} (f,\ df^{\tau}\mathfrak{x}), \tag{29}$$

$$\Delta(X^{\tau}\xi,\ X^{\tau}\xi) \underset{(29)}{=} \Delta((f,\ df^{\tau}\mathfrak{X}),\ (f,\ df^{\tau}\mathfrak{X})) \underset{(9)}{=} \delta(df^{\tau}\mathfrak{X},\ df^{\tau}\mathfrak{X}), \tag{30}$$

$$\Delta(\xi,\ \xi) \underset{(28)}{=} \Delta((f,\ \mathfrak{X}),\ (f,\ \mathfrak{X})) \underset{(9)}{=} \delta(\mathfrak{X},\ \mathfrak{X}), \tag{31}$$

$$\| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \| \underset{\text{def}}{=} \sup_{\xi \in (X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1})_*} \{(\Delta(X^{\tau}\xi,\ X^{\tau}\xi))^{\frac{1}{2}}(\Delta(\xi,\ \xi))^{-\frac{1}{2}}\} =$$

$$\overset{(28)}{\underset{(30),\ (31)}{=}} \sup_{\mathfrak{X} \in (df^{j\tau}\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1})_*} \{(\delta(df^{\tau}\mathfrak{X},\ df^{\tau}\mathfrak{X}))^{\frac{1}{2}}(\delta(\mathfrak{X},\ \mathfrak{X}))^{-\frac{1}{2}}\} =$$

$$= \| df^{\tau}|_{df^{j\tau}\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}} \|.$$

Итак, для всякого $\tau \in \mathbf{N}$, для всяких $j \in \mathbf{Z}^+$, $\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ доказано равенство

$$\| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \| = \| df^{\tau}|_{df^{j\tau}\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}} \|, \tag{32}$$

где $\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1} = \mathrm{pr}_{2,\ b}\mathbf{R}^{n-k+1}$. Следовательно, имеет место равенство

$$\inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \inf_{\tau \in \mathbf{N}} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \| =$$

$$= \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \inf_{\tau \in \mathbf{N}} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| df^{\tau}|_{df^{j\tau}\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}} \|,$$

где $\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1} = \mathrm{pr}_{2,\ b}\mathbf{R}^{n-k+1}$. В силу написанного в п. 1) доказательства правая часть последнего равенства может быть переписана в виде

$$\inf_{\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(\pi^{-1}(x))}\ \inf_{\tau\in\mathbf{N}}\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|df^{\tau}|_{df^{j\tau}\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}}\|,$$

что в силу формулы (4) (напомним, что $\pi^{-1}(x)$ и T_xV^n — разные обозначения одного и того же объекта) равно $\Omega_k((f,\ x))$. Левая же часть последнего равенства в силу формулы (22) равна $\Omega_k(\mathfrak{H},\ b)=\Omega_k(\mathfrak{H},\ (f,\ x))$. Таким образом, доказано равенство

$$\Omega_k(\mathfrak{H},\ (f,\ x))=\Omega_k((f,\ x)).$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *При всяких* $f\in S$, $x\in V^n$, $s\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ *имеет место равенство* $\Omega^{(k)}((f,\ x))=\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\ (f,\ x))$, *левая часть которого определена формулой (4'), а правая — формулой (22'), в которой* $\mathfrak{H}$ — *гомоморфизм* $\mathbf{Z}\to\mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B)$, *определенный формулами (10) — (12).*

Доказательство. Пусть даны произвольные $f\in S$, $x\in V^n$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$. Тогда

$$b\underset{\text{def}}{=}(f,\ x)\in S\times V^n\underset{(6)}{=}B. \tag{33}$$

Для всякого $m\in\mathbf{N}$, для всякого $\xi\in p^{-1}(b)$ имеем

$$\xi\underset{(6)}{=}(f,\ \mathfrak{X}),\ \text{где}\ \mathfrak{X}=\mathrm{pr}_{2,\,b}\xi\in\pi^{-1}(x), \tag{34}$$

$$X^m\xi\underset{(34)}{=}X^m(f,\ \mathfrak{X})\underset{(11)}{=}(f,\ df^m\mathfrak{X}), \tag{35}$$

$$\begin{aligned}|X^m\xi|&\underset{\text{def}}{=}(\Delta(X^m\xi,\ X^m\xi))^{\frac{1}{2}}\underset{(35)}{=}(\Delta((f,\ df^m\mathfrak{X}),\ (f,\ df^m\mathfrak{X})))^{-\frac{1}{2}}\underset{(9)}{=}\\&\underset{(9)}{=}(\delta(df^m\mathfrak{X},\ df^m\mathfrak{X}))^{\frac{1}{2}}=|df^m\mathfrak{X}|.\end{aligned} \tag{36}$$

Для всякого $\xi\in p_*^{-1}(b)$ (т. е. $\xi\in p^{-1}(b)$ такого, что $|\xi|\neq 0$) вектор $\mathfrak{x}$, определенный формулой (34), не равен нулю: $|\mathfrak{x}|\neq 0$ (см. п. 1 доказательства леммы 1), следовательно,

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\underset{(22'')}{=}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln|X^m\xi|\underset{(36)}{=}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln|df^m\mathfrak{X}|\underset{(4''')}{=}\lambda(f,\ \mathfrak{X}).$$

Для $\xi=0_b$ вектор $\mathfrak{x}$, определенный формулой (34), равен нулю (см. п. 1 доказательства леммы 1): $|\mathfrak{x}|=0$, следовательно,

$$\lambda(\mathfrak{H},\ 0_b)\underset{(22''')}{=}-\infty\underset{(4''')}{=}\lambda(f,\ \mathfrak{X}),\ \text{где}\ \mathfrak{X}=\mathrm{pr}_{2,\,b}0_b.$$

Таким образом, доказано, что для всякого $\xi\in p^{-1}(b)$ имеет место равенство

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)=\lambda(f,\ \mathrm{pr}_{2,\,b}\xi), \tag{37}$$

(напомним, что $\mathrm{pr}_{2,\,b}$ — сужение на слой $p^{-1}(b)$ проекции pr_2 произведения $S\times TV^n$ на второй сомножитель, а $\lambda(f,\ \mathfrak{x})$ определено формулой (4‴)).

Из леммы 1 и формулы (37) следует равенство

$$\mathrm{pr}_{2,\,b}E_{n-s+1}(\mathfrak{H},\ b)=E_{n-s+1}(f,\ x), \tag{38}$$

где $E_{n-s+1}(\mathfrak{H},\ b)$ определено формулой (22″) (гомоморфизм $\mathfrak{H}$ определен формулами (10) — (12)), а $E_{n-s+1}(f,\ x)$ — формулой (4″), причем $(f,\ x)\underset{(33)}{=}b$.

Так как $E_{n-s+1}(\mathfrak{H},\ b)$ — векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$ (см. [4], § 1), т. е. найдется $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ такое, что

$$\mathbf{R}^{n-k+1}\underset{\text{def}}{=}E_{n-s+1}(\mathfrak{H},\ b)\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b)), \tag{39}$$

то при всяких $\tau\in\mathbf{N}$, $j\in\mathbf{Z}^+$ имеем

$$\| X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-s+1}(\mathfrak{H},\, b)} \| \underset{(38),\,(39)}{\overset{(32)}{=}} \| df^{\tau}|_{df^{j\tau}E_{n-s+1}(f,\, x)} \| . \tag{40}$$

Сравнивая формулы (4′) и (22′) (при $k=s$), видим, что одна и та же операция $\inf\limits_{\tau\in\mathbf{N}} \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\ln$ применяется в правой части равенства (4′) к правой части равенства (40), а в правой части равенства (22′) — к левой части равенства (40). Следовательно, левые части равенств (4′) и (22′) (при $k=s$) равны:

$$\Omega^{(s)}((f,\, x)) = \Omega^{(s)}(\mathfrak{H},\, b)$$

(здесь $b \underset{(33)}{=} (f,\, x)$). Лемма 3 доказана.

9. Доказательство предложения, сформулированного в п. 4. Это предложение следует из предложений 2, 5 [7] в силу лемм 1 — 3. Предложение доказано.

10. Доказательство теоремы, сформулированной в п. 5.

А. В силу теоремы [8] и леммы 2 в пространстве $B \underset{(6)}{=} S\times V^n$ найдется всюду плотное множество $\mathfrak{D}^{(1)}$ типа G_δ такое, что при всяких $(f,\, x)\in\mathfrak{D}^{(1)}$, $k\in\{1,\,\ldots,\,n\}$ функция $\Omega_k(\cdot): S\times V^n \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху в точке $(f,\, x)$.

Б. В силу леммы 1 [9] (см. также терминологические пояснения в сносках к п. 7 введения [10]) гомоморфизм $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\, \mathrm{Aut}\,(E,\, p,\, B))$, определенный формулами (10) — (12), является насыщенным. Поэтому в силу теоремы [10] в пространстве $B=S\times V^n$ найдется всюду плотное множество $\mathfrak{D}^{(2)}$ типа G_δ, обладающее свойствами:

а) при всяких $(f,\, x)\in\mathfrak{D}^{(2)}$, $k\in\{1,\,\ldots,\,n\}$ имеет место цепочка равенств

$$\lambda_k(\mathfrak{H},\, (f,\, x)) = \Omega_k(\mathfrak{H},\, (f,\, x)) = \Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\, (f,\, x)),$$

которая в силу лемм 1 — 3 эквивалентна цепочке равенств

$$\lambda_k((f,\, x)) = \Omega_k((f,\, x)) = \Omega^{(k)}((f,\, x)); \tag{41}$$

б) при всяких $(f,\, x)\in\mathfrak{D}^{(2)}$, $k\in\{1,\,\ldots,\,n-1\}$ имеет место альтернатива:

либо выполнено равенство $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\, (f,\, x)) = \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\, (f,\, x))$, которое в силу леммы 1 эквивалентно равенству

$$\lambda_{n-k}((f,\, x)) = \lambda_{n-k+1}((f,\, x)), \tag{42}$$

либо гомоморфизм $\mathfrak{H}$ экспоненциально разделен с индексом k в точке $(f,\, x)$, т. е. (см. п. 8 введения [9]) выполнена следующая совокупность условий:

i) имеет место строгое неравенство

$$\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\, (f,\, x)) > \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\, (f,\, x)),$$

которое в силу леммы 1 эквивалентно строгому неравенству

$$\lambda_{n-k}((f,\, x)) > \lambda_{n-k+1}((f,\, x)); \tag{43}$$

ii) для всякого алгебраического дополнения

$$\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}((f,\, x)) \ominus \mathbf{R}^k_0(\mathfrak{H},\, (f,\, x)) \tag{44}$$

векторного подпространства $\mathbf{R}^k_0(\mathfrak{H},\, (f,\, x))$ слоя $p^{-1}((f,\, x))$ существуют вещественные числа $\alpha>0$, $\beta>0$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\xi\in\mathbf{R}^{n-k}$, $\eta\in\mathbf{R}^k_0(\mathfrak{H},\, (f,\, x))$ для всяких $t\in\mathbf{Z}^+$, $s\in\mathbf{Z}^+$ таких, что $t\geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X^t\xi|\cdot|X^s\xi|^{-1} \geqslant \alpha\, |X^t\eta|\cdot|X^s\eta|^{-1}\exp(\beta(t-s)). \tag{45}$$

Напомним, что если выполнено строгое неравенство $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\, b) > \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\, b)$, то через $\mathbf{R}^k_0(\mathfrak{H},\, b)$ обозначается векторное пространство

$$E_k(\mathfrak{H},\, b) \underset{\mathrm{def}}{=} \{\xi\in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H},\, \xi) \leqslant \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\, b)\}, \tag{46}$$

где

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \dfrac{1}{t} \ln |X^t \xi| & \text{при} \quad |\xi| \neq 0, \\ -\infty \quad \text{при} \quad |\xi| = 0, \end{cases} \tag{47}$$

(где в свою очередь $|\eta| \underset{\text{def}}{=} (\Delta(\eta,\ \eta))^{1/2}$ для всякого $\eta \in E$).

Так как отображение $\mathrm{pr}_{2,\ (f,\ x)}$ (сужение на слой $p^{-1}((f,\ x))$ проекции pr_2 произведения $S \times TV^n$ на второй сомножитель) при всяком $(f,\ x) \in B$ есть изоморфизм векторного пространства $p^{-1}((f,\ x))$ на векторное пространство $\pi^{-1}(x)$ (см. п. 1, § 1 [3]), то формула (44) эквивалентна формуле

$$\mathrm{pr}_{2,\ (f,\ x)} \mathbf{R}^{n-k} = \pi^{-1}(x) \ominus \mathrm{pr}_{2,\ (f,\ x)} \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ (f,\ x)). \tag{48}$$

При всяких $f \in S$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$, для которых выполнено (43), имеем

$$\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ (f,\ x)) \overset{(43)}{\underset{(46)}{=}} E_k(\mathfrak{H},\ (f,\ x)). \tag{49}$$

Из формул (38), (39) следует, что при всяких $f \in S$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$, для которых выполнено строгое неравенство (43), имеем

$$\mathrm{pr}_{2,\ (f,\ x)} \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ (f,\ x)) = E_k(f,\ x). \tag{50}$$

В силу равенства (50) формула (48) переписывается в виде

$$\mathrm{pr}_{2,\ (f,\ x)} \mathbf{R}^{n-k} = \pi^{-1}(x) \ominus E_k(f,\ x).$$

Поэтому условие *ii*) можно переписать в виде: для всякого алгебраического дополнения $l^{n-k} = \pi^{-1}(x) \ominus E_k(f,\ x)$ векторного подпространства $E_k(f,\ x)$ касательного пространства $\pi^{-1}(x)$ существуют вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\mathfrak{x} \in l^{n-k}$, $\mathfrak{y} \in E_k(f,\ x)$, для всяких $t \in \mathbf{Z}^+$, $s \in \mathbf{Z}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X^t(f,\ \mathfrak{x})| \cdot |X^s(f,\ \mathfrak{X})|^{-1} \geqslant \alpha\, |X^t(f,\ \mathfrak{y})| \cdot |X^s(f,\ \mathfrak{y})|^{-1} \exp\ (\beta(t-s))$$

(где $|\xi| \underset{\text{def}}{=} (\Delta(\xi,\ \xi))^{1/2}$ для всякого $\xi \in E$), которое с помощью формул (9), (11) переписывается в виде

$$|df^t \mathfrak{X}| \cdot |df^s \mathfrak{X}|^{-1} \geqslant \alpha\, |df^t \mathfrak{y}| \cdot |df^s \mathfrak{y}|^{-1} \exp\ (\beta(t-s))$$

(где $|\mathfrak{z}| \underset{\text{def}}{=} (\delta(\mathfrak{z},\ \mathfrak{z}))^{1/2}$ для всякого $\mathfrak{z} \in TV^n$). Последнее неравенство при $|\mathfrak{X}| \neq 0$, $|\mathfrak{y}| \neq 0$ эквивалентно неравенству

$$|df^t \mathfrak{X}| \cdot |df^s \mathfrak{y}| \geqslant \alpha\, |df^s \mathfrak{X}| \cdot |df^t \mathfrak{y}| \exp\ (\beta(t-s)). \tag{51}$$

Если $|\mathfrak{X}| = 0$ или $|\mathfrak{y}| = 0$, то левая и правая части нестрогого неравенства (51) равны нулю, следовательно, неравенство (51) верно и в том случае, когда $|\mathfrak{X}| = 0$ или $|\mathfrak{y}| = 0$.

Поэтому из условия *ii*) следует: для всякого алгебраического дополнения l^{n-k} векторного подпространства*) $E_k(f,\ x)$ касательного пространства $T_x V^n$ существуют вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для всяких $\mathfrak{X} \in l^{n-k}$, $\mathfrak{y} \in E_k(f,\ x)$ для всяких $t \in \mathbf{Z}^+$, $s \in \mathbf{Z}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство (51).

В. Положим $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(1)} \bigcap \mathfrak{D}^{(2)}$ (множество $\mathfrak{D}^{(1)}$ введено в подпункте А, множество $\mathfrak{D}^{(2)}$ — в начале подпункта Б). Так как $\mathfrak{D}^{(1)}$ и $\mathfrak{D}^{(2)}$ — всюду плотные множества типа G_δ в полном метрическом пространстве $(B,\ d_B)$ (полнота метрического пространства $(B,\ d_B)$

---

*) Напомним, что, согласно принятым в этой статье обозначениям, $\pi^{-1}(x) = T_x V^n$ для всякого $x \in V^n$.

(см. формулы (6), (8)) следует из полноты метрических пространств $(S,\ d_S)$ (см. п. 6а)) и $(V^n,\ \rho)$ (см. п. 1)), то в силу теоремы Бэра множество $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}^{(1)}\bigcap\mathfrak{D}^{(2)}$ есть всюду плотное множество типа G_δ в метрическом пространстве $(B,\ d_B)$, а следовательно, и в метрическом пространстве $(B,\ \tilde{d}_B)$ (см. п. 6б)).

Имеем: а) при всяких $(f,\ x)\in\mathfrak{D}=\mathfrak{D}^{(1)}\bigcap\mathfrak{D}^{(2)}$, $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$ функция $\Omega_k(\cdot):S\times V^n\to\mathbf{R}$ полунепрерывна сверху в точке $(f,\ x)$ (доказано в подпункте А);

б) при всяких $(f,\ x)\in\mathfrak{D}=\mathfrak{D}^{(1)}\bigcap\mathfrak{D}^{(2)}$, $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$ имеет место равенство $\lambda_k((f,\ x))=\Omega_k((f,\ x))=\Omega^{(k)}((f,\ x))$ (см. равенство (41));

в) при всяких $(f,\ x)\in\mathfrak{D}=\mathfrak{D}^{(1)}\bigcap\mathfrak{D}^{(2)}$, $k\in\{1,\ \dots,\ n-1\}$ имеет место альтернатива:

либо $\lambda_{n-k}((f,\ x))=\lambda_{n-k+1}((f,\ x))$ (см. равенство (42)),

либо (см. последнюю фразу подпункта Б) векторное подпространство $E_k(f,\ x)$ касательного пространства T_xV^n обладает следующим свойством: для всякого алгебраического дополнения l^{n-k} векторного подпространства $E_k(f,\ x)$ (в векторном пространстве T_xV^n) существуют вещественные числа $\alpha>0$, $\beta>0$ такие, что для всяких $\mathfrak{x}\in l^{n-k}$, $\mathfrak{y}\in E_k(f,\ x)$ и всяких целых чисел $t\geqslant s\geqslant 0$ выполнено неравенство

$$|df^t\mathfrak{x}|\ |df^s\mathfrak{y}|\geqslant\alpha|df^s\mathfrak{x}|\ |df^t\mathfrak{y}|\exp\ (\beta(t-s)).$$

Теорема, сформулированная в п. 5, доказана.

Примечание. В [2] правая часть неравенства (76) должна быть такой: $\min\{\varepsilon,\ r_1\}$. В [9, с. 1512], строка 5 сверху, вместо $S^c_{\frac{q}{2}}$ в двух местах должно быть $S^c_{\frac{q}{2}}(0)$. В [9, с. 1546] в формуле, определяющей расстояние в множестве S, вместо первого плюса должна быть запятая: такая же описка имеется в [11, с. 217], В [11, с. 218] в теореме 3_j вместо S_1 должно быть S_j.

Литература

1. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 5, с. 804 — 821.
2. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 6, с. 957 — 978.
3. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 8, с. 1330 — 1345.
4. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 12, с. 2132 — 2148.
5. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с. 1408 — 1416.
6. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
7. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 8, с. 1344 — 1356.
8. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 9, с. 1503 — 1510.
9. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 9, с. 1507 — 1548.
10. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 5, с. 753 —

779.
11. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 2, с. 215 — 220.
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*
*Поступила в редакцию
24 февраля 1983 г.*